ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Στο παρακάτω άρθρο θα αναφερθούμε σε μερικά αξιοσημείωτα σημεία της Γεωμετρίας του τριγώνου χωρίς να εξαντλήσουμε το θέμα,από ένα σύνολο σημείων που το καθένα τους έχει ξεχωριστή θέση στην Ευκλείδια Γεωμετρία.

I

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κύκλος Euler ή κύκλος των εννέα σημείων

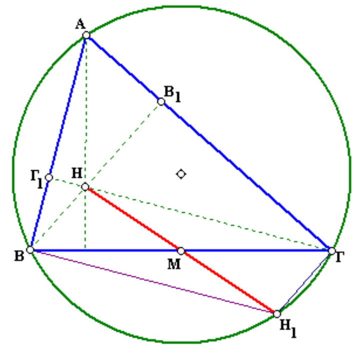
Θεώρημα

Α. Τα συμμετρικά σημεία του ορθοκέντρου τριγώνου ως προς τα μέσα των πλευρών του βρίσκονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.

Β. Το συμμετρικά σημεία του ορθοκέντρου τριγώνου ως προς τις πλευρές του βρίσκονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.

Απόδειξη

Α.

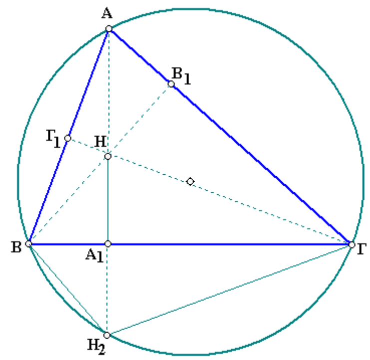


Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

$\widehat{H\Gamma_1 A} + \widehat{HB_1 A} = 2\llcorner$.Άρα το τετράπλευρο $A\Gamma_1 HB_1$ είναι εγγράψιμο,οπότε $\hat{A} + \widehat{\Gamma_1 HB_1} = 2\llcorner \Leftrightarrow \hat{A} + \widehat{BH\Gamma} = 2\llcorner$ (1).

Έστω H_1 το συμμετρικό του H ως προς το μέσο M του $B\Gamma$.Το τετράπλευρο $BH\Gamma H_1$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιές του διχοτομούνται.Άρα $\widehat{BH_1\Gamma} = \widehat{BH\Gamma}$,οπότε από την (1) έχουμε $\hat{A} + \widehat{BH_1\Gamma} = 2\llcorner$,δηλαδή το τετράπλευρο $ABH_1\Gamma$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο,ο οποίος είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\Gamma$.

Β.



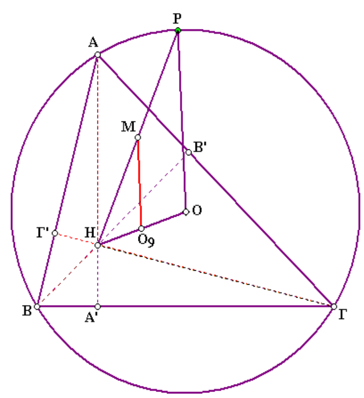
Έστω H_2 το συμμετρικό του ορθοκέντρου H ως προς την $B\Gamma$.Τα τρίγωνα $BHH_2, \Gamma HH_2$ είναι ισοσκελή αφού η $B\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του HH_2,οπότε $\widehat{BH_2H} = \widehat{BHH_2}$ και $\widehat{\Gamma H_2H} = \widehat{\Gamma HH_2}$.Άρα $\widehat{BH_2\Gamma} = \widehat{BH\Gamma}$ ως άθροισμα ίσων γωνιών.

Το τετράπλευρο $A\Gamma_1HB_1$ είναι εγγράψιμο οπότε $\hat{A} + \widehat{\Gamma_1HB_1} = 2\llcorner \Leftrightarrow \hat{A} + \widehat{BH\Gamma} = 2\llcorner \Leftrightarrow \hat{A} + \widehat{BH_2\Gamma} = 2\llcorner$.Άρα το τετράπλευρο $ABH_2\Gamma$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο,ο οποίος είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\Gamma$.

Θεώρημα

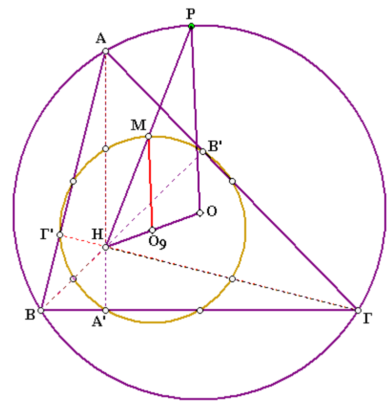
Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$.Τα ίχνη των υψών του τριγώνου,τα μέσα των πλευρών του και τα μέσα των αποστάσεων του ορθοκέντρου από τις κορυφές του τριγώνου είναι σημεία ενός κύκλου.Ο κύκλος αυτός ονομάζεται κύκλος των εννέα σημείων ή κύκλος Euler.

Απόδειξη



Έστω H το ορθόκεντρο και P τυχαίο σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου (O,R) του τριγώνου $AB\Gamma$.Ας είναι M, O_9 τα μέσα των τμημάτων HP και HO αντίστοιχα.Στο τρίγωνο HOP έχουμε $O_9M = \frac{1}{2}OP \Leftrightarrow O_9M = \frac{1}{2}R$.Άρα το M είναι σημείο του κύκλου $(O_9, \frac{1}{2}R)$.

__**Αντίστροφα:**__ Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο O_9,το μέσο του HO και ακτίνα $\frac{R}{2}$.



Αν M τυχαίο σημείο του κύκλου $(O_9, \frac{1}{2}R)$ και P το σημείο που το HM τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$,τότε στο τρίγωνο HOP έχουμε $O_9M = \frac{OP}{2}$ και αφού O_9 είναι μέσο του τμήματος HO,το M είναι μέσο του τμήματος HP.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του μέσου των τμημάτων HP με P σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ο κύκλος $(O_9, \frac{1}{2}R)$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα,τα μέσα των πλευρών και τα ίχνη των υψών του τριγώνου $AB\Gamma$,οφείλουν να βρίσκονται πάνω στον κύκλο $(O_9, \frac{1}{2}R)$.

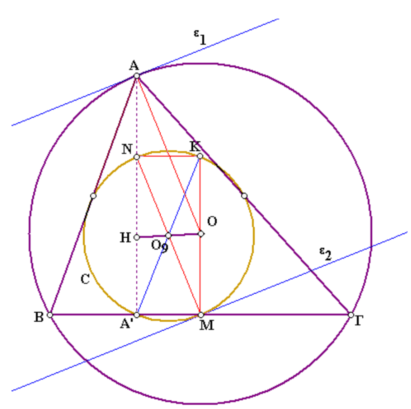
Τελικά τα μέσα των τμημάτων $HA, HB, H\Gamma$,τα μέσα των πλευρών του τριγώνου καθώς και τα ίχνη των υψών του είναι ομοκυκλικά σημεία.

Παρατήρηση 1. Το κέντρο του κύκλου Euler είναι το μέσο του τμήματος που ορίζεται από το ορθόκεντρο του τριγώνου και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου,η δε ακτίνα του είναι το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Παρατήρηση 2.

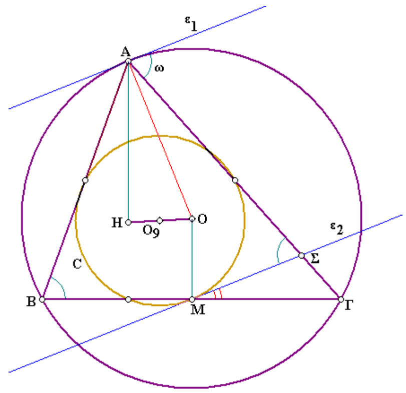
α. Η εφαπτομένη του κύκλου Euler στο μέσο μιας πλευράς του τριγώνου είναι παράλληλη στην εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου στην απέναντι απέναντι κορυφή του τριγώνου.

Πράγματι:



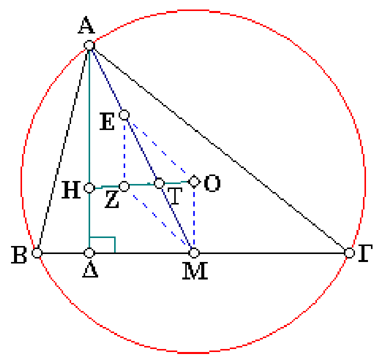
Έστω C ο κύκλος Euler,H το ορθόκεντρο του τριγώνου και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.Επίσης O_9, O τα κέντρα του C και του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εφαπτομένες του περιγεγραμμένου κύκλου και του C στα σημεία A, M αντίστοιχα.

Φέρνουμε τη διάμετρο $A'K$ του C.Επειδή $\widehat{A'MO} = 1∟$ το OM διέρχεται από το K.Το τετράπλευρο $NA'MK$ προφανώς είναι ορθογώνιο,οπότε το MN είναι διάμετρος του C.
Το N είναι μέσο του HA και το O_9 είναι μέσο του HO.Άρα $NO_9//AO \Rightarrow NM//AO$.
Είναι $\varepsilon_1//\varepsilon_2$ ως κάθετες ευθείες σε παράλληλα τμήματα.
<u>**Παρατήρηση:**</u> $AH = 2OM$.Επίσης αν $\hat{B} > \hat{\Gamma}$,τότε $\widehat{\Sigma M\Gamma} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$,όπου Σ το σημείο τομής της ε_2 με την $A\Gamma$.



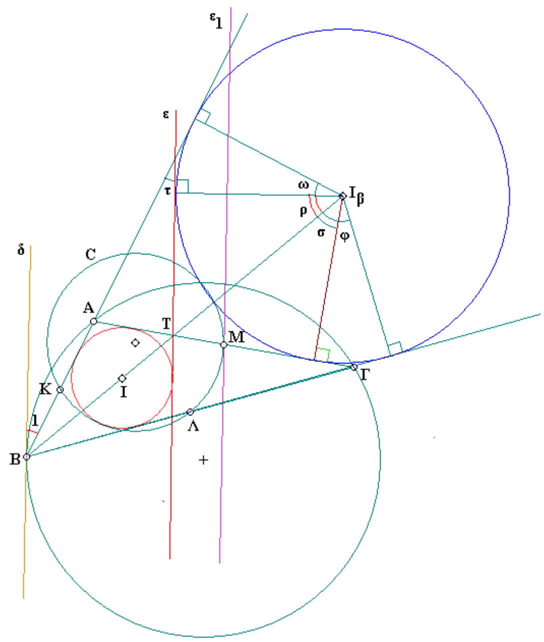
Πράγματι: Αφού $\varepsilon_1//\varepsilon_2$ είναι $\widehat{M\Sigma A} = \hat{\omega} = \hat{B} \Rightarrow \widehat{\Sigma M\Gamma} + \hat{\Gamma} = \hat{B} \Leftrightarrow \widehat{\Sigma M\Gamma} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

β. Αν G το κέντρο βάρους,H το ορθόκεντρο και O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$,τότε το G είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος HO και ισχύει $HG = 2GO$.
Πράγματι:



Αν T το σημείο τομής της διαμέσου AM με το HO,το T είναι εσωτερικό σημείο του HO.Έστω E, Z τα μέσα των AT, HT αντίστοιχα.Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το τετράπλευρο $EZMO$ είναι παραλληλόγραμμο $(EZ//=\frac{AH}{2}$ και $OM//=\frac{AH}{2})$.Άρα $TM = TE = EA \Rightarrow TM = \frac{1}{3}AM$,οπότε το T ταυτίζεται με το κέντρο βάρους G του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι $HG = 2GZ \Rightarrow HG = 2GO$.
Η ευθεία GO ονομάζεται ευθεία Euler.

<u>Παρατήρηση</u> **3. Μία εσωτερική κοινή εφαπτομένη του εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου είναι παράλληλη στην εφαπτομένη του κύκλου Euler στο μέσο της πλευράς του τριγώνου που είναι η δεύτερη κοινή εσωτερική εφαπτομένη.**
Πράγματι:



Έστω ε_1 η εφαπτομένη του κύκλου Euler C στο μέσο M της $A\Gamma$, ε κοινή εσωτερική εφαπτομένη του εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και δ εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου στο B.

Έχουμε $\widehat{\omega}=\hat{\tau}$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες και για τον ίδιο λόγο $\widehat{\varphi}=\widehat{\Gamma}$.

$\widehat{\omega}+\widehat{\rho}=\widehat{\sigma}+\widehat{\varphi} \overset{\widehat{\rho}=\widehat{\sigma}}{\Longleftrightarrow} \widehat{\omega}=\widehat{\varphi} \Leftrightarrow \hat{\tau}=\widehat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\tau}=\widehat{B_1} \Rightarrow \varepsilon//\delta$.Όμως είναι $\varepsilon_1//\delta$ (παρατήρηση 2),οπότε $\varepsilon//\varepsilon_1$.

<u>Σημείωση:</u> Ο κύκλος των εννέα σημείων από λάθος αποδίδεται στον Euler.Το 1821 οι μαθηματικοί Brianchon και Poncelet είχαν περιγράψει τον κύκλο των εννέα σημείων.Το 1822 ο Γερμανός μαθηματικός Feuerbach ανακάλυψε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα του κύκλου αυτού (την αναφέρουμε παρακάτω ως θεώρημα Feurbach) και αμέσως μετά ο Γάλλος μαθηματικός Terquem απέδειξε και αυτός την ύπαρξη του κύκλου των εννέα σημείων.Έτσι ο κύκλος των εννέα σημείων ονομάζεται και κύκλος Feuerbach καθώς και κύκλος Terquem.

<u>Σχόλιο</u>: Leonhard Euler (1707-1783),Ελβετός μαθηματικός με σημαντικές ανακαλύψεις σε ένα ευρύ φάσμα των μαθηματικών και της Φυσικής.

Ο Euler εισήγαγε τα κυριότερα αλγεβρικά σύμβολα που χρησιμοποιούμε και σήμερα,διέυρυνε την αναλυτική μέθοδο που εισήγαγε ο Καρτέσιος και την εφάρμοσε εκτός από τη Γεωμετρία και στην Μηχανική.Δημιούργησε την Υδροδυναμική και τα μαθηματικά πεδία της θεωρίας των Γράφων και Λογισμού μεταβολών,περιέγραψε μαθηματικά την πολύπλοκη κίνηση της σβούρας και συνέβαλε αποφασιστικά στη θεωρία αριθμών,θεωρία άπειρων σειρών και στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.

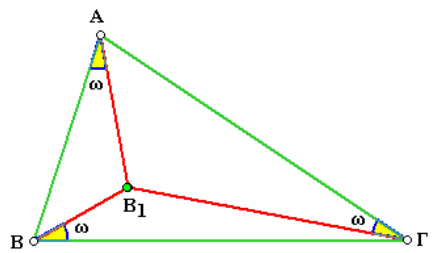
$\boxed{II}$

1. Σημεία Brocard

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$.Υπάρχει ακριβώς ένα σημείο B_1 εσωτερικό του τριγώνου έτσι ώστε να ισχύει $\widehat{B_1AB} = \widehat{B_1\Gamma A} = \widehat{B_1B\Gamma}$.
Το σημείο B_1 ονομάζεται πρώτο σημείο Brocard του τριγώνου $AB\Gamma$.

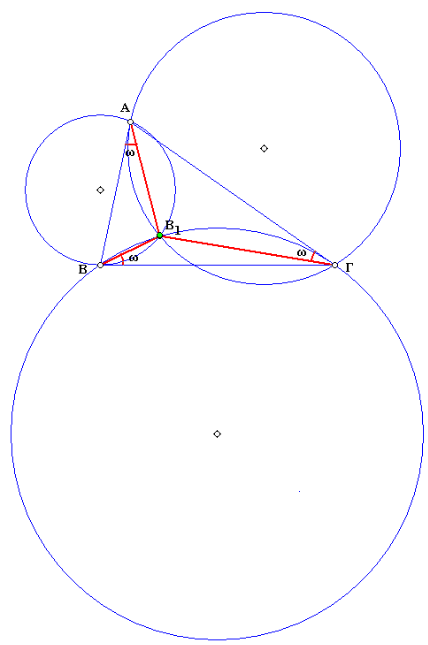
Απόδειξη

Ανάλυση:



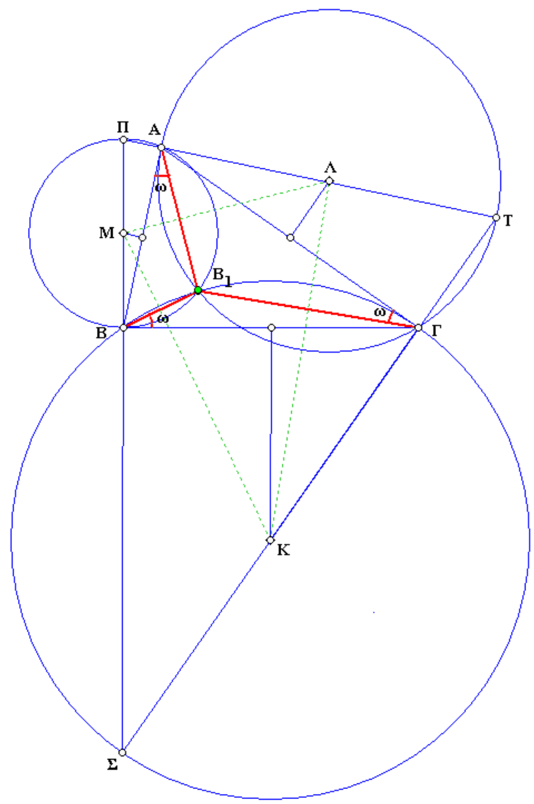
Υποθέτουμε ότι υπάρχει εσωτερικό σημείο B_1 του τριγώνου $AB\Gamma$ έτσι ώστε να ισχύει $\widehat{B_1B\Gamma} = \widehat{B_1\Gamma A} = \widehat{B_1AB} = \widehat{\omega}$.Τότε είναι $\widehat{BB_1\Gamma} = 180^0 - \widehat{\omega} - \widehat{B_1\Gamma B} = 180^0 - \widehat{\omega} - (\hat{\Gamma} - \widehat{\omega}) \Leftrightarrow \widehat{BB_1\Gamma} = 180^0 - \hat{\Gamma}$.Όμοια έχουμε $\widehat{AB_1\Gamma} = 180^0 - \hat{A}$ και $\widehat{AB_1B} = 180^0 - \hat{B}$.

Άρα το σημείο B_1 είναι η τομή τόξων κύκλων με χορδή $B\Gamma$,$A\Gamma$ $και$ AB που δέχονται γωνία $180^0 - \hat{\Gamma}$, $180^0 - \hat{A}$, $180^0 - \hat{B}$ αντίστοιχα.



Αφού $\widehat{B_1\Gamma A} = \widehat{B_1B\Gamma} = \widehat{\omega}$, η $A\Gamma$είναι εφαπτομένη στο Γ του κύκλου που έχει χορδή την $B\Gamma$.Όμοια οι πλευρές $B\Gamma, AB$ είναι εφαπτομένες των κύκλων που έχουν χορδές τις $AB, A\Gamma$,στα B και A αντίστοιχα.

Κατασκευή:



Σχ.1

Φέρνουμε καθέτους στις πλευρές του τριγώνου $ΑΒΓ$ στις κορυφές του οι οποίες τέμνονται στα σημεία $Σ, Τ, Π$.

Οι μεσοκάθετες των πλευρών του τριγώνου $ΑΒΓ$ τέμνουν τις προηγούμενες κάθετες στα $Κ, Λ, Μ$ τα οποία είναι μέσα των $ΣΓ, ΑΤ, ΒΠ$ αντίστοιχα (Σχ.1).

Κατασκευάζουμε τους κύκλους $(Κ, ΚΓ), (Λ, ΛΑ)$.Προφανώς ο πρώτος κύκλος διέρχεται από τα σημεία $Β, Γ, Σ$,εφάπτεται της $ΑΓ$ στο σημείο $Γ$ και ο δεύτερος διέρχεται από τα σημεία $Α, Γ, Τ$ και εφάπτεται της $ΑΒ$ στο σημείο $Α$.Έστω $Β_1$ το δεύτερο σημείο των κύκλων.Το $Β_1$ είναι το ζητούμενο σημείο.

Απόδειξη: Τα τετράπλευρα $ΒΣΓΒ_1, ΑΤΓΒ_1$ είναι εγγεγραμμένα στους αντίστοιχους κύκλους,οπότε $\widehat{ΠΒΒ_1} = \widehat{ΣΓΒ_1}$ και $\widehat{ΠΑΒ_1} = \widehat{Β_1ΓΤ}$, $\widehat{ΠΒΒ_1} + \widehat{ΠΑΒ_1} = \widehat{ΣΓΒ_1} + \widehat{Β_1ΓΤ} = 180^0$.Άρα το τετράπλευρο $ΑΒ_1ΒΠ$ είναι εγγράψιμο,οπότε ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΑΒ_1Β$ διέρχεται από το $Π$ και αφού $\widehat{ΠΑΒ} = 90^0$ η $ΒΠ$ είναι διάμετρος του κύκλου του οποίου το κέντρο είναι το σημείο τομής της $ΒΠ$ με τη μεσοκάθετο της πλευράς $ΑΒ$ δηλαδή το $Μ$.Ο κύκλος $(Μ, ΜΒ)$ εφάπτεται της πλευράς $ΒΓ$ στο $Β$.

Έχουμε $\widehat{Β_1ΑΒ} = \widehat{Β_1ΒΓ}$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης).Όμοια $\widehat{Β_1ΓΑ} = \widehat{Β_1ΒΓ}$.

Άρα έχουμε $\widehat{Β_1ΑΒ} = \widehat{Β_1ΓΑ} = \widehat{Β_1ΒΓ} = \widehat{ω}$.

Διερεύνηση: Οι κύκλοι $(Λ, ΛΑ), (Κ, ΚΓ)$ τέμνονται και το δεύτερο κοινό τους σημείο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $ΑΒΓ$.Πράγματι: Το τόξο χορδής $ΒΓ$ που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $(ΒΓ, Α)$ και το τόξο χορδής $ΑΓ$ που περιέχεται στο ημιεπίπεδο $(ΑΓ, Β)$ ένα μέρος τους εξ'ολοκλήρου βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο (αφού οι αντίστοιχοι κύκλοι εφάπτονται των $ΑΓ$ στο $Γ$ και $ΑΒ$ στο $Α$ αντίστοιχα).Επειδή τα άκρα των τόξων είναι εκατέρωθεν του άλλου τόξου θα έχουν κοινό σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου.Άρα το πρόβλημα έχει πάντα λύση.

<u>Βασική ιδιότητα</u>

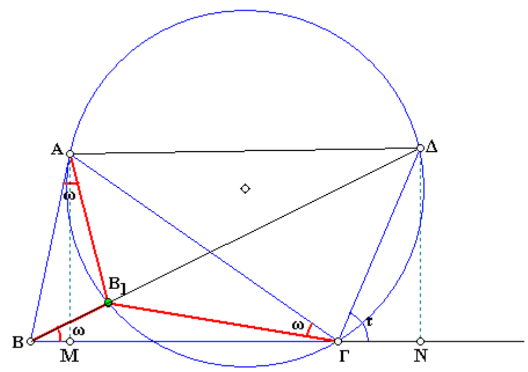
Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και B_1 το πρώτο σημείο Brocard του τριγώνου.Είναι $\widehat{B_1AB} = \widehat{B_1ΓA} = \widehat{B_1BΓ} = ω$ τότε ισχύουν:

I. $σφω = σφA + σφB + σφΓ$.

ii. $σφω = \frac{α^2+β^2+γ^2}{4(ΑΒΓ)}$,όπου $α, β, γ$ οι πλευρές του τριγώνου.

Απόδειξη

i.



Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB_1Γ$ εφάπτεται της πλευράς AB στο A (βλέπε κατασκευή του B_1) και η BB_1 τέμνει τον κύκλο στο $Δ$.

Έστω M, N οι προβολές των $A, Δ$ πάνω στην $BΓ$.

$\widehat{AΔB_1} = \widehat{BAB_1} = \widehat{ω}$ (χορδής και εφαπτομένης),οπότε $AΔ//BΓ$.

$\widehat{BAΓ} = \widehat{AΔΓ}$ (χορδής και εφαπτομένης)$\Rightarrow \hat{A} = \hat{τ}$.

Το τετράπλευρο $AMNΔ$ είναι ορθογώνιο,οπότε $AM = ΔN$.

Στο τρίγωνο $NΔB$: $σφω = \frac{BN}{ΔN} = \frac{BM+MΓ+ΓN}{ΔN} = \frac{BM}{ΔN} + \frac{MΓ}{ΔN} + \frac{ΓN}{ΔN} = \frac{BM}{AM} + \frac{MΓ}{AM} + \frac{ΓN}{ΔN} = σφB + σφΓ + σφτ \Leftrightarrow$ $σφω = σφA + σφB + σφΓ$.

ii. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$: Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε: $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνA \Leftrightarrow συνA = \frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ}$.

Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε: $\frac{α}{ημA} = 2R \Leftrightarrow ημA = \frac{α}{2R}$,όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΑΒΓ$.

$σφA = \frac{συνA}{ημA} \Leftrightarrow σφA = \frac{R(β^2+γ^2-α^2)}{αβγ}$.Όμοια έχουμε $σφB = \frac{R(α^2+γ^2-β^2)}{αβγ}$ και $σφΓ = \frac{R(α^2+β^2-γ^2)}{αβγ}$.

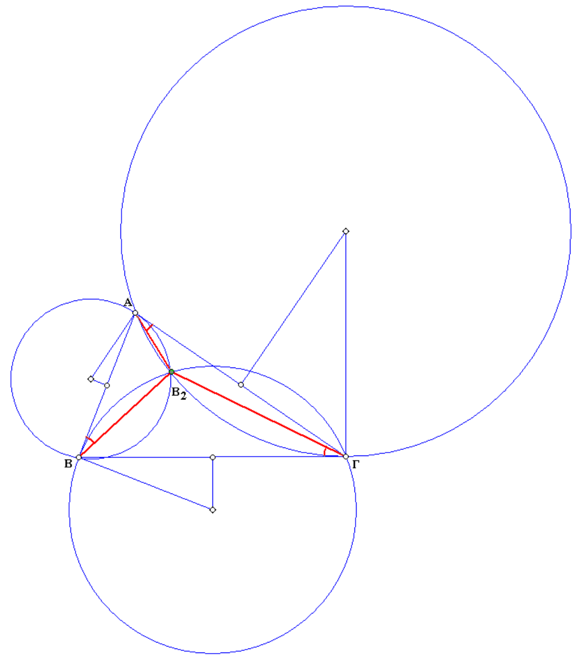
Για το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ έχουμε: $(ΑΒΓ) = \frac{αβγ}{4R}$.

$$σφA + σφB + σφΓ = \frac{R(β^2+γ^2-α^2) + R(α^2+γ^2-β^2) + R(α^2+β^2-γ^2)}{αβγ} = \frac{R(α^2+β^2+γ^2)}{αβγ} \Leftrightarrow$$

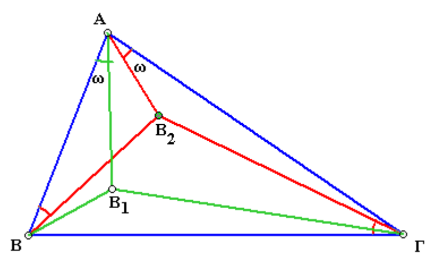
$σφA + σφB + σφΓ = \frac{α^2+β^2+γ^2}{4\frac{αβγ}{4R}} = \frac{α^2+β^2+γ^2}{4(ΑΒΓ)}$ και με βάση το (i) είναι $σφω = \frac{α^2+β^2+γ^2}{4(ΑΒΓ)}$.

<u>Σημείωση:</u>

1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ υπάρχει ακριβώς ένα εσωτερικό σημείο B_2 για το οποίο ισχύει $\widehat{B_2AΓ} = \widehat{B_2ΓB} = \widehat{B_2BA}$.Το B_2 ονομάζεται δεύτερο σημείο Brocard του τριγώνου $ΑΒΓ$ και προσδιορίζεται όπως το B_1.



2. Αν $\widehat{B_2 A\Gamma} = \widehat{B_2 \Gamma B} = \widehat{B_2 BA} = \omega'$ και $\widehat{B_1 AB} = \widehat{B_1 \Gamma A} = \widehat{B_1 B\Gamma} = \omega$ έχουμε:
$\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma$ και $\sigma\varphi\omega' = \sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma$,οπότε $\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi\omega' \Rightarrow \omega = \omega'$.
Η γωνία ω ονομάζεται γωνία Brocard του τριγώνου $AB\Gamma$.



3. Αν ω η γωνία Brocard ενός τριγώνου τότε είναι $0 < \omega \leq \frac{\pi}{6}$ με $\omega = \frac{\pi}{6}$ όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.Αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο τα σημεία Brocard του τριγώνου ταυτίζονται με το κέντρο βάρους του τριγώνου.

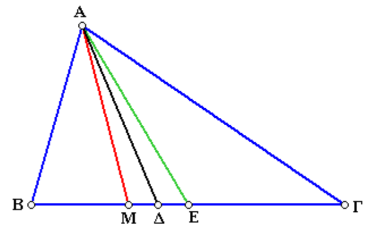
4. Το τρίγωνο $K\Lambda M$ (Σχ.1) είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και έχει ίδιο το πρώτο σημείο Brocard με το πρώτο σημείο Brocard του $AB\Gamma$.Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το δεύτερο σημείο Brocard του τριγώνου $K\Lambda M$.

Σχόλιο: Henri Brocard (1865 – 1867),Γάλλος στρατιωτικός – μαθηματικός και όχι μόνο με μεγάλη συνισφορά στη γεωμετρία του τριγώνου.Ο Brocard έφτασε στην ανακάλυψη των σημείων που φέρουν το όνομά του από τη μελέτη του προβλήματος των τριών σκυλιών που κυνηγούν το ένα το άλλο.

2. Σημείο Lemoine

Βασικές γνώσεις

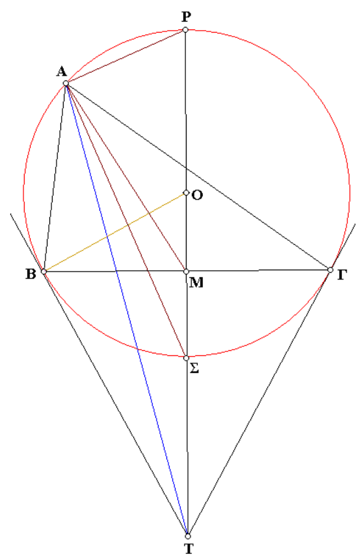
1.Ορισμός: Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta, AE$ διχοτόμος και διάμεσος αντίστοιχα του τριγώνου.
Αν M είναι το συμμετρικό σημείο του E ως προς το Δ,τότε το τμήμα AM ονομάζεται συμμετροδιάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ από τη κορυφή A.



- Προφανώς το τρίγωνο έχει τρεις συμμετροδιαμέσους.
- $\widehat{BAM} = \widehat{EA\Gamma}$.
- $\widehat{BAE} = \widehat{MA\Gamma}$.

Ιδιότητες της συμμετροδιαμέσου

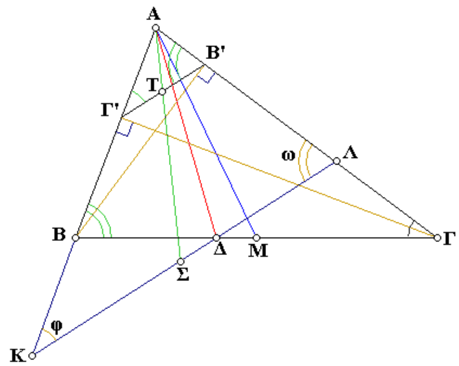
1η. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$.Η συμμετροδιάμεσος του τριγώνου από την κορυφή A διέρχεται από το σημείο τομής των εφαπτομένων του περιγεγραμμένου κύκλου στις κορυφές B, Γ του τριγώνου.
Απόδειξη



Έστω T το σημείο τομής των εφαπτομένων του περιγεγραμμένου κύκλου (O,R) στα σημεία B, Γ.
Το TO είναι μεσοκάθετος του $B\Gamma$ και τέμνει το κύκλο στα σημεία Σ, P.
Είναι $\frac{\Sigma M}{\Sigma T} = \frac{R-OM}{OT-R}$ και $\frac{PM}{PT} = \frac{R+OM}{R+OT}$.
$\frac{\Sigma M}{\Sigma T} = \frac{PM}{PT} \Leftrightarrow \frac{R-OM}{OT-R} = \frac{R+OM}{R+OT} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow R^2 = OM.OT \Leftrightarrow OB^2 = OM.OT$,που ισχύει λόγω του ορθογωνίου τριγώνου BOT.Άρα τα σημεία Σ, P είναι συζυγή αρμονικά των T, M,οπότε η $A\Sigma$ είναι εσωτερική διχοτόμος του τριγώνου ATM και επομένως η AT είναι συμμετροδιάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A.

2η. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $BB', \Gamma\Gamma'$.Η συμμετροδιάμεσος του τριγώνου από την κορυφή A διέρχεται από το μέσο του $\Gamma'B'$.

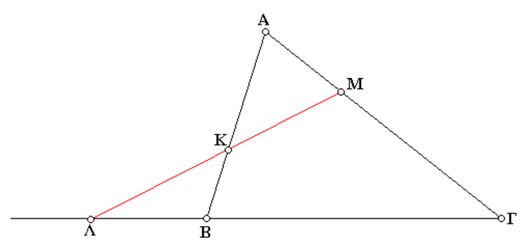
Απόδειξη



Έστω $AM, A\Delta$ η διάμεσος και η διχοτόμος αντίστοιχα του τριγώνου $AB\Gamma$.Από το Δ φέρνουμε παράλληλο προς την $\Gamma'B'$ που τέμνει τις πλευρές του τριγώνου στα K, Λ.
Το τετράπλευρο $B\Gamma'B'\Gamma$ είναι εγγράψιμο αφού $\widehat{B\Gamma'\Gamma} = \widehat{BB'\Gamma} = 90^0$.Άρα $\widehat{A\Gamma'B'} = \hat{\Gamma}$ και $\widehat{AB'\Gamma'} = \hat{B}$.
Όμως $\widehat{A\Gamma'B'} = \hat{\varphi}$ και $\widehat{AB'\Gamma'} = \hat{\omega}$.Άρα $\hat{\varphi} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\omega} = \hat{B}$.
Τα τρίγωνα $AB\Delta, A\Delta\Lambda$ είναι ίσα,αφού έχουν κοινή πλευρά την $A\Delta$,$\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Delta A\Lambda}$ και $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Delta\Lambda}$ (κριτήριο $\Gamma - \Pi - \Gamma$).Άρα $\Delta B = \Delta\Lambda$.Επίσης τα τρίγωνα $A\Delta K, A\Delta\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν κοινή πλευρά την $A\Delta$, $\widehat{KA\Delta} = \widehat{\Delta A\Gamma}$ και $\widehat{A\Delta K} = \widehat{A\Delta\Gamma}$ (κριτήριο $\Gamma - \Pi - \Gamma$).Άρα $\Delta K = \Delta\Gamma$.Έτσι έχουμε $B\Gamma = K\Lambda$.
Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AK\Lambda$ έχουν την $A\Delta$ κοινή διχοτόμο.Στρέφουμε την $B\Gamma$ γύρω από το Δ έτσι ώστε το Γ να συμπέσει με το K,τότε το B θα συμπέσει με το Λ.Το $B\Gamma$ θα ταυτιστεί με το $K\Lambda$,οπότε το μέσο M του $B\Gamma$ θα ταυτιστεί με το μέσο Σ του $K\Lambda$.Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα τρίγωνα $A\Delta M, A\Delta\Sigma$ είναι ίσα.΄Ετσι έχουμε ότι το $A\Sigma$ είναι συμμετρικό του AM ως προς την $A\Delta$.Συνεπώς η $A\Sigma$ είναι συμμετροδιάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A.Έστω T το σημείο τομής της $A\Sigma$ με το $\Gamma'B'$.Είναι $\frac{\Gamma'T}{K\Sigma} = \frac{TB'}{\Sigma\Lambda} \Rightarrow \Gamma'T = TB'$.Άρα το T είναι μέσο του $\Gamma'B'$.

2. Θεώρημα Μενελάου

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$.Αν K, Λ, M σημεία των πλευρών του $AB, B\Gamma, A\Gamma$ αντίστοιχα (ένα από τα τρία ή και τα τρία εξωτερικά σημεία των πλευρών) τότε ισχύει:

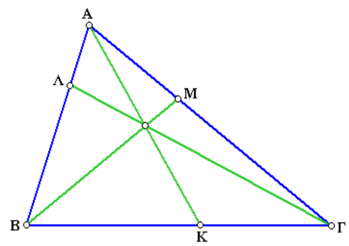


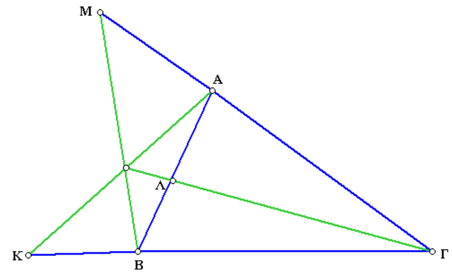
Τα σημεία K, Λ, M είναι συνευθειακά $\Leftrightarrow \frac{KA}{KB} \cdot \frac{\Lambda B}{\Lambda\Gamma} \cdot \frac{M\Gamma}{MA} = 1$.

● Η ευθεία ΛKM ονομάζεται διατέμνουσα του τριγώνου $AB\Gamma$.

3. Θεώρημα Ceva

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K, Λ, M στους φορείς των πλερών του τριγώνου με ένα ή και τα τρία να είναι εσωτερικά σημεία των πλευρών του τριγώνου.





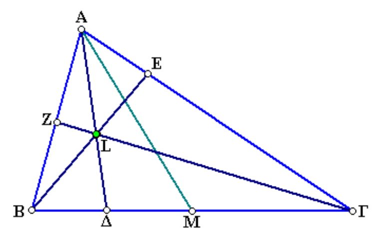
Ισχύει: Οι ευθείες $AK, BM, \Gamma\Lambda$ διέρχονται από το ίδιο σημείο $\Leftrightarrow \frac{KB}{K\Gamma}.\frac{M\Gamma}{MA}.\frac{\Lambda A}{\Lambda B} = 1.$

Τώρα μπορούμε να δούμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα

Οι συμμετροδιάμεσοι τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.Το σημείο αυτό ονομάζετα σημείο Lemoine του τριγώνου.

Απόδειξη



Έστω $A\Delta, BE, \Gamma Z$ οι συμμετροδιάμεσοι του τριγώνου $AB\Gamma$ και AM η διάμεσός του.

Έχουμε $\widehat{BA\Delta} = \widehat{MA\Gamma} \Rightarrow \frac{(AB\Delta)}{(AM\Gamma)} = \frac{AB.A\Delta}{AM.A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{B\Delta}{M\Gamma} = \frac{AB.A\Delta}{AM.A\Gamma}$ (1).

$\widehat{BAM} = \widehat{\Delta A\Gamma} \Rightarrow \frac{(BAM)}{(\Delta A\Gamma)} = \frac{AB.AM}{A\Delta.A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{BM}{\Delta\Gamma} = \frac{AB.AM}{A\Delta.A\Gamma}$ (2).

Πολλαπλασιάζουμε τις (1),(2) κατά μέλη και παίρνουμε $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2}$.

Όμοια έχουμε $\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{B\Gamma^2}{AB^2}$ και $\frac{AZ}{ZB} = \frac{A\Gamma^2}{B\Gamma^2}$.Άρα $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}.\frac{\Gamma E}{EA}.\frac{AZ}{ZB} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2}.\frac{B\Gamma^2}{AB^2}.\frac{A\Gamma^2}{B\Gamma^2} = 1$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Ceva οι συμμετριδιάμεσοι διέρχονται από το ίδιο σημείο L.

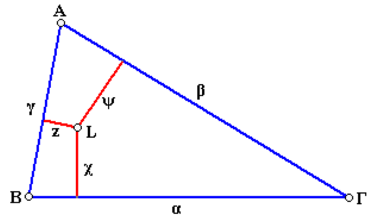
__Παρατήρηση:__ Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι συμμετροδιάμεσος από την κορυφή A αν και μόνο αν $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2}$ (1).Από την (1) έχουμε $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \Leftrightarrow \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma+\Delta B} = \frac{\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2} \Leftrightarrow \Delta B = \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$,οπότε $\Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Όμοια συμπεράσματα έχουμε και για τις άλλες συμμετροδιαμέσους.

__**Μερικές από τις σημαντικότερες ιδιότητες του σημείου Lemoine.**__

‘Εστω L το σημείο Lemoine ενός τριγώνου $AB\Gamma$.

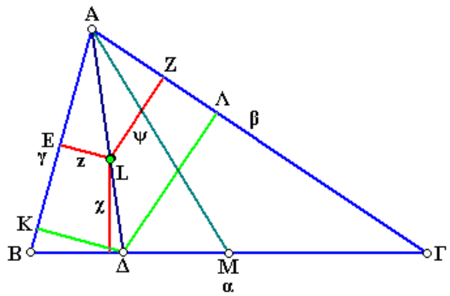
1. i. Οι αποστάσεις χ, ψ, z του σημείου L από τις πλευρές του τριγώνου είναι ανάλογες των πλευρών,



δηλαδή $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$.

ii. Το L είναι το εσωτερικό σημείο του τριγώνου που το άθροισμα $\chi^2 + \psi^2 + z^2$ είναι ελάχιστο.

Απόδειξη



i. Έστω AM η διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$,$ΔΚ \perp ΑΒ$ και $ΔΛ \perp ΑΓ$.

Είναι $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΜΑΓ} \Rightarrow \frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΜΓ)} = \frac{\gamma.ΑΔ}{\beta.ΑΜ}$ (1) και $\widehat{ΒΑΜ} = \widehat{ΔΑΓ} \Rightarrow \frac{(ΑΒΜ)}{(ΔΑΓ)} = \frac{\gamma.ΑΜ}{\beta.ΑΔ}$ (2).

Πολαπλασιάζουμε τις (1),(2) κατά μέλη και δεδομένου ότι $(ΑΒΜ) = (ΑΜΓ)$ παίρνουμε

$\frac{(ΑΒΔ)}{(ΔΑΓ)} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\gamma.ΔΚ}{\frac{1}{2}\beta.ΔΛ} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \Leftrightarrow \frac{ΔΚ}{ΔΛ} = \frac{\gamma}{\beta}$ (3).Από την ομοιότητα των τριγώνων $ΑΚΔ, AEL$ και $ΑΔΛ, ALZ$ έχουμε: $\frac{ΔΚ}{z} = \frac{ΑΔ}{AL} = \frac{ΔΛ}{\psi} \Rightarrow \frac{ΔΚ}{z} = \frac{ΔΛ}{\psi} \Leftrightarrow \frac{ΔΛ}{ΔΚ} = \frac{\psi}{z}$ (4).

Από τις (3),(4) παίρνουμε $\frac{\psi}{z} = \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\psi}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$.Όμοια προκύπτει ότι $\frac{\psi}{\beta} = \frac{\chi}{\alpha}$.Άρα $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$.

ii. Θέτουμε $(ΑΒΓ) = E$. Είναι $(BLΓ) + (ΓLA) + (ALB) = E \Leftrightarrow \alpha z + \beta\psi + \gamma z = 2E$.

Από την ταυτότητα Lagrange έχουμε:

$(\chi^2 + \psi^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\chi + \beta\psi + \gamma z)^2 = (\alpha\psi - \beta\chi)^2 + (\beta z - \gamma\psi)^2 + (\alpha z - \gamma\chi)^2 \Leftrightarrow$

$(\chi^2 + \psi^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 4E^2 = (\alpha\psi - \beta\chi)^2 + (\beta z - \gamma\psi)^2 + (\alpha z - \gamma\chi)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$(\chi^2 + \psi^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq 4E^2 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 + z^2 \geq \frac{4E^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ (I).

H (I) ισχύει ως ισότητα όταν: $\alpha\psi - \beta\chi = 0 \Leftrightarrow \frac{\chi}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta}$ και $\beta z - \gamma\psi = 0 \Leftrightarrow \frac{\psi}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ και $\alpha z - \gamma\chi = 0 \Leftrightarrow$ $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{z}{\gamma}$,οι οποίες ισχύουν μόνο για το σημείο Lamoine του τριγώνου.

Άρα το μόνο εσωτερικό σημείο του τριγώνου $ΑΒΓ$ που το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεών του από τις πλευρές του τριγώνου είναι ελάχιστο,είναι το σημείο Lamoine με ελάχιστη τιμή $\frac{4E^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$.

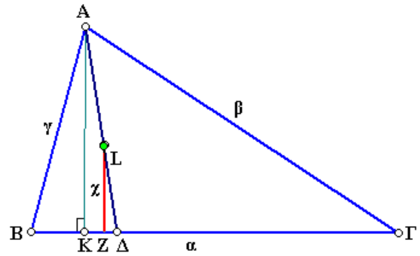
<u>Παρατήρηση:</u> α. Θέτουμε $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = t \Rightarrow \chi = \alpha t, \psi = \beta t, z = \gamma t$.

Όμως $\chi^2 + \psi^2 + z^2 = \frac{4E^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)t^2 = \frac{4E^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \Leftrightarrow t^2 = \frac{4E^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2} \Leftrightarrow t = \frac{2E}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$.

Έτσι έχουμε $\chi = \frac{2\alpha E}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}, \psi = \frac{2\beta E}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}, z = \frac{2\gamma E}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$.

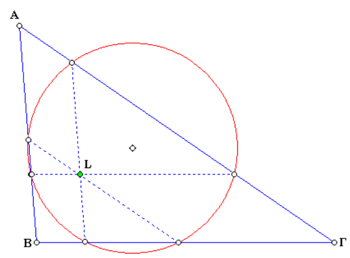
β. Το σημείο Lemoine L του τριγώνου $ΑΒΓ$ χωρίζει τη συμμετροδιάμεσο $ΑΔ$ εσωτερικά σε λόγο $\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$. Ανάλογο συμπέρασμα έχουμε και για τις άλλες συμμετροδιαμέσους.

Πράγματι:
Έστω AK το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ και χ η απόσταση του L από την πλευρά AB.

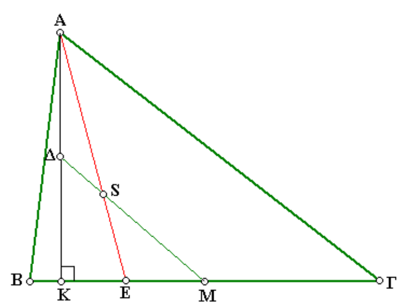


Από την ομοιότητα των τριγώνων $ZL\Delta, KA\Delta$ έχουμε $\frac{\chi}{AK}=\frac{L\Delta}{A\Delta}\Leftrightarrow\frac{2\alpha E}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)AK}=\frac{L\Delta}{A\Delta}\Leftrightarrow$ $\frac{2\alpha\frac{1}{2}\alpha AK}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)AK}=\frac{L\Delta}{A\Delta}\Leftrightarrow L\Delta=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}A\Delta$ και $LA=A\Delta-L\Delta\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow LA=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}A\Delta.$
Άρα $\frac{LA}{L\Delta}=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$ που σημαίνει ότι το σημείο Lemoine χωρίζει τη συμμετροδιάμεσο $A\Delta$ εσωτερικά σε λόγο $\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$.

2. Οι παράλληλες από το L προς τις πλευρές του τριγώνου τέμνουν τις πλευρές του τριγώνου σε σημεία που βρίσκονται στον ίδιο κύκλο.Ο κύκλος αυτός ονομάζεται κύκλος Lemoine του τριγώνου.



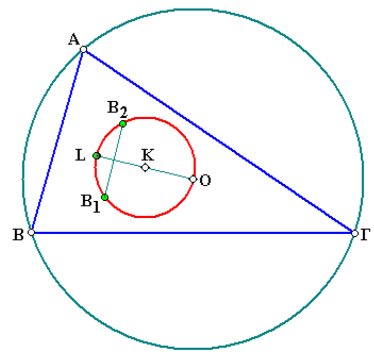
3. Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το μέσο ενός ύψους μη ισοσκελούς τριγώνου με το μέσο της πλευρά που αντιστοιχεί το ύψος διέρχεται από το L.
Απόδειξη



Έστω $AB<A\Gamma, \Delta$ το μέσο του ύψους AK και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.Η AE είναι συμμετροδιάμεσος από την κορυφή A και έστω S το σημείο τομής της με το ΔM.
Στο τρίγωνο KAE η $MS\Delta$ είναι διατέμνουσα,οπότε από το θεώρημα Μενελάου έχουμε:
$\frac{\Delta A}{\Delta K}\cdot\frac{MK}{ME}\cdot\frac{SE}{SA}=1\Leftrightarrow\frac{SE}{SA}=\frac{ME}{MK}$ (1).
Έχουμε: $ME=MB-EB=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}=\frac{\alpha(\beta^2-\gamma^2)}{2(\beta^2+\gamma^2)}$ (2) (Παρατήρηση θεωρήματος συμμετροδιαμέσων).
Από το δεύτερο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε: $\beta^2-\gamma^2=2\alpha.MK\Leftrightarrow MK=\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}$ (3).

Με βάση τις (2),(3) από την (1) παίρνουμε $\frac{SE}{SA} = \frac{\alpha^2}{\beta^2+\gamma^2} \Leftrightarrow \frac{SA}{SE} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$,δηλαδή το S χωρίζει εσωτερικά τη συμμετροδιάμεσο AE σε λόγο $\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$.Αυτό όμως ισχύει μόνο για το σημείο Lemoine (παρατήρηση β),οπότε το S ταυτίζεται με το L.Συνεπώς τα σημεία Δ, L, M είναι συνευθειακά.

4. Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από το L και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου είναι διάμετρος ενός κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Brocard του τριγώνου,τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τη διάμετρο του κύκλου.

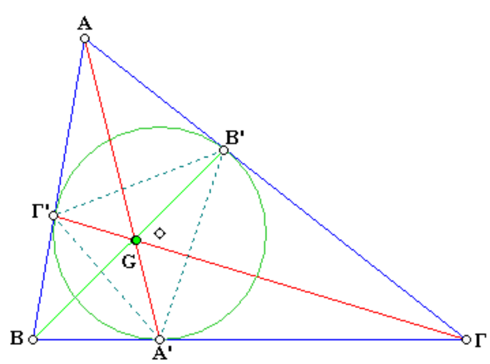


<u>Σχόλιο</u>: Emil Lemoine (1840 – 1912),Γάλλος μαθηματικός γεωμέτρης – πολιτικός μηχανικός με σημαντική συνισφορά στη γεωμετρία του τριγώνου.

3. Σημείο Gergonne

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$.Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου εφάπτεται των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$ στα σημεία A', B', Γ' αντίστοιχα.Τα τμήματα $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Gergonne του τριγώνου $AB\Gamma$.

Απόδειξη



Σχ.2

Έχουμε $BA' = B\Gamma', \Gamma A' = \Gamma B'$ και $AB' = A\Gamma'$.

$\frac{A'B}{A'\Gamma} \cdot \frac{B'\Gamma}{B'A} \cdot \frac{\Gamma'A}{\Gamma'B} = \frac{\Gamma'B}{A'\Gamma} \cdot \frac{A'\Gamma}{B'A} \cdot \frac{B'A}{\Gamma'B} = 1$.Σύμφωνα με το θεώρημα Ceva τα τμήματα $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ διέρχονται από το ίδιο σημείο G.

<u>Παρατήρηση</u> 1. $\frac{GA}{GA'} \cdot \frac{GB}{GB'} \cdot \frac{G\Gamma}{G\Gamma'} = \frac{4R}{\rho}$,όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Πράγματι: Στο τρίγωνο ABA' (Σχ.2) η $\Gamma G\Gamma'$ είναι διατέμνουσα οπότε από το θεώρημα Μενελάου έχουμε:

$\frac{GA}{GA'}.\frac{\Gamma A'}{\Gamma B}.\frac{B\Gamma'}{\Gamma' A}=1 \Leftrightarrow \frac{GA}{GA'}=\frac{\Gamma B}{\Gamma A'}.\frac{\Gamma' A}{B\Gamma'}=\frac{\alpha}{\tau-\gamma}.\frac{\tau-\alpha}{\tau-\beta} \Leftrightarrow \frac{GA}{GA'}=\frac{\alpha(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$. Όμοια έχουμε $\frac{GB}{GB'}=\frac{\beta(\tau-\beta)}{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}$ και $\frac{G\Gamma}{G\Gamma'}=\frac{\gamma(\tau-\gamma)}{(\tau-\beta)(\tau-\alpha)}$.

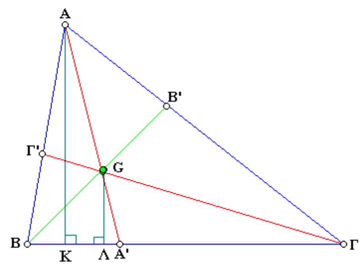
Έτσι έχουμε: $\frac{GA}{GA'}.\frac{GB}{GB'}.\frac{G\Gamma}{G\Gamma'}=\frac{\alpha\beta\gamma}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ (1).

Για το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε τους τύπους $E=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}, E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ και $E=\tau\rho$.

$(1) \Leftrightarrow \frac{GA}{GA'}.\frac{GB}{GB'}.\frac{G\Gamma}{G\Gamma'}=\frac{4R\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}}{\frac{E^2}{\tau}}=\frac{4\tau RE}{E^2}=\frac{4\tau R}{\tau\rho} \Leftrightarrow \frac{GA}{GA'}.\frac{GB}{GB'}.\frac{G\Gamma}{G\Gamma'}=\frac{4R}{\rho}$.

Παρατήρηση 2. $\boldsymbol{\frac{GA}{AA'}+\frac{GB}{BB'}+\frac{G\Gamma}{\Gamma\Gamma'}=2}$

Πράγματι:



Έστω $AK, G\Lambda$ τα ύψη των τριγώνων $AB\Gamma, BG\Gamma$ αντίστοιχα.

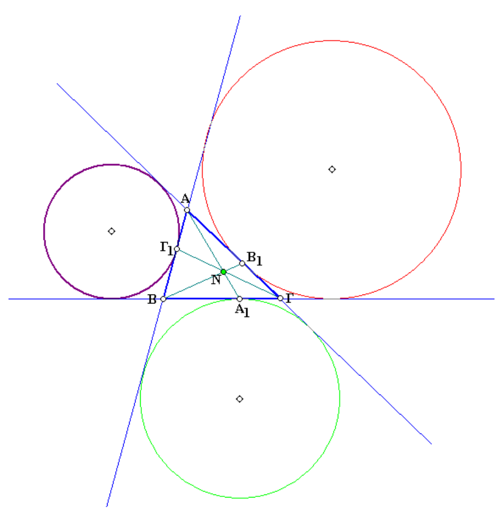
$\frac{(BG\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{G\Lambda}{AK}$.Από την ομοιότητα των τριγώνων $\Lambda GA', KAA'$ έχουμε: $\frac{G\Lambda}{AK}=\frac{GA'}{AA'} \Leftrightarrow \frac{G\Lambda}{AK}=\frac{AA'-GA}{AA'}=1-\frac{GA}{AA'}$.

Άρα $\frac{(BG\Gamma)}{(AB\Gamma)}=1-\frac{GA}{AA'}$. Όμοια $\frac{(AG\Gamma)}{(AB\Gamma)}=1-\frac{GB}{BB'}$ και $\frac{(AGB)}{(AB\Gamma)}=1-\frac{G\Gamma}{\Gamma\Gamma'}$.

Έτσι έχουμε: $\frac{(BG\Gamma)}{(AB\Gamma)}+\frac{(AG\Gamma)}{(AB\Gamma)}+\frac{(AGB)}{(AB\Gamma)}=3-(\frac{GA}{AA'}+\frac{GB}{BB'}+\frac{G\Gamma}{\Gamma\Gamma'}) \Leftrightarrow 1=3-(\frac{GA}{AA'}+\frac{GB}{BB'}+\frac{G\Gamma}{\Gamma\Gamma'}) \Leftrightarrow$
$\frac{GA}{AA'}+\frac{GB}{BB'}+\frac{G\Gamma}{\Gamma\Gamma'}=2$.

Σημείωση:

1. Οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου $AB\Gamma$ εφάπτονται των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$ στα σημεία A_1, B_1, Γ_1 αντίστοιχα,τότε τα τμήματα $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Nagel του τριγώνου $AB\Gamma$.(Christian Heinrich von Nagel (1803-1882),Γερμανός γεωμέτρης).



2. Το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ (Σχ.2) ονομάζεται τρίγωνο Gergonne του τριγώνου $AB\Gamma$.

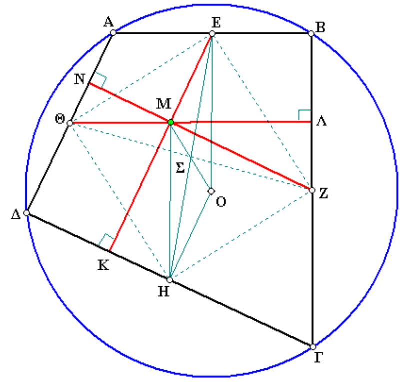
3. Το σημείο Gergonne του τριγώνου $AB\Gamma$ (Σχ.2) είναι το σημείο Lemoinne του τριγώνου $A'B'\Gamma'$.

Σχόλιο: Joseph Gergonne (1771-1859),Γάλλος μαθηματικός.Το 1810 δημιούργισε το μαθηματικό περιοδικό Annales de Gergonne στο οποίο δημοσιεύτικαν εργασίες διάσημων μαθηματικών όπως των Poncelet,Chasles,Galois και άλλων.

4. Σημείο Mathot

Τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O).Οι αποστάσεις των μέσων των πλευρών του από τις απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο.Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Mathot ή αντικέντρο του τετραπλεύρου.

Απόδειξη



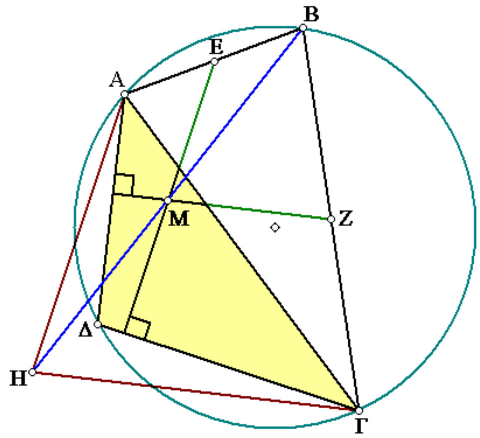
Έστω E, Z, H, Θ τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα του τετραπλεύρου.Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο,οπότε οι διαγωνιές του $EH, \Theta Z$ διχοτομούνται στο Σ.Έστω M το συμμετρικό σημείο του O ως προς το Σ.Το τετράπλευρο $MEOH$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγωνιές του διχοτομούνται.Άρα $EM//OH$ και αφού $OH \perp \Delta\Gamma$ είναι $EM \perp \Delta\Gamma \Rightarrow \mathrm{EK} \perp \Delta\Gamma$.Όμοια αποδεικνύεται ότι $\Theta M \perp \mathrm{B\Gamma} \Rightarrow \Theta\Lambda \perp \mathrm{B\Gamma}$ και $ZM \perp \mathrm{A\Delta} \Rightarrow \mathrm{ZN} \perp \mathrm{A\Delta}$.
Άρα οι $EH, ZN, \Theta\Lambda$ διέρχονται από το ίδιο σημείο M.Το M είναι το σημείο Mathot του τετραπλεύρου.

Μερικές ιδιότητες του σημείου Mathot

Όταν θα λέμε κυκλικό τετράπλευρο θα εννοούμε ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο.

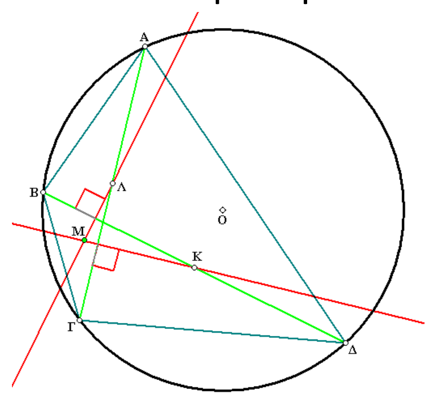
1. Το συμμετρικό μιας κορυφής του κυκλικού τετραπλεύρου ως προς το σημείο Mathot του τετραπλεύρου είναι ορθόκεντρο του τριγώνου που ορίζουν οι άλλες τρείς κορυφές.

Πράγματι:



Ας είναι E, Z τα μέσα των πλευρών AB, $B\Gamma$ αντίστοιχα του τετραπλεύρου.
Έστω H το συμμετρικό σημείο του B ως προς το σημείο Mathot M.Στο τρίγωνο ABH είναι $EM//AH$ και επειδή $EM \perp \Delta\Gamma$ το AH είναι ύψος του τριγώνου $A\Delta\Gamma$.Όμοια στο τρίγωνο $BH\Gamma$ είναι $MZ//H\Gamma$ και επειδή $MZ \perp A\Delta$ είναι $\Gamma H \perp A\Delta$,οπότε το ΓH είναι ύψος του τριγώνου $A\Delta\Gamma$.Άρα το H είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $A\Delta\Gamma$.

2. Σε κάθε κυκλικό τετράπλευρο οι κάθετες ευθείες από το μέσο της κάθε διαγωνίου στην άλλη διαγώνιο διέρχονται από το σημείο Mathot του τετραπλεύρου.

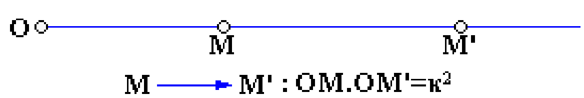


3. Οι κύκλοι Euler των τεσσάρων τριγώνων που ορίζονται από τις κορυφές του κυκλικού τετραπλεύρου διέρχονται από το σημείο Mathot του τετραπλεύρου.

5. Σημεία Feuerbach

Βασικές γνώσεις

1. Ορισμός: Έστω O ένα σταθερό σημείο του επιπέδου.Αν σε σημείο M του επιπέδου διαφορετικό του O αντιστοιχεί ένα σημείο M' της ημιευθείας OM έτσι ώστε να ισχύει $OM.OM' = \kappa^2$ με κ σταθερό ευθύγραμμο τμήμα,λέμε ότι ή αντιστοίχιση αυτή είναι μία αντιστοφή με πόλο ή κέντρο το σημείο O και δύναμη το κ^2.



• Η αντιστροφή με πόλο το O και δύναμη κ^2 παριστάνεται $Inv(O, \kappa^2)$. Το σημείο M' ονομάζεται αντίστροφο ή ομόλογο του M στην $Inv(O, \kappa^2)$.

Αν S είναι ένα σχήμα και S' το σχήμα που προκύπτει ως το σύνολο των αντίστροφων σημείων του S κατά την $Inv(O, \kappa^2)$,τότε λέμε ότι το S' είναι το αντίστροφο του S κατά την $Inv(O, \kappa^2)$.

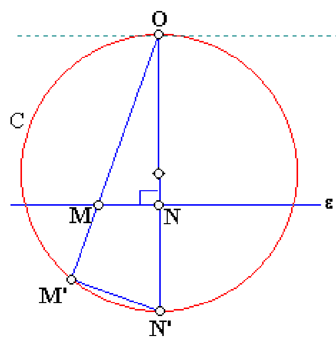
● Το αντίστροφο μιας ευθείας ε που διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής είναι η ευθεία ε.

2. Βασικά θεωρήματα

Θ.1. Έστω ευθεία ε και σημείο O που δεν ανήκει στην ε.Το αντίστροφο της ε κατά την $Inv(O, \kappa^2)$ είναι κύκλος C που διέρχεται από το O και αντιστρόφως,το αντίστροφο του C κατά την $Inv(O, \kappa^2)$ είναι η ευθεία ε.

Απόδειξη

Έστω τυχαίο σημείο M της ε και M' το αντιστροφό του κατά την αντιστροφή $Inv(O, \kappa^2)$.Φέρνουμε $ON \perp \varepsilon$ και έστω N' το αντίστροφό του.



Είναι $OM.OM' = ON.ON' = \kappa^2$.Η ισότητα αυτή μας εξασφαλίζει ότι το τετράπλευρο $MNN'M'$ είναι εγγράψιμο,οπότε $\widehat{OM'N'} = 1 ⌊$.Άρα το σημείο M' βρίσκεται σε κύκλο με διάμετρο ON'.Άρα το αντίστροφο της ευθείας ε κατά την αντιστροφή $Inv(O, \kappa^2)$ είναι ο κύκλος C που διέρχεται από το O.

<u>Αντίστροφα</u>: Έστω M' σημείο του κύκλου C διαφορετικό του O.Η OM' τέμνει την ευθεία ε στο M,οπότε ισχύει $OM.OM' = \kappa^2$.Άρα το M είναι το αντίστροφο του M' κατά την $Inv(O, \kappa^2)$.Επομένως το αντίστροφο του C είναι η ευθεία ε.

<u>Παρατήρηση</u>: Το αντίστροφο κύκλου κατά την $Inv(O, \kappa^2)$ με το O σημείο του κύκλου είναι ευθεία παράλληλη στην εφαπτομένη του κύκλου στο πόλο O.

Θ.2. Το αντίστροφο κύκλου κατά την $Inv(O, \kappa^2)$ με το O να μην είναι σημείο του κύκλου είναι κύκλος.

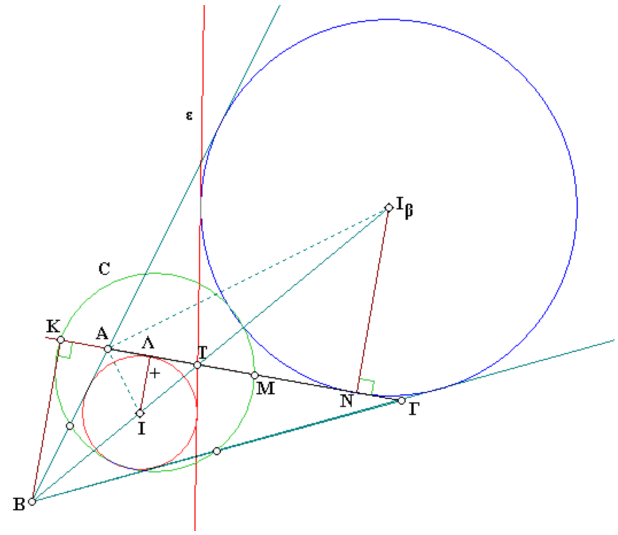
Θ.3. Αν η δύναμη αντιστροφής είναι ίση με τη δύναμη του πόλου ως προς κύκλο (O, R),το αντίστροφο του κύκλου είναι ο εαυτός του.

Θ.4. Αν δύο γραμμές εφάπτονται στο M τότε και οι αντίστροφες γραμμές θα εφάπτονται στο M' το οποίο είναι το αντίστροφο του M κατά την αντιστροφή.

Θεώρημα Feuerbach

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$.Ο κύκλος Euler του τριγώνου εφάπτεται του εγγεγραμμένου κύκλου και των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου.Τα σημεία επαφής ονομάζονται σημεία Feuerbach.

Απόδειξη



Έστω C ο κύκλος Euler και $(I,\rho),(I_\beta,\rho_\beta)$ ο εγγεγραμμένος και παρεγγεγραμμένος αντίστοιχα κύκλος του τριγώνου $ΑΒΓ$.Είναι $BK \perp ΑΓ, ΙΛ \perp ΑΓ$ και $I_\beta N \perp ΑΓ$.Οι $\varepsilon, ΑΓ$ είναι κοινές εσωτερικές εφαπτομένες των κύκλων $(I,\rho),(I_\beta,\rho_\beta)$,οπότε τέμνονται πάνω στη διάκεντρο II_β των κύκλων στο σημείο T.

Ας είναι M το μέσο της πλευράς $ΑΓ$.Ο κύκλος C διέρχεται από τα σημεία K,M.

Έχουμε $AN = \tau - \gamma, ΓΛ = \tau - \gamma$,οπότε $AN = ΓΛ \Leftrightarrow AM + MN = ΓM + MΛ \Leftrightarrow MN = MΛ$,αφού $AM = ΓM$.Άρα το M είναι μέσο του $ΛN$.

Στο τρίγωνο ABT οι AI, AI_β είναι εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος αντίστοιχα,οπότε έχουμε $\frac{IB}{IT} = \frac{I_\beta B}{I_\beta T}$ (1).$ΙΛ//BK \Rightarrow \frac{IB}{IT} = \frac{ΛK}{ΛT}$ (2),$BK//I_\beta N \Rightarrow \frac{I_\beta B}{I_\beta T} = \frac{KN}{TN}$ (3).Από την (1) λόγω των (2),(3) έχουμε

$\frac{ΛK}{ΛT} = \frac{KN}{TN} \Leftrightarrow ΛK.TN = KN.ΛT \Leftrightarrow (MK - MΛ)(TM + MN) = (MK + MN)(MΛ - MT) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$

$MT.MK = MΛ^2$ (4).Από την (4) προκύπτει ότι το T είναι το αντίστροφο του K στην αντιστροφή με πόλο το M και δύναμη $MΛ^2$.Όμως το $K \in C$ και $M \in C$,άρα το T θα ανήκει στο αντίστροφο του C κατά την $Inv(M, MΛ^2)$ που θα είναι ευθεία παράλληλη στην εφαπτομένη του C στο M.Η ευθεία αυτή είναι η κοινή εφαπτομένη ε των κύκλων $(I,\rho),(I_\beta,\rho_\beta)$ (παρατήρηση 3 από κύκλο Euler).

$\varepsilon \xrightarrow{Inv(M,MΛ^2)} C,\ \ (I,\rho) \xrightarrow{Inv(M,MΛ^2)} (I,\rho)$.Αφού η ευθεία ε και ο κύκλος (I,ρ) εφάπτονται τότε και τα αντίστροφά τους, οι κύκλοι $C,(I,\rho)$ εφάπτονται.

Είναι $MΛ = MN$,οπότε $(I_\beta,\rho_\beta) \xrightarrow{Inv(M,MN^2)} (I_\beta,\rho_\beta)$ (βλέπε Θ_3).Αφού η ευθεία ε και ο κύκλος (I_β,ρ_β) εφάπτονται και τα αντίστοφά τους ,οι κύκλοι $C,(I_\beta,\rho_\beta)$ (βλέπε Θ_4) θα εφάπτονται.

Όμοια ο C εφάπτεται και των άλλων παρεγγεγραμμένων κύκλων.

<u>**Σχόλιο**</u>: **Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834)**,καθηγητής Μαθηματικών στο Γυμνάσιο του Erlangen στη Γερμανία.