# **Α ΛΥΚΕΙΟΥ - ΑΛΓΕΒΡΑ**

**Προτείνονται δεκαπέντε λυμένα θέματα άλγεβρας που σκοπό έχουν να δει ο μαθητής συνθετικά την εφαρμογή των εννοιών που έχει διδαχτεί.**

## ΘΕΜΑ 1ο

**α) Αν ν θετικός ακέραιος και χ,ψ πραγματικοί για τους οποίους ισχύει $\chi^{2\nu}+\psi^{2\nu}=0$,δείξτε ότι χ=ψ=0.**

**β) Αν ν θετικός ακέραιος και ισχύουν $2^{\nu-2}=1$ (1) και $(\chi^2-4)^{\nu}+(\psi-1)^{\nu}=0$ (2),να βρείτε τους χ,ψ.**

**Λύση**

**α)** Για κάθε $\chi,\psi\in R$ ισχύει $\chi^{2\nu}\geq 0,\psi^{2\nu}\geq 0$.Αν υποθέσουμε ότι $\chi\neq 0$,τότε είναι $\chi^{2\nu}\rangle 0$,οπότε $\chi^{2\nu}+\psi^{2\nu}\rangle 0$.Άτοπο.Άρα χ=0.Η ισότητα της υπόθεσης γίνεται $\psi^{2\nu}=0\Leftrightarrow\psi=0$.

**β)** Η (1) ισχύει όταν ν-2=0 $\Leftrightarrow$ ν=2.Έτσι η (2) γράφεται $(\chi^2-4)^2+(\psi-1)^2=0$ (3).

Σύμφωνα με το α) από την (3) παίρνουμε $\chi^2-4=0\Leftrightarrow\chi^2=4\Leftrightarrow\chi=\pm 2$ και $\psi-1=0\Leftrightarrow\psi=1$.

## ΘΕΜΑ 2ο

**Αν για τους πραγματικούς αριθμούς χ,ψ έχουμε χ≠1 και χψ+χ=1 (1), τότε:**

**α) Δείξτε ότι ψ≠0.**

**β) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\mathrm{K}=\dfrac{\chi^2+2\chi-2+\psi^2}{\psi(\chi-\psi)}$.**

**Λύση**

**α)** Αν ήταν ψ=0 από την (1) παίρνουμε χ=1.Άτοπο.Άρα ψ≠0.

**β)** Από την (1) έχουμε χ-1=-χψ,οπότε $\chi^2+2\chi-2+\psi^2=\chi^2+2(\chi-1)+\psi^2=\chi^2-2\chi\psi+\psi^2=$

$=(\chi-\psi)^2$.Είναι $\psi\neq 0$,οπότε όταν $\chi\neq\psi$, $\mathrm{K}=\dfrac{(\chi-\psi)^2}{\psi(\chi-\psi)}=\dfrac{\chi-\psi}{\psi}$.

## ΘΕΜΑ 3ο

**α) Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύει $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ (1).**

**Δείξτε ότι: i) Δύο τουλάχιστον από τους α,β,γ είναι αντίθετοι.**

**ii) Για κάθε περιττό φυσικό αριθμό ν ισχύει $(\alpha+\beta+\gamma)^{\nu}=\alpha^{\nu}+\beta^{\nu}+\gamma^{\nu}$.**

**Λύση**

**i)** $(1)\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2+3(\alpha+\beta)\gamma+3\gamma^2\right]=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2+3(\alpha+\beta)\gamma+3\gamma^2\right]-(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\right]=0\Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)\left[3(\alpha+\beta)\gamma+3\gamma^2+3\alpha\beta\right]=0\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\left(3\alpha\gamma+3\beta\gamma+3\gamma^2+3\alpha\beta\right)=0\Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)\left[\left(3\alpha\gamma+3\gamma^2\right)+\left(3\beta\gamma+3\alpha\beta\right)\right]=0\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\left[3\gamma(\alpha+\gamma)+3\beta(\alpha+\gamma)\right]=0\Leftrightarrow$

$3(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$ ή $\alpha+\gamma=0$ ή $\beta+\gamma=0$ $\Leftrightarrow \alpha=-\beta$ ή $\alpha=-\gamma$ ή $\beta=-\gamma$.

**ii)** Από το **i)** έστω ότι είναι $\alpha=-\beta$,τότε για τον περιττό φυσικό ν έχουμε:

$(\alpha+\beta+\gamma)^{\nu}=\gamma^{\nu}$ και $\alpha^{\nu}+\beta^{\nu}+\gamma^{\nu}=(-\beta)^{\nu}+\beta^{\nu}+\gamma^{\nu}=-\beta^{\nu}+\beta^{\nu}+\gamma^{\nu}=\gamma^{\nu}$.

Άρα $(\alpha+\beta+\gamma)^{\nu}=\alpha^{\nu}+\beta^{\nu}+\gamma^{\nu}$.

## Θ Ε Μ Α 4ο

**Θεωρούμε την εξίσωση $\lambda^2(\lambda-\chi)+\lambda^2\mu=\mu^2(\mu-\chi)+\lambda\mu^2$ (1),λ,μ∈ $R$.**

**i) Να λύσετε την (1).**

**ii) Έστω ότι $\mu<0$ και $\mu^2>\lambda^2$.Αν $\chi_o$ είναι λύση της (1),δείξτε ότι $\chi_o^3+(\mu-\lambda)^3-8\mu^3>0$.**

**<u>Λύση</u>**

**i)** (1) $\Leftrightarrow \lambda^3-\lambda^2\chi+\lambda^2\mu=\mu^3-\mu^2\chi+\lambda\mu^2 \Leftrightarrow \mu^2\chi-\lambda^2\chi=\mu^3-\lambda^3+\lambda\mu^2-\lambda^2\mu \Leftrightarrow$

$(\mu^2-\lambda^2)\chi=(\mu^3-\lambda^3)+\lambda\mu(\mu-\lambda) \Leftrightarrow (\mu-\lambda)(\mu+\lambda)\chi=(\mu-\lambda)(\mu^2+\mu\lambda+\lambda^2)+\lambda\mu(\mu-\lambda) \Leftrightarrow$

$(\mu-\lambda)(\mu+\lambda)\chi=(\mu-\lambda)(\mu^2+2\mu\lambda+\lambda^2) \Leftrightarrow (\mu-\lambda)(\mu+\lambda)\chi=(\mu-\lambda)(\mu+\lambda)^2$ (2).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

**1η)** Αν $(\mu-\lambda)(\mu+\lambda)\neq 0 \Leftrightarrow \mu\neq\pm\lambda$,τότε (2) $\Leftrightarrow \chi=\dfrac{(\mu-\lambda)(\mu+\lambda)^2}{(\mu-\lambda)(\mu+\lambda)}=\mu+\lambda$.

**2η)** Αν $(\mu-\lambda)(\mu+\lambda)=0 \Leftrightarrow \mu=\pm\lambda$,τότε η (2) γίνεται $0\chi=0$,δηλαδή έχει απειρία λύσεων.

**ii)** Επειδή $\mu^2>\lambda^2 \Leftrightarrow (\mu-\lambda)(\mu+\lambda)>0$,οπότε είναι $\mu\neq\pm\lambda$.Σύμφωνα με το i) είναι $\chi_o=\mu+\lambda$.

Έχουμε $\chi_o^3+(\mu-\lambda)^3-8\mu^3=(\mu+\lambda)^3+(\mu-\lambda)^3+(-2\mu)^3$.Παρατηρούμε ότι :

$\mu+\lambda+\mu-\lambda-2\mu=0$,οπότε $(\mu+\lambda)^3+(\mu-\lambda)^3+(-2\mu)^3=3(\mu+\lambda)(\mu-\lambda)(-2\mu) \Leftrightarrow$

$(\mu+\lambda)^3+(\mu-\lambda)^3+(-2\mu)^3=-6\mu(\mu^2-\lambda^2)>0$,αφού $\mu^2-\lambda^2>0$ και $-6\mu>0$.

**<u>Σημείωση</u>: Όταν α+β+γ=0,τότε ισχύει $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.**

## Θ Ε Μ Α 5ο

**Α. Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ,χ,ψ,ω δείξτε ότι:**

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\chi^2+\psi^2+\omega^2)\geq(\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega)^2$ **(1) (ανισότητα Schwarz).**

**Β. Αν α,β,γ θετικοί με α+β+γ=1,δείξτε ότι:**

**i)** $\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}\leq 1$.

**ii)** $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\dfrac{1}{3}$.

**<u>Λύση</u>**

**Α.** (1) $\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \alpha^2\psi^2+\alpha^2\omega^2+\beta^2\chi^2+\beta^2\omega^2+\gamma^2\chi^2+\gamma^2\psi^2-2\alpha\chi\beta\psi-2\alpha\chi\gamma\omega-2\beta\psi\gamma\omega\geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha\psi-\beta\chi)^2+(\alpha\omega-\gamma\chi)^2+(\beta\omega-\gamma\psi)^2\geq 0$,που ισχύει.

**Β. i)** Είναι $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2\geq 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha\beta}\leq\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Όμοια $\sqrt{\beta\gamma}\leq\dfrac{\beta+\gamma}{2}$,$\sqrt{\gamma\alpha}\leq\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$.Έτσι έχουμε $\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}\leq\dfrac{2(\alpha+\beta+\gamma)}{2} \Leftrightarrow$

$\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}\leq 1$.

**ii)** Εφαρμόζοντας την (1) του i) ερωτήματος για χ=ψ=ω=1 παίρνουμε

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).3 \geq (\alpha+\beta+\gamma)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \frac{1}{3}$.

## Θ Ε Μ Α 6ο

**Δίνονται οι σχέσεις $|\chi-3| \leq 1$ (1) και $|2\psi+3| \leq 5$ (2).Να βρείτε:**

**α) Τις τιμές των πραγματικών χ,ψ.**

**β) Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης Κ=2χ-3ψ.**

**Λύση**

**α)** $(1) \Leftrightarrow -1 \leq \chi-3 \leq 1 \Leftrightarrow -1+3 \leq \chi \leq 1+3 \Leftrightarrow 2 \leq \chi \leq 4 \Leftrightarrow \chi \in [2,4]$.

$(2) \Leftrightarrow -5 \leq 2\psi+3 \leq 5 \Leftrightarrow -5-3 \leq 2\psi \leq 5-3 \Leftrightarrow -8 \leq 2\psi \leq 2 \Leftrightarrow -4 \leq \psi \leq 1 \Leftrightarrow \psi \in [-4,1]$.

**β)** Από το α) έχουμε $2 \leq \chi \leq 4 \Leftrightarrow 4 \leq 2\chi \leq 8$ (3) και $-4 \leq \psi \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -3\psi \leq 12$ (4).

Προσθέτουμε τις (3),(4) κατά μέλη και παίρνουμε $1 \leq 2\chi-3\psi \leq 20 \Leftrightarrow 1 \leq K \leq 20$.

Είναι $K=1$ για $\chi=2, \psi=1$ και $K=20$ για $\chi=4, \psi=-4$.

Άρα η ελάχιστη τιμή της Κ είναι 1 και η μέγιστη 20.

## Θ Ε Μ Α 7ο

**Να λύσετε την ανίσωση $|\chi^2|+\left|-\frac{\chi+1}{\chi}\right| < \frac{2}{|\chi|}+\chi^2$ (1).**

**Λύση**

Πρώτα απ' όλα για να ορίζεται η (1) πρέπει να είναι $\chi \neq 0$.

$(1) \Leftrightarrow \chi^2+\left|\frac{\chi+1}{\chi}\right| < \frac{2}{|\chi|}+\chi^2 \Leftrightarrow \frac{|\chi+1|}{|\chi|} < \frac{2}{|\chi|} \overset{|\chi|>0}{\Longleftrightarrow} |\chi+1| < 2 \Leftrightarrow -2 < \chi+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < \chi < 1$.

Επειδή $\chi \neq 0$,τελικά λύσεις τις ανίσωσης είναι τα χ με $-3 < \chi < 0$ ή $0 < \chi < 1$ δηλαδή $\chi \in (-3,0) \cup (0,1)$.

## Θ Ε Μ Α 8ο

**α) Αν $\chi \neq 0$,δείξτε ότι: $\left|\chi+\frac{1}{\chi}\right| \geq 2$ (1).Για ποια χ η (1) ισχύει σαν ισότητα;**

**β) Με κέντρο το σημείο που αντιστοιχεί στο μηδέν του άξονα των πραγματικών αριθμών γράφουμε κύκλο με ακτίνα $\frac{1}{2}$.Δείξτε ότι τα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών που αντιστοιχούν στους αριθμούς $\frac{\chi}{1+\chi^2}$ είναι σημεία του παραπάνω κυκλικού δίσκου.**

**Λύση**

**α)** $(1) \Leftrightarrow \left|\frac{\chi^2+1}{\chi}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\chi^2+1|}{|\chi|} \geq 2 \overset{\chi^2+1>0}{\Longleftrightarrow} \chi^2+1 \geq 2|\chi| \Leftrightarrow |\chi|^2-2|\chi|+1 \geq 0 \Leftrightarrow (|\chi|-1)^2 \geq 0$ που ισχύει.Η (1) ισχύει σαν ισότητα όταν $|\chi|-1=0 \Leftrightarrow |\chi|=1 \Leftrightarrow \chi=\pm 1$.

**β)** Πρέπει η απόσταση των αριθμών $0, \frac{\chi}{1+\chi^2}$ να είναι μικρότερη ή ίση του $\frac{1}{2}$.

$d\left(\frac{\chi}{1+\chi^2},0\right)=\left|\frac{\chi}{1+\chi^2}-0\right|=\left|\frac{\chi}{1+\chi^2}\right|$.

Από το α) έχουμε $\left|\dfrac{\chi^2+1}{\chi}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\chi}{1+\chi^2}\right| \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow d\left(\dfrac{\chi}{1+\chi^2},0\right) \leq \dfrac{1}{2}$.

## Θ Ε Μ Α 9ο

**α) Για τον πραγματικό αριθμό α να συμπληρώσετε την ισότητα $|a| = \cdots$**

**β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $|\alpha+\beta| \angle |\alpha| + |\beta|$. Σ Λ.**

**γ) Δίνεται η εξίσωση $\lambda|\chi| = \sqrt{\chi^2} - 1$ με άγνωστο τον χ και λ∈R.Να βρείτε το λ για το οποίο η εξίσωση είναι αδύνατη.**

**δ) Αν $\alpha \neq \pm 1$, να απλοποιήσετε την παράσταση $\Pi = \dfrac{|\alpha|-1}{\alpha^2-1}$.**

**Λύση**

**α)** $|\alpha| = -\alpha$,όταν $\alpha \leq 0$, $|\alpha| = \alpha$,όταν $\alpha \rangle 0$.

**β)** Είναι λάθος.

**γ)** $\lambda|\chi| = \sqrt{\chi^2} - 1 \Leftrightarrow \lambda|\chi| = |\chi| - 1 \Leftrightarrow \lambda|\chi| - |\chi| = -1 \Leftrightarrow (\lambda-1)|\chi| = -1 \quad (1)$.Η εξίσωση είναι αδύνατη αν και μόνο αν $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

**δ)** $\Pi = \dfrac{|\alpha|-1}{|\alpha|^2-1} = \dfrac{|\alpha|-1}{(|\alpha|-1)(|\alpha|+1)} = \dfrac{1}{|\alpha|+1}$.Αν $\alpha < 0$ και $\alpha \neq -1$,τότε $\Pi = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

Αν $\alpha \geq 0$ και $\alpha \neq 1$,τότε $\Pi = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

## Θ Ε Μ Α 10ο

**α) Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει $|\alpha| \geq \alpha$ ή $|\alpha| \geq -\alpha$. Σ Λ.**

**β) Να συμπληρώσετε την ισοδυναμία $|\chi| = |\alpha| \Leftrightarrow \cdots$**

**γ) Για τους μη μηδενικούς πραγματικούς χ,ψ ισχύει $|\chi\psi| + \chi\psi = 0$.Να υπολογίσετε την παράσταση $K = \dfrac{2\chi}{|\chi|} + \dfrac{|\psi|}{\psi}$.**

**δ) Να βρείτε τα χ του $[-1,10]$ για τα οποία ισχύει $||\chi-2|-3| \leq 4$.**

**Λύση**

**α)** Είναι λάθος.

**β)** $|\chi| = |\alpha| \Leftrightarrow \chi = \pm\alpha$.

**γ)** Είναι $|\chi\psi| = -\chi\psi$. $K = \dfrac{2\chi\psi + |\chi||\psi|}{|\chi|\psi} = \dfrac{2\chi\psi + |\chi\psi|}{|\chi|\psi} = \dfrac{2\chi\psi - \chi\psi}{|\chi|\psi} = \dfrac{\chi\psi}{|\chi|\psi} = \dfrac{\chi}{|\chi|}$.

Αρα,αν χ<0,τότε Κ=-1,ενώ αν χ>0,τότε Κ=1.

**δ)** $||\chi-2|-3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq |\chi-2| - 3 \leq 4 \Leftrightarrow -4+3 \leq |\chi-2| \leq 4+3 \Leftrightarrow -1 \leq |\chi-2| \leq 7$ (1).

Όμως $|\chi-2| \geq -1$,αφού $|\chi-2| \geq 0$.Άρα (1) $\Leftrightarrow |\chi-2| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq \chi-2 \leq 7 \Leftrightarrow$
$-7+2 \leq \chi \leq 7+2 \Leftrightarrow -5 \leq \chi \leq 9$.

Έχουμε ακόμα $-1 \leq \chi \leq 10$ ,οπότε από τη συναληθευσή τους προκύπτει $-1 \leq \chi \leq 9$.

## Θ Ε Μ Α 11ο

**Α. Για τους πραγματικούς α,β ισχύει** $\frac{\alpha}{1+|\alpha|}=\frac{\beta}{1+|\beta|}$ **(1) .Δείξτε ότι α=β.**

**Β. Θεωρούμε την εξίσωση** $\frac{\chi^6+\lambda^2}{1+\chi^6+\lambda^2}=\frac{2\chi^6}{1+2\chi^6}$ **(2) ,λ∈R με άγνωστο το χ.**

**α) Να λύσετε την (1).**

**β) Αν** $\chi_0$ **είναι λύση της (1),να βρείτε για ποιο λ είναι** $\chi_0>\sqrt{2}$**.**

**Λύση**

**Α.** Είναι $|\alpha|\geq 0, |\beta|\geq 0$,οπότε $1+|\alpha|>0$ και $1+|\beta|>0$.

$(1)\Leftrightarrow \alpha(1+|\beta|)=\beta(1+|\alpha|)$ (3).

- Αν α=0 από τη (3) παίρνουμε β=0.Άρα α=β=0.
- Αν $\alpha\neq 0$ ,αφού $1+|\alpha|>0$ και $1+|\beta|>0$ από την (3) προκύπτει ότι $\beta\neq 0$ και μάλιστα τα α,β είναι ομόσημα.

❑ Αν α,β>0,τότε $(3)\Leftrightarrow \alpha(1+\beta)=\beta(1+\alpha)\Leftrightarrow \alpha+\alpha\beta=\beta+\alpha\beta\Leftrightarrow \alpha=\beta$.

❑ Αν α,β<0,τότε $(3)\Leftrightarrow \alpha(1-\beta)=\beta(1-\alpha)\Leftrightarrow \alpha-\alpha\beta=\beta-\alpha\beta\Leftrightarrow \alpha=\beta$.

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι α=β.

**Β. α)** Είναι $\chi^6+\lambda^2\geq 0, 2\chi^6\geq 0$,οπότε $(2)\Leftrightarrow \frac{\chi^6+\lambda^2}{1+|\chi^6+\lambda^2|}=\frac{2\chi^6}{1+|2\chi^6|}$ (4).

Σύμφωνα με το Α, $(4)\Leftrightarrow \chi^6+\lambda^2=2\chi^6\Leftrightarrow \chi^6=\lambda^2\Leftrightarrow \chi=\pm\sqrt[6]{\lambda^2}\Leftrightarrow \chi=\pm\sqrt[3]{|\lambda|}$ .

**Σημείωση**: Για να λύσουμε την εξίσωση μπορούμε να μην στηριχτούμε στο Α,αλλά να εκτελέσουμε τις πράξεις.

**β)** Από τις λύσεις που βρήκαμε η $-\sqrt[3]{|\lambda|}\leq 0$.Άρα $\chi_0>\sqrt{2}\Leftrightarrow \sqrt[3]{|\lambda|}>\sqrt{2}\Leftrightarrow \sqrt[6]{|\lambda|^2}>\sqrt[6]{2^3}\Leftrightarrow$
$|\lambda|^2>2^3\Leftrightarrow |\lambda|>\sqrt{2^3}\Leftrightarrow |\lambda|>2\sqrt{2}\Leftrightarrow \lambda<-2\sqrt{2}$ ή $\lambda>2\sqrt{2}$ .

## Θ Ε Μ Α 12ο

**α) Αν** $\alpha,\beta\geq 0$ **,να συμπληρώσετε την ισότητα** $\sqrt[\nu]{\alpha.\beta}=\cdots$

**β) Αν** $\alpha,\beta\geq 0$ **ισχύει** $\sqrt[\nu]{\alpha+\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}$ **Σ Λ.**

**γ) Να λύσετε την εξίσωση** $(|\chi-2|-3)^3=-8$**.**

**δ) Να βρείτε τα** $\chi\in R$ **για τα οποία ορίζεται η παράσταση** $K=\sqrt[3]{\frac{1}{\chi-1}\sqrt{\chi^2+4}}$ **.**

**Αν χ=2,να βρείτε την Κ και να υπολογίσετε την παράσταση** $\Pi=\frac{K^2}{\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2}+1}$**.**

**Λύση**

**α)** $\sqrt[\nu]{\alpha.\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}$.

**β)** Είναι λάθος.

**γ)** $(|\chi-2|-3)^3=-8\Leftrightarrow |\chi-2|-3=-\sqrt[3]{8}\Leftrightarrow |\chi-2|-3=-2\Leftrightarrow |\chi-2|=1\Leftrightarrow \chi-2=\pm 1$.

- $\chi-2=1\Leftrightarrow \chi=2+1\Leftrightarrow \chi=3$.
- $\chi-2=-1\Leftrightarrow \chi=2-1\Leftrightarrow \chi=1$.

**δ)** Για κάθε $\chi \in R$ ισχύει $\chi^2 + 4 \rangle 0$ ,οπότε η παράσταση ορίζεται όταν $\chi - 1 \rangle 0 \Leftrightarrow \chi \rangle 1$.

Για χ=2 έχουμε $K = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$. Αρα

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}} + \frac{\sqrt[3]{2^2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} + \frac{\sqrt[3]{2^2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1} = \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2^2}\sqrt{2} - \sqrt[3]{2^2} =$$

$$= \sqrt[3]{2^2}\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^4}\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^7} = 2\sqrt[6]{2}.$$

## Θ Ε Μ Α 13ο

**α) Αν $\alpha \geq 0$ ,να δώσετε τον ορισμό της ν-οστής ρίζας του α.**

**β) Αν $\alpha \geq 0$ ,ισχύει $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}$ Σ Λ.**

**γ) Να βρείτε τα $\chi \in R$ για τα οποία δεν ορίζεται η παράσταση $\Pi = \dfrac{1}{\sqrt{\left|\chi^5+3\right|}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$.**

**Αν χ=0 να εκτελέσετε τις πράξεις και να βρείτε την Π.**

**δ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in R$ για την οποία η εξίσωση $\lambda\sqrt[3]{|\chi|\sqrt{|\chi|}} = \sqrt{|\chi|}$ με άγνωστο τον χ είναι αόριστη.**

**Λύση**

**α)** Ν-οστή ρίζα του α ονομάζουμε τον μη αρνητικό αριθμό χ, για τον οποίο ισχύει: $\chi^\nu = \alpha$.

**β)** Είναι σωστό.

**γ)** Η παράσταση δεν ορίζεται όταν, $\left|\chi^5 + 3\right| = 0 \Leftrightarrow \chi^5 + 3 = 0 \Leftrightarrow \chi^5 = -3 \Leftrightarrow \chi = -\sqrt[5]{3}$.

Για χ=0 έχουμε $\Pi = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{6-3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

**δ)** $\lambda\sqrt[3]{|\chi|\sqrt{|\chi|}} = \sqrt{|\chi|} \Leftrightarrow \lambda\sqrt[3]{\sqrt{|\chi|^3}} = \sqrt{|\chi|} \Leftrightarrow \lambda\sqrt[6]{|\chi|^3} - \sqrt{|\chi|} = 0 \Leftrightarrow \lambda\sqrt{|\chi|} - \sqrt{|\chi|} = 0 \Leftrightarrow$

$(\lambda - 1)\sqrt{|\chi|} = 0$.

Η εξίσωση είναι αόριστη,αν και μόνο αν λ-1=0⇔λ=1.

## Θ Ε Μ Α 14ο

**Τρεις φίλοι ξεκίνησαν το Σάββατο από την Αθήνα με το αυτοκίνητό τους να πάνε εκδρομή στους Δελφούς.Κόντευαν να φτάσουν,αλλά τους τέλειωνε η βενζίνη.Συνάντησαν ένα βοσκό και τον ρώτησαν πόσο απέχει το πλησιέστερο βενζινάδικο.**

**Αυτός τους απάντησε: Το πλησιέστερο από εδώ βενζινάδικο απέχει χ χιλιόμετρα.**

**Ο χ είναι ακέραιος μικρότερος του 5 και η απόσταση των αριθμών χ και 5 είναι μικρότερη του 2.**

**α) Βοηθήστε τους τρεις φίλους να υπολογίσουν πόσο απέχει από το σημείο που βρίσκονται το βενζινάδικο.**

**β) Αν η απόσταση του βενζινάδικου από τους Δελφούς είναι $\alpha \leq 5$ και ισχύει: $\alpha^3 - (\chi+1)^3 \geq 4\alpha(\alpha - 5)$ ,να βρείτε το α.**

**Λύση**

α) Είναι d(χ,5)<2 $\Leftrightarrow |\chi - 5| \langle 2 \Leftrightarrow -2 \langle \chi - 5 \langle 2 \Leftrightarrow -2+5 \langle \chi \langle 2+5 \Leftrightarrow 3 \langle \chi \langle 7 \quad (1)$.Επειδή ο χ είναι ακέραιος μικρότερος του 5,λόγω της (1) προκύπτει χ=4.

Άρα το πλησιέστερο βενζινάδικο απέχει 4Km.

β) Για χ=4 η σχέση γράφεται:

$$\alpha^3-5^3 \geq 4\alpha(\alpha-5) \Leftrightarrow (\alpha-5)(\alpha^2+5\alpha+25) \geq 4\alpha(\alpha-5) \Leftrightarrow (\alpha-5)(\alpha^2+5\alpha+25)-4\alpha(\alpha-5) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-5)(\alpha^2+\alpha+25) \geq 0.$$

Επειδή το α εκφράζει απόσταση είναι α>0,οπότε από την τελευταία σχέση προκύπτει $\alpha-5 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 5$ (2).Από τη (2) και το γεγονός ότι $\alpha \leq 5$ προκύπτει α=5.
Άρα το βενζινάδικο απέχει από τους Δελφούς 5Km.

## Θ Ε Μ Α 15ο

**Δύο χωριά Α,Β που βρίσκονται σε κοντινή απόσταση,αποφάσισαν να φτιάξουν ένα υδραγωγείο από το οποίο θα παίρνουν νερό και τα δύο.**
**Η θέση του υδραγωγείου από τη μελέτη που έγινε καθορίζεται από ένα συντελεστή λ>0 για τον οποίο ισχύει** $\left(\left|\lambda-\frac{1}{16}\right|-\frac{1}{4}\right)\sqrt{\sqrt[3]{\chi}}=\frac{\sqrt{10}}{10}\sqrt{\psi-1975}$ **,όπου χ,ψ η απόσταση της θέσης του υδραγωγείου σε μέτρα από τα Α,Β αντίστοιχα.Να βρείτε τον λ όταν η θέση του υδραγωγείου απέχει από το Α 1000m και από το Β 2000m.**

**Λύση**

Για χ=1000 και ψ=2000 έχουμε $\left(\left|\lambda-\frac{1}{16}\right|-\frac{1}{4}\right)\sqrt{10}=\frac{\sqrt{10}}{10}5 \Leftrightarrow \left|\lambda-\frac{1}{16}\right|-\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\left|\lambda-\frac{1}{16}\right|=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \lambda-\frac{1}{16}=\pm\frac{3}{4}.$

- $\lambda-\frac{1}{16}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{4}+\frac{1}{16} \Leftrightarrow \lambda=\frac{13}{16}.$
- $\lambda-\frac{1}{16}=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow \lambda=-\frac{3}{4}+\frac{1}{16}=-\frac{11}{16}.$ Απορρίπτεται γιατί λ>0.

Άρα η ζητούμενη τιμή του λ είναι $\lambda=\frac{13}{16}.$