ΔΥΟ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

$$\frac{d}{d\chi}\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt = f(\chi)$$

Η έννοια της παραγώγου και του ορισμένου ολοκληρώματος έχουν εισαχθεί ανεξάρτητα η μία από την άλλη.

[1] Η εμφάνιση των Newton και Leibniz περί το 1675 χαρακτηρίζεται από την ταυτόχρονη περίπου απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού και την τόσο θεωρητική όσο και υπολογιστική σύνδεση του Ολοκληρωτικού Λογισμού με τον Διαφορικό Λογισμό.Συνέπεια αυτού θα είναι ο Ολοκληρωτικός Λογισμός να ενταχθεί στον Απειροστικό Λογισμό όπου κυρίαρχη έννοια τείνει να είναι η διαφόριση και όπου το ολοκλήρωμα είναι απλώς το αντίστροφο της παραγώγου.Η υπολογιστική δύναμη αυτού του νέου εργαλείου,που σχετίζει τη διαφόριση με το ολοκλήρωμα του Απειροστικού Λογισμού,και η χρησιμότητά του στις φυσικές εφαρμογές,είχε εκθαμβωτική αποτελεσματικότητα,ιδίως σε σύγκριση με την ακαμψία που χαρακτήριζε τη μέθοδο της εξάντλησης και όλων των συναφών μεθόδων ολοκλήρωσης,που είχαν αναπτυχθεί μέχρι τότε,ώστε σύντομα επικράτησε,δημιουργώντας ένα απότομο και πολυσήμαντο ρήγμα σε μία παράδοση ανάπτυξης της Ολοκλήρωσης δύο χιλιάδων ετών.//

Μια συνάρτηση φραγμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

Θα ασχοληθούμε με την κλάση των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ που είναι φραγμένες οπότε είναι ολοκληρώσιμες.

[1] Απόσπασμα από το βιβλίο «Απειροστικός Λογισμός» των Νεγρεπόντη-Γιωτόπουλου-Γιαννακούλα.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

1ο Θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α ένας σταθερός αριθμός από το Δ τότε: Ορίζεται η συνάρτηση $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt, \chi\in\Delta$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $F'(\chi)=f(\chi)$,για κάθε $\chi\in\Delta$.

Απόδειξη.

Αφού η f είναι συνεχής στο Δ και $\alpha\in\Delta$ για κάθε $\chi\in\Delta$ ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$.

Έστω τυχαίο $\chi_0\in\Delta$.Για $\chi\in\Delta$ με $\chi\neq\chi_0$ έχουμε:

$$\frac{F(\chi)-F(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\frac{\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt-\int_{\alpha}^{\chi_0} f(t)dt}{\chi-\chi_0}=\frac{\int_{\chi_0}^{\alpha} f(t)dt+\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt}{\chi-\chi_0}=\frac{\int_{\chi_0}^{\chi} f(t)dt}{\chi-\chi_0} \quad (1).$$

● Έστω ότι το χ_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ.

Αν $\chi_0<\chi$,στο διάστημα $[\chi_0,\chi]$ η f είναι συνεχής οπότε στο διάστημα αυτό θα παρουσιάζει μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή.Δηλαδή υπάρχουν $t_1,t_2\in[\chi_0,\chi]$ τέτοια ώστε: Για κάθε $t\in[\chi_0,\chi]$, $f(t_1)\le f(t)\le f(t_2)\Rightarrow\int_{\chi_0}^{\chi} f(t_1)\,\mathrm{dt}\le\int_{\chi_0}^{\chi} f(t)dt\le\int_{\chi_0}^{\chi} f(t_2)dt\Leftrightarrow$

$$(\chi-\chi_0)f(t_1)\le\int_{\chi_0}^{\chi} f(t)dt\le(\chi-\chi_0)f(t_2)\Leftrightarrow f(t_1)\le\frac{\int_{\chi_0}^{\chi} f(t)dt}{\chi-\chi_0}\le f(t_2) \quad (2).$$

Περίπτωση 1η: $f(t_1)=\dfrac{\int_{\chi_0}^{\chi} f(t)dt}{\chi-\chi_0}$ ή $f(t_2)=\dfrac{\int_{\chi_0}^{\chi} f(t)dt}{\chi-\chi_0}$.

Περίπτωση 2η: $f(t_1)<\dfrac{\int_{\chi_0}^{\chi} f(t)dt}{\chi-\chi_0}<f(t_2)$.Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $t_0\in(t_1,t_2)$ τέτοιο ώστε $f(t_0)=\dfrac{\int_{\chi_0}^{\chi} f(t)dt}{\chi-\chi_0}$.

Συνοψίζοντας υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_\chi\in[\mathrm{t}_1,t_2]\subseteq[\chi_0,\chi]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi_\chi)=\dfrac{\int_{\chi_0}^{\chi} f(t)dt}{\chi-\chi_0}$.

Η (1) γράφεται $\dfrac{F(\chi)-F(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=f(\xi_\chi)$. Είναι $\chi_0<\xi_\chi<\chi$.Όταν $\chi\to\chi_0^{+}$ τότε $\xi_\chi\to\chi_0^{+}$.

$$\lim_{\chi\to\chi_0^+}\frac{F(\chi)-F(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\lim_{\chi\to\chi_0^+} f(\xi_\chi)\underset{\omega\to\chi_0^+}{\overset{\xi_\chi=\omega}{=}}\lim_{\omega\to\chi_0^+} f(\omega)=f(\chi_0)$$,αφού η f είναι συνεχής στο χ_0.

Όμοια εργαζόμαστε όταν $\chi < \chi_0$ και έχουμε $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^-} \dfrac{F(\chi)-F(\chi_0)}{\chi-\chi_0} = f(\chi_0)$.

● Αν το χ_0 είναι άκρο του Δ το πλευρικό όριο του λόγου μεταβολής της F στο χ_0 συμπίπτει με το όριο του λόγου μεταβολής της F στο χ_0.

Έτσι είναι $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \dfrac{F(\chi)-F(\chi_0)}{\chi-\chi_0} = f(\chi_0)$.

Άρα η F είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $\chi_0 \in \Delta$ με $F'(\chi_0) = f(\chi_0)$,οπότε είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $F'(\chi) = f(\chi)$ για κάθε $\chi \in \Delta$.∎

Σημείωση: Η F ονομάζεται αρχική ή αντιπαράγωγος ή παράγουσα της f στο διάστημα Δ γιατί η παράγωγός της μας παράγει την αρχική συνάρτηση f.

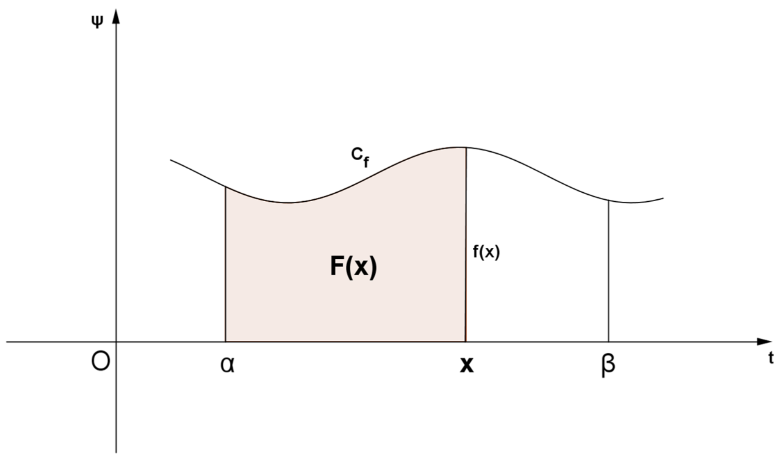
Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ,τότε έχει οπωσδήποτε στο Δ παράγουσα.Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Από το παραπάνω θεώρημα φαίνεται ότι η ολοκλήρωση και η παραγώγιση είναι πράξεις αντίστροφες.

Γεωμετρική Ερμηνεία

Έστω ότι $f(\mathrm{t}) \geq 0$ για κάθε $t \in [\alpha, \beta] \subseteq \Delta$ και $\chi \in (\alpha, \beta]$.

Η συνάρτηση $F(\chi)$, εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $t = \alpha$ και $t = \chi$. Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού όταν $t = \chi$ ισούται με $f(\chi)$.



Σχόλια - Επεκτάσεις

▶ **1.** Δεδομένου ότι το αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα Δ είναι το σύνολο των παραγουσών της f στο Δ,όταν η f είναι συνεχής στο Δ έχουμε: $\int f(\chi)\,\mathrm{d}\chi = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt + c, \chi \in \Delta$ όπου c αυθαίρετη σταθερά από το R.Προφανώς $\left(\int f(\chi)d\chi\right)' = f(\chi)$ και $\int f'(\chi)d\chi = f(\chi) + c$.

▶ **2. Γενικευμένα Ολοκληρώματα**

Μπορούμε να επεκτείνουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα στις παρακάτω περιπτώσεις:

● Αν $\chi \le \beta$ ή $\chi \ge \alpha$ και η f είναι συνεχής στα αντίστοιχα διαστήματα, τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{\chi}^{\beta} f(t)dt$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ τα συμβολίζουμε αντίστοιχα: $\int_{-\infty}^{\beta} f(t)dt$, $\int_{\alpha}^{+\infty} f(t)dt$ και τα ονομάζουμε $1^{ου}$ είδους γενικευμένα ολοκληρώματα της f.

Αξιοσημείωτο γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι η « συνάρτηση Γάμμα» $\Gamma(\chi) = \int_{0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \chi > 0$.

● Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta)$ και απειρίζεται όταν $\chi \to \beta^-$ το $\lim\limits_{\chi\to\beta^-}\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ το ονομάζουμε $2^{ου}$ είδους γενικευμένο ολοκλήρωμα της f και το συμβολίζουμε $\int_{\alpha}^{\beta^-} f(t)dt$.

Όμοια αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(\alpha,\beta]$ και απειρίζεται όταν $\chi \to \alpha^+$ το $\lim\limits_{\chi\to\alpha^+}\int_{\chi}^{\beta} g(t)dt$ το ονομάζουμε $2^{ου}$ είδους γενικευμένο ολοκλήρωμα της g και το συμβολίζουμε $\int_{\alpha^+}^{\beta} g(t)dt$.

✓ Τα γενικευμένα ολοκληρώματα αν υπάρχουν μπορεί να μην είναι πραγματικοί αριθμοί.Αν είναι πραγματικοί αριθμοί λέμε ότι συγκλίνουν είναι $\pm\infty$ λέμε ότι αποκλίνουν στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.Αν δεν υπάρχουν τα όρια λέμε ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα αποκλίνουν χωρίς τιμή.

✓ Αν η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[\alpha,\chi_0)\cup(\chi_0,\beta]$ και στο χ_0 πλευρικά απειρίζεται, τότε μιλάμε για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} h(\chi)d\chi = \int_{\alpha}^{\chi_0^-} h(\mathrm{x})d\chi + \int_{\chi_0^+}^{\beta} h(\chi)d\chi$ (1).

Από την (1) βρίσκουμε το $\int_{\alpha}^{\beta} h(\chi)d\chi$ εκτός της περίπτωσης που το 2^o μέλος της (1) μας οδηγεί σε απροσδιοριστία $(+\infty)+(-\infty)$ ή $(-\infty)+(+\infty)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\int_{\alpha}^{\beta} h(\chi)d\chi$ αποκλίνει χωρίς τιμή.

Σημείωση: Ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα μπορεί να είναι συνδυασμός γενικευμένων ολοκληρωμάτων $1^{ου}$ είδους και $2^{ου}$ είδους.Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για γενικευμένο ολοκλήρωμα $3^{ου}$

είδους,π.χ $\int_{0}^{+\infty}\ln\chi d\chi$, ($\int_{0}^{+\infty}\ln\chi d\chi=\int_{0^{+}}^{c}\ln\chi d\chi+\int_{c}^{+\infty}\ln\chi d\chi$,όπου c οποιαδήποτε σταθερά από το $(0,+\infty)$).

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει ένα πρώτο υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος και είναι ουσιαστικά πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος.

2^{o} Θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και G μια παράγουσα της f στο Δ.

Αν $\alpha,\beta\in\Delta$,τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt=G(\beta)-G(a)=\left[\mathrm{G}(\chi)\right]_{\alpha}^{\beta}$ (1).

Απόδειξη

Προφανώς αν $\alpha=\beta$ η (1) ισχύει.

Έστω $\alpha\neq\beta$.Η συνάρτηση $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt\,,\chi\in\Delta$ είναι παράγουσα της f στο Δ οπότε για κάθε $\chi\in\Delta$ είναι $F(\chi)=G(\chi)+c$ (2),όπου $c\in R$ αυθαίρετη σταθερά.

(2) $\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt=G(\chi)+c$ (3) για κάθε $\chi\in\Delta$.Για $\chi=\alpha$ από την (3) παίρνουμε $c=-G(\alpha)$.

(3) $\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt=G(\chi)-G(\alpha)$ (4) .Για $\chi=\beta$, (4) $\Rightarrow\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$. ∎

Σχόλιο: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(\alpha,\beta]$ και F μια παράγουσα της F στο $(\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha^{+}}^{\beta}f(\chi)\,\mathrm{d}\chi=\mathrm{F}(\beta)-\lim\limits_{x\to\alpha^{+}}F(\chi)$.

Όμοια με τις κατάλληλες προϋποθέσεις:

$\int_{\alpha}^{\beta^{-}}f(\chi)\,\mathrm{d}\chi=\lim\limits_{x\to\beta^{-}}F(\chi)-F(\alpha)$, $\int_{\alpha}^{+\infty}f(\chi)\,\mathrm{d}\chi=\lim\limits_{x\to+\infty}F(\chi)-F(\alpha)$, $\int_{-\infty}^{\beta}f(\chi)\,\mathrm{d}\chi=\mathrm{F}(\beta)-\lim\limits_{x\to-\infty}F(\chi)$

Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Ε Σ

1η. Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:
$\chi f'(\chi)-\chi^4 e^{\chi}=f(\chi)-\chi$ (1) για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$.Αν $f(1)=e$,να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

$$(1)\Leftrightarrow \chi f'(\chi)-f(\chi)+\chi=\chi^4 e^{\chi}\Leftrightarrow \frac{\chi f'(\chi)-f(\chi)}{\chi^2}+\frac{1}{\chi}=\chi^2 e^{\chi}\Leftrightarrow\left(\frac{f(\chi)}{\chi}+\ln\chi\right)'=\chi^2 e^{\chi}\ (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(\chi)=\int_1^{\chi} t^2 e^t dt, \chi>0$.Η F είναι μία παράγουσα της $\chi^2 e^{\chi}$ στο $(0,+\infty)$.

$F(\chi)=\int_1^{\chi}(e^t)' t^2\,dt=[e^t t^2]_1^{\chi}-\int_1^{\chi}2te^t\,dt=[e^t t^2]_1^{\chi}-2\int_1^{\chi}(e^t)'t\,dt=$

$[e^t t^2]_1^{\chi}-2\left([e^t t]_1^{\chi}-\int_1^{\chi}e^t\,dt\right)=[e^t t^2]_1^{\chi}-2[e^t t]_1^{\chi}+2[e^t]_1^{\chi}=$

$\chi^2 e^{\chi}-2\chi e^{\chi}+2e^{\chi}-e$.Παρατηρούμε ότι και η συνάρτηση $G(\chi)=\chi^2 e^{\chi}-2\chi e^{\chi}+2e^{\chi}$ είναι παράγουσα της $\chi^2 e^{\chi}$ στο $(0,+\infty)$.

Άρα (2)$\Leftrightarrow\left(\frac{f(\chi)}{\chi}+\ln\chi\right)'=(\chi^2 e^{\chi}-2\chi e^{\chi}+2e^{\chi})'\Leftrightarrow\frac{f(\chi)}{\chi}+\ln\chi=\chi^2 e^{\chi}-2\chi e^{\chi}+2e^{\chi}+c$ (3)

Για $\chi=1$ από την (3) παίρνουμε $f(1)=e+c\Leftrightarrow c=0$.

(3)$\Leftrightarrow f(\chi)=\chi^3 e^{\chi}-2\chi^2 e^{\chi}+2\chi e^{\chi}-\chi ln\chi, \chi>0$.

2η. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-\pi}^{\pi}f(\chi)\mathrm{d}\chi$ αν $f(\chi)=\begin{cases}\chi, -\pi\le\chi\le 0\\ \eta\mu\chi, 0<\chi\le\pi\end{cases}$.

Λύση

Εύκολα προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$,οπότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(\chi)d\chi=\int_{-\pi}^{0}f(\chi)d\chi+\int_0^{\pi}f(\chi)d\chi\ (1).$$

$$\int_{-\pi}^{0}f(\chi)d\chi=\int_{-\pi}^{0}\chi d\chi=\left[\frac{\chi^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi^2}{2}.$$

Η συνάρτηση $\int_{\chi}^{\pi}f(t)dt=-\int_{\pi}^{\chi}f(t)dt, \chi\in[-\pi,\pi]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη,οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{\chi}^{\pi}f(t)dt=\int_0^{\pi}f(t)dt=\int_0^{\pi}f(\chi)d\chi.$$

Για $\chi\in(0,\pi]$ $\int_{\chi}^{\pi}f(t)dt=\int_{\chi}^{\pi}\eta\mu tdt=[-\sigma\upsilon\nu t]_{\chi}^{\pi}=1+\sigma\upsilon\nu\chi$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\int_{\chi}^{\pi} f(t)dt = \lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sigma\upsilon\nu\chi) = 2 \Rightarrow \int_0^{\pi} f(\chi)d\chi = 2$.

Άρα $(1) \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(\chi)d\chi = 2-\dfrac{\pi^2}{2}$.

3η. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: α) $I_1 = \int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\chi\sqrt{\chi}}d\chi$ **, β)** $I_2 = \int_{0^+}^{3}\dfrac{1}{\chi}d\chi$

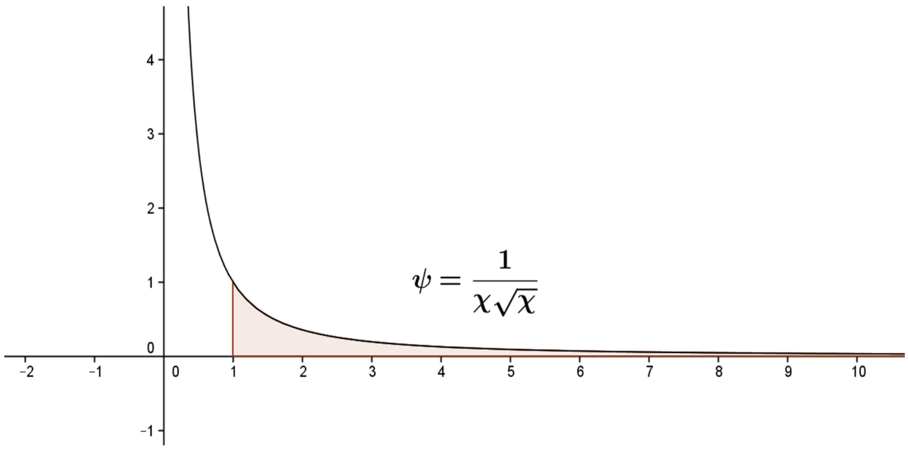
γ) $I_3 = \int_{0^+}^{1}\ln\chi d\chi$ **, δ)** $I_4 = \int_{-1}^{4}\dfrac{1}{\chi-2}d\chi$ **.**

Λύση

α) Η συνάρτηση $f(\chi) = \dfrac{1}{\chi\sqrt{\chi}}, \chi\in[1,+\infty)$ είναι συνεχής.Το I_1 είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα $1^{ου}$ είδους.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(\chi) = \int_1^{\chi}\dfrac{1}{t\sqrt{t}}dt, \chi\in[1,+\infty)$. $\dfrac{1}{\chi\sqrt{\chi}} = \chi^{-\frac{3}{2}}$,οπότε μία παράγουσα της f είναι η $\dfrac{\chi^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{\chi}}$. $F(\chi) = \left[-\dfrac{2}{\sqrt{t}}\right]_1^{x} = -\dfrac{2}{\sqrt{\chi}}+2$.

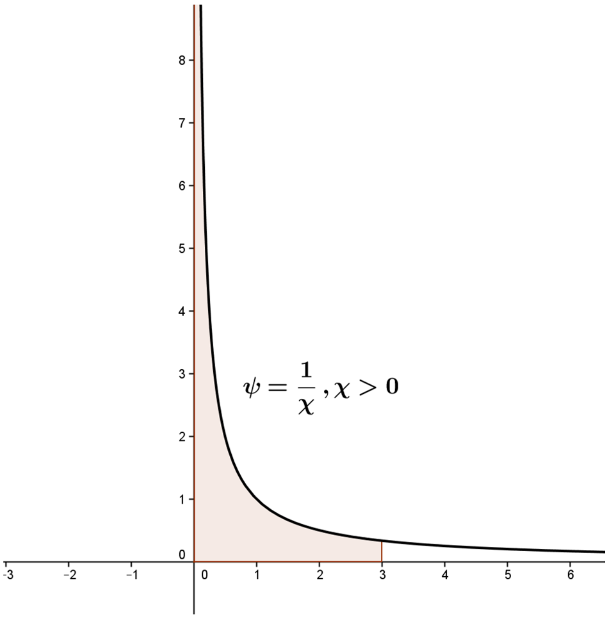
$I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}F(\chi) = 2$.(Το I_2 συγκλίνει στο 2)



Το I_1 εκφράζει το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από την $\psi = \dfrac{1}{\chi\sqrt{\chi}}$, τον άξονα $\chi'\chi$ και την ευθεία $\chi = 1$.

β) Η συνάρτηση $f(\chi) = \dfrac{1}{\chi}, \chi\in(0,3]$ είναι συνεχής και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\chi} = +\infty$,το I_2 είναι ολοκλήρωμα $2^{ου}$ είδους.Η συνάρτηση $F(\chi) = \ln\chi, \chi\in(0,3]$ είναι μία παράγουσα της f στο $(0,3]$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}F(\chi) = +\infty$. Άρα $I_2 = \lim\limits_{x\to 0^+}F(\chi) = +\infty$.(Το I_2 αποκλίνει στο $+\infty$)



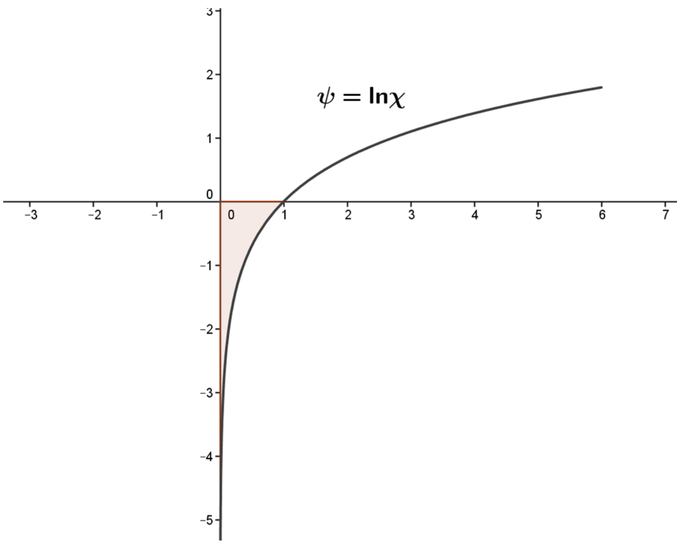
γ) Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το I_3 είναι ολοκλήρωμα $2^{ου}$ είδους.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(\chi) = \int_{\chi}^{1} \ln t dt, \chi \in (0,1]$.

$F(\chi) = \int_{\chi}^{1} (t)' \ln t dt = [t \ln t]_{\chi}^{1} - \int_{\chi}^{1} 1 dt = -\chi \ln \chi + \chi - 1$.

$$\lim_{x \to 0^+} (\chi \ln \chi) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \chi}{\frac{1}{\chi}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln \chi)'}{\left(\frac{1}{\chi}\right)'} = \lim_{x \to 0^+} (-\chi) = 0 .$$

Άρα $\mathrm{I}_3 = \lim_{\chi \to 0^+} F(\chi) = -1$.(Το I_3 συγκλίνει στο -1)



Η απόλυτη τιμή του I_3 δηλαδή $|\mathrm{I}_3| = 1$ εκφράζει το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση του $\ln$ τον άξονα $\chi'\chi$,την ευθεία $\chi = 1$ και την ασύμπτωτη $\chi = 0$.

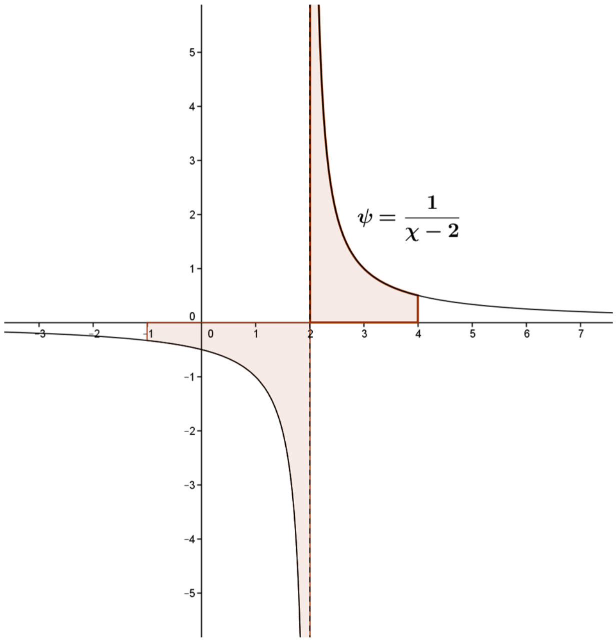
δ) Η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{1}{\chi-2}, \chi\in[-1,2)\cup(2,4)$ είναι συνεχής με $\lim\limits_{x\to 2^-} f(\chi)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(\chi)=+\infty$.

Θεωρούμε τις συνάρτηση $F(\chi)=\int_{-1}^{\chi}\dfrac{1}{t-2}dt, \chi\in[-1,2), \mathrm{G}(\chi)=\int_{\chi}^{4}\dfrac{1}{t-2}dt, \chi\in(2,4]$.

$F(\chi)=\left[\ln|t-2|\right]_{-1}^{\chi}=\ln|\chi-2|-\ln 3$. $\lim\limits_{x\to 2^-} F(\chi)=-\infty \Rightarrow \int_{-1}^{2^-}\dfrac{1}{\chi-2}=-\infty$.

$G(\chi)=\left[\ln|t-2|\right]_{\chi}^{4}=\ln 2-\ln|\chi-2|$. $\lim\limits_{x\to 2^+}\mathrm{G}(\chi)=+\infty \Rightarrow \int_{2^+}^{4}\dfrac{1}{\chi-2}d\chi=+\infty$.

Άρα το I_4 αποκλίνει χωρίς τιμή.



4^{η}: Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ είναι συνεχής με $f(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=\int_1^{ln\chi} f(e^t)dt$.
α. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.
ii. Να λύσετε την εξίσωση $g(\chi)=0$.
β. Έστω ότι $f(1)<0$. Αν $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=e$,επίσης $E(\Omega_1)$ το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=e$,δείξτε ότι:
i. $g(1)=E(\Omega_1)-E(\Omega)$.
ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,+\infty)$ τέτοιο,ώστε $(e-1)f(\xi)=\xi[E(\Omega)-E(\Omega_1)]$.

Λύση

α. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(\chi)=\int_1^{\chi} f(e^t)dt$ και τη συνάρτηση $h(t)=f(e^t)$.Για το πεδίο ορισμού της h πρέπει $e^t>0$ που ισχύει για κάθε $t\in R$.Άρα $D_h=R$.
Η h είναι συνεχής στο R και επειδή $1\in R$ το πεδίο ορισμού της F είναι $D_F=R$.
$g(\chi)=F(ln\,\chi)$.

Για το πεδίο ορισμού της g πρέπει: $\begin{cases} \chi > 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ ln\chi \in D_F \end{cases} \Leftrightarrow \chi > 0.$

Άρα $D_g = (0, +\infty)$.

ii. Παρατηρούμε ότι $g(e) = 0$.Για κάθε $\chi \in (0, +\infty)$ είναι $g'(\chi) = \frac{1}{\chi} f(e^{ln\chi}) = \frac{f(\chi)}{\chi} \neq 0$.
Επιπλέον στο $(0, +\infty)$ η g' είναι συνεχής,οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο.Άρα η g είναι γνησίως μονότονη .Συνεπώς το e είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(\chi) = 0$.

β. i. Αν $f(1) < 0$ είναι $g'(1) < 0$ και αφού η g' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ είναι $g'(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in (0, +\infty)$.Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.
$1 \leq \chi \leq e \Rightarrow g(\chi) \geq g(e) = 0$.Είναι $E(\Omega) = \int_1^e g(\chi)d\chi$.
Επίσης η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και αφού $f(1) < 0$ είναι $f(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in (0, +\infty)$.
Άρα $E(\Omega_1) = -\int_1^e f(\chi)d\chi$.
$E(\Omega) = \int_1^e g(\chi)d\chi = \int_1^e (\chi)' g(\chi)d\chi = [\chi g(\chi)]_1^e - \int_1^e f(\chi)d\chi = -g(1) + E(\Omega_1) \Leftrightarrow g(1) = E(\Omega_1) - E(\Omega)$.

ii. Η g συνεχής στο $[1, e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ με
$g'(\chi) = \frac{f(\chi)}{\chi}$.Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον
$\xi \in (1, e) \subseteq (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε:
$g'(\xi) = \frac{g(e)-g(1)}{e-1} \Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi} = -\frac{g(1)}{e-1} \overset{(i)}{\Leftrightarrow} (e-1)f(\xi) = \xi[E(\Omega) - E(\Omega_1)]$.