

## ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Στο παρακάτω άρθρο θα αναφερθούμε σε μερικά αξιοσημείωτα σημεία της Γεωμετρίας του τριγώνου χωρίς να εξαντλήσουμε το θέμα, από ένα σύνολο σημείων που το καθένα τους έχει ξεχωριστή θέση στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

**I**

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

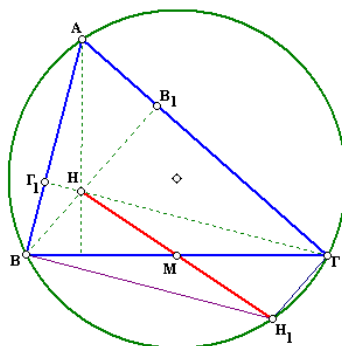
#### Κύκλος Euler ή κύκλος των εννέα σημείων

##### Θεώρημα

- A.** Τα συμμετρικά σημεία του ορθοκέντρου τριγώνου ως προς τα μέσα των πλευρών του βρίσκονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.
- B.** Το συμμετρικά σημεία του ορθοκέντρου τριγώνου ως προς τις πλευρές του βρίσκονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.

##### Απόδειξη

**A.**

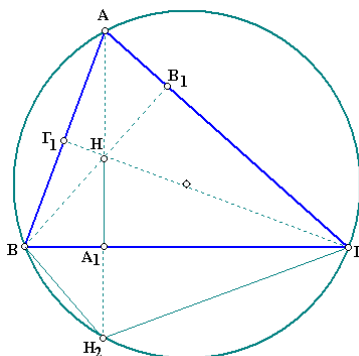


Έστω  $H$  το ορθόκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

$\widehat{H\Gamma_1A} + \widehat{HB_1A} = 2\perp$ . Άρα το τετράπλευρο  $A\Gamma_1HB_1$  είναι εγγράψιμο, οπότε  $\hat{A} + \widehat{\Gamma_1HB_1} = 2\perp \Leftrightarrow \hat{A} + \widehat{BHT} = 2\perp$  (1).

Έστω  $H_1$  το συμμετρικό του  $H$  ως προς το μέσο  $M$  του  $B\Gamma$ . Το τετράπλευρο  $BHH_1\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιές του διχοτομούνται. Άρα  $\widehat{BH_1\Gamma} = \widehat{BHT}$ , οπότε από την (1) έχουμε  $\hat{A} + \widehat{BH_1\Gamma} = 2\perp$ , δηλαδή το τετράπλευρο  $ABH_1\Gamma$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο, ο οποίος είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

B.



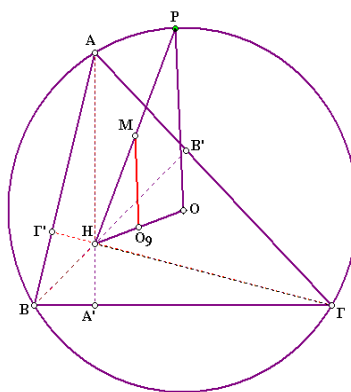
Έστω  $H_2$  το συμμετρικό του ορθοκέντρου  $H$  ως προς την  $B\Gamma$ . Τα τρίγωνα  $BHH_2, \Gamma HH_2$  είναι ισοσκελή αφού η  $B\Gamma$  είναι μεσοκάθετος του  $HH_2$ , οπότε  $\widehat{BH_2H} = \widehat{BHH_2}$  και  $\widehat{\Gamma H_2H} = \widehat{\Gamma HH_2}$ . Άρα  $\widehat{BH_2\Gamma} = \widehat{BHT}$  ως άθροισμα ίσων γωνιών.

Το τετράπλευρο  $AG_1HB_1$  είναι εγγράψιμο οπότε  $\hat{A} + \widehat{\Gamma_1HB_1} = 2\angle \Leftrightarrow \hat{A} + \widehat{BHT} = 2\angle \Leftrightarrow \hat{A} + \widehat{BH_2\Gamma} = 2\angle$ . Άρα το τετράπλευρο  $ABH_2\Gamma$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο, ο οποίος είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

### Θεώρημα

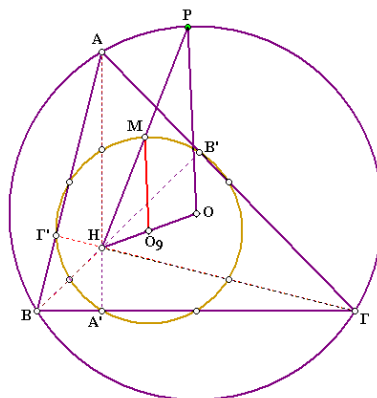
Έστω ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Τα ίχνη των υψών του τριγώνου, τα μέσα των πλευρών του και τα μέσα των αποστάσεων του ορθοκέντρου από τις κορυφές του τριγώνου είναι σημεία ενός κύκλου. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται κύκλος των εννέα σημείων ή κύκλος Euler.

Απόδειξη



Έστω  $H$  το ορθόκεντρο και  $P$  τυχαίο σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου  $(O, R)$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Ας είναι  $M, O_9$  τα μέσα των τμημάτων  $HP$  και  $HO$  αντίστοιχα. Στο τρίγωνο  $HOP$  έχουμε  $O_9M = \frac{1}{2}OP \Leftrightarrow O_9M = \frac{1}{2}R$ . Άρα το  $M$  είναι σημείο του κύκλου  $(O_9, \frac{1}{2}R)$ .

**Αντίστροφα:** Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο  $O_9$ , το μέσο του  $HO$  και ακτίνα  $\frac{R}{2}$ .



Αν  $M$  τυχαίο σημείο του κύκλου  $(O_9, \frac{1}{2}R)$  και  $P$  το σημείο που το  $HM$  τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $AB\Gamma$ , τότε στο τρίγωνο  $HOP$  έχουμε  $O_9M = \frac{OP}{2}$  και αφού  $O_9$  είναι μέσο του τμήματος  $HO$ , το  $M$  είναι μέσο του τμήματος  $HP$ .

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του μέσου των τμημάτων  $HP$  με  $P$  σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι ο κύκλος  $(O_9, \frac{1}{2}R)$ .

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα μέσα των πλευρών και τα ίχνη των υψών του τριγώνου  $AB\Gamma$ , οφείλουν να βρίσκονται πάνω στον κύκλο  $(O_9, \frac{1}{2}R)$ .

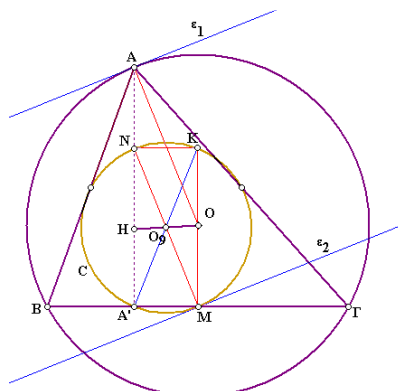
Τελικά τα μέσα των τμημάτων  $HA, HB, HG$ , τα μέσα των πλευρών του τριγώνου καθώς και τα ίχνη των υψών του είναι ομοκυκλικά σημεία.

**Παρατήρηση 1.** Το κέντρο του κύκλου Euler είναι το μέσο του τμήματος που ορίζεται από το ορθόκέντρο του τριγώνου και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, η δε ακτίνα του είναι το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

**Παρατήρηση 2.**

**α.** Η εφαπτομένη του κύκλου Euler στο μέσο μιας πλευράς του τριγώνου είναι παράλληλη στην εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου στην απέναντι απέναντι κορυφή του τριγώνου.

Πράγματι:



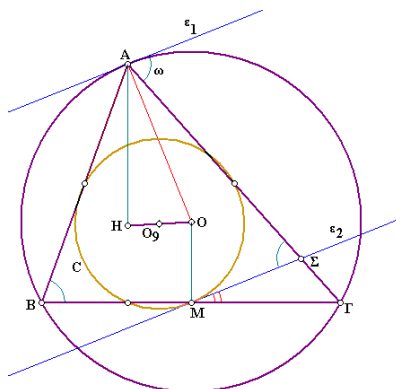
Έστω  $C$  ο κύκλος Euler,  $H$  το ορθόκέντρο του τριγώνου και  $M$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . Επίσης  $O_9, O$  τα κέντρα του  $C$  και του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και  $\epsilon_1, \epsilon_2$  οι εφαπτομένες του περιγεγραμμένου κύκλου και του  $C$  στα σημεία  $A, M$  αντίστοιχα.

Φέρνουμε τη διάμετρο  $A'K$  του  $C$ . Επειδή  $\widehat{A'MO} = 1\perp$  το  $OM$  διέρχεται από το  $K$ . Το τετράπλευρο  $NA'MK$  προφανώς είναι ορθογώνιο, οπότε το  $MN$  είναι διάμετρος του  $C$ .

Το  $N$  είναι μέσο του  $HA$  και το  $O_9$  είναι μέσο του  $HO$ . Άρα  $NO_9 // AO \Rightarrow NM // AO$ .

Είναι  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$  ως κάθετες ευθείες σε παράλληλα τμήματα.

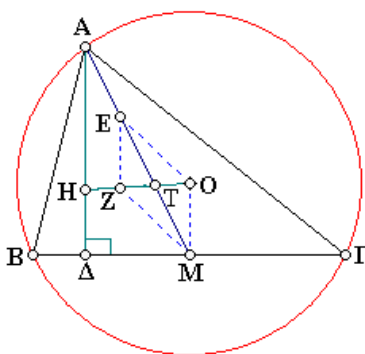
**Παρατήρηση:**  $AH = 2OM$ . Επίσης αν  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ , τότε  $\widehat{\Sigma M \Gamma} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ , όπου  $\Sigma$  το σημείο τομής της  $\varepsilon_2$  με την  $AG$ .



Πράγματι: Αφού  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$  είναι  $\widehat{M \Sigma A} = \hat{\omega} = \hat{B} \Rightarrow \widehat{\Sigma M \Gamma} + \hat{\Gamma} = \hat{B} \Leftrightarrow \widehat{\Sigma M \Gamma} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ .

**β.** Αν  $G$  το κέντρο βάρους,  $H$  το ορθόκентρο και  $O$  το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ , τότε το  $G$  είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος  $HO$  και ισχύει  $HG = 2GO$ .

Πράγματι:

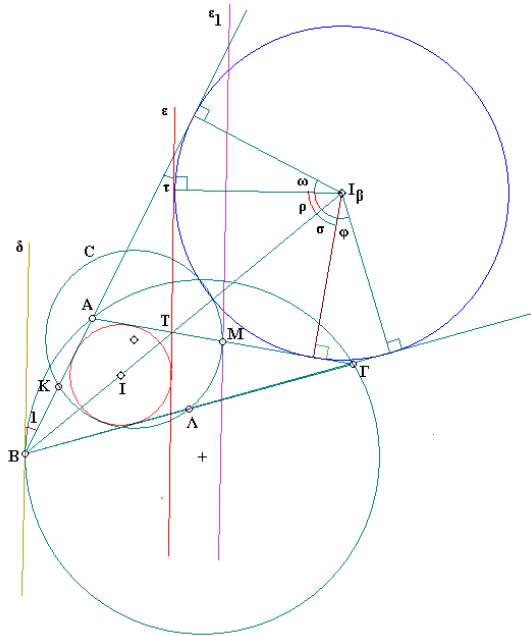


Αν  $T$  το σημείο τομής της διαμέσου  $AM$  με το  $HO$ , το  $T$  είναι εσωτερικό σημείο του  $HO$ . Έστω  $E, Z$  τα μέσα των  $AT, HT$  αντίστοιχα. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το τετράπλευρο  $EZMO$  είναι παραλληλόγραμμο ( $EZ // \frac{AH}{2}$  και  $OM // \frac{AH}{2}$ ). Άρα  $TM = TE = EA \Rightarrow TM = \frac{1}{3}AM$ , οπότε το  $T$  ταυτίζεται με το κέντρο βάρους  $G$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και είναι  $HG = 2GZ \Rightarrow HG = 2GO$ .

Η ευθεία  $GO$  ονομάζεται ευθεία Euler.

**Παρατήρηση 3.** Μία εσωτερική κοινή εφαπτομένη του εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου είναι παράλληλη στην εφαπτομένη του κύκλου Euler στο μέσο της πλευράς του τριγώνου που είναι η δεύτερη κοινή εσωτερική εφαπτομένη.

Πράγματι:



Έστω  $\varepsilon_1$  η εφαπτομένη του κύκλου Euler  $C$  στο μέσο  $M$  της  $AG$ ,  $\varepsilon$  κοινή εσωτερική εφαπτομένη του εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και  $\delta$  εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου στο  $B$ .

Έχουμε  $\hat{\omega} = \hat{\tau}$  ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες και για τον ίδιο λόγο  $\hat{\phi} = \hat{\Gamma}$ .

$\hat{\omega} + \hat{\rho} = \hat{\sigma} + \hat{\phi} \stackrel{\hat{\rho}=\hat{\sigma}}{\Leftrightarrow} \hat{\omega} = \hat{\phi} \Leftrightarrow \hat{\tau} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\tau} = \widehat{B_1} \Rightarrow \varepsilon // \delta$ . Όμως είναι  $\varepsilon_1 // \delta$  (παρατήρηση 2), οπότε  $\varepsilon // \varepsilon_1$ .

**Σημείωση:** Ο κύκλος των εννέα σημείων από λάθος αποδίδεται στον Euler. Το 1821 οι μαθηματικοί Brianchon και Poncelet είχαν περιγράψει τον κύκλο των εννέα σημείων. Το 1822 ο Γερμανός μαθηματικός Feuerbach ανακάλυψε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα του κύκλου αυτού (την αναφέρουμε παρακάτω ως θεώρημα Feuerbach) και αμέσως μετά ο Γάλλος μαθηματικός Terquem απέδειξε και αυτός την ύπαρξη του κύκλου των εννέα σημείων. Έτσι ο κύκλος των εννέα σημείων ονομάζεται και κύκλος Feuerbach καθώς και κύκλος Terquem.

**Σχόλιο:** Leonhard Euler (1707-1783), Ελβετός μαθηματικός με σημαντικές ανακαλύψεις σε ένα ευρύ φάσμα των μαθηματικών και της Φυσικής.

Ο Euler εισήγαγε τα κυριότερα αλγεβρικά σύμβολα που χρησιμοποιούμε και σήμερα, διέυρυνε την αναλυτική μέθοδο που εισήγαγε ο Καρτέσιος και την εφάρμοσε εκτός από τη Γεωμετρία και στην Μηχανική. Δημιούργησε την Υδροδυναμική και τα μαθηματικά πεδία της θεωρίας των Γράφων και Λογισμού μεταβολών, περιέγραψε μαθηματικά την πολύπλοκη κίνηση της σβούρας και συνέβαλε αποφασιστικά στη θεωρία αριθμών, θεωρία άπειρων σειρών και στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.

## II

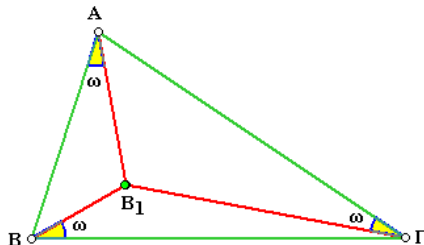
### 1. Σημεία Brocard

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Υπάρχει ακριβώς ένα σημείο  $B_1$  εσωτερικό του τριγώνου έτσι ώστε να ισχύει  $\widehat{B_1AB} = \widehat{B_1\Gamma A} = \widehat{B_1B\Gamma}$ .

Το σημείο  $B_1$  ονομάζεται πρώτο σημείο Brocard του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

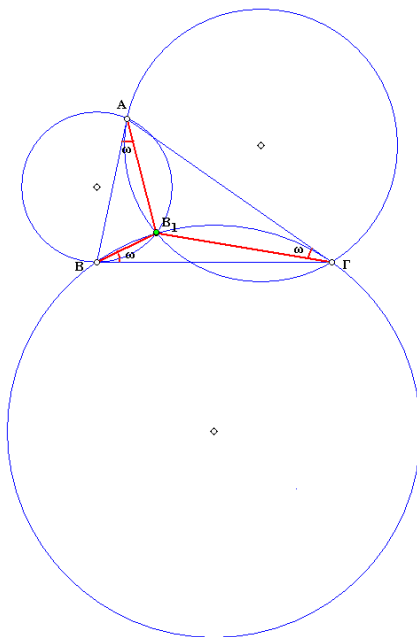
Απόδειξη

Ανάλυση:

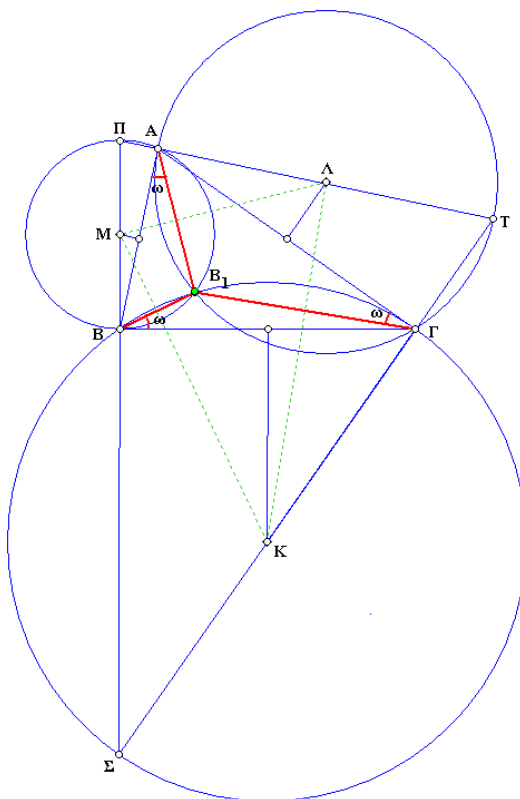


Υποθέτουμε ότι υπάρχει εσωτερικό σημείο  $B_1$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  έτσι ώστε να ισχύει  $\widehat{B_1B\Gamma} = \widehat{B_1\Gamma A} = \widehat{B_1AB} = \hat{\omega}$ . Τότε είναι  $\widehat{B B_1 \Gamma} = 180^\circ - \hat{\omega} - \widehat{B_1 \Gamma B} = 180^\circ - \hat{\omega} - (\hat{\Gamma} - \hat{\omega}) \Leftrightarrow \widehat{B B_1 \Gamma} = 180^\circ - \hat{\Gamma}$ . Όμοια έχουμε  $\widehat{A B_1 \Gamma} = 180^\circ - \hat{A}$  και  $\widehat{A B_1 B} = 180^\circ - \hat{B}$ .

Άρα το σημείο  $B_1$  είναι η τομή τόξων κύκλων με χορδή  $B\Gamma, A\Gamma$  και  $AB$  που δέχονται γωνία  $180^\circ - \hat{\Gamma}$ ,  $180^\circ - \hat{A}$ ,  $180^\circ - \hat{B}$  αντίστοιχα.



Αφού  $\widehat{B_1\Gamma A} = \widehat{B_1B\Gamma} = \hat{\omega}$ , η  $A\Gamma$  είναι εφαπτομένη στο  $\Gamma$  του κύκλου που έχει χορδή την  $B\Gamma$ . Όμοια οι πλευρές  $B\Gamma, AB$  είναι εφαπτομένες των κύκλων που έχουν χορδές τις  $AB, A\Gamma$ , στα  $B$  και  $A$  αντίστοιχα.

**Κατασκευή:**

Σχ.1

Φέρνουμε κάθετους στις πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$  στις κορυφές του οι οποίες τέμνονται στα σημεία  $\Sigma, \Gamma, \Pi$ .

Οι μεσοκάθετες των πλευρών του τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνουν τις προηγούμενες κάθετες στα  $K, \Lambda, M$  τα οποία είναι μέσα των  $\Sigma\Gamma, \Lambda\Gamma, B\Pi$  αντίστοιχα (Σχ.1).

Κατασκευάζουμε τους κύκλους  $(K, K\Gamma), (\Lambda, \Lambda A)$ . Προφανώς ο πρώτος κύκλος διέρχεται από τα σημεία  $B, \Gamma, \Sigma$ , εφάπτεται της  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Gamma$  και ο δεύτερος διέρχεται από τα σημεία  $A, \Gamma, \Gamma$  και εφάπτεται της  $AB$  στο σημείο  $A$ . Έστω  $B_1$  το δεύτερο σημείο των κύκλων. Το  $B_1$  είναι το ζητούμενο σημείο.

**Απόδειξη:** Τα τετράπλευρα  $B\Sigma\Gamma B_1, A\Gamma\Gamma B_1$  είναι εγγεγραμμένα στους αντίστοιχους κύκλους, οπότε  $\widehat{B_1B_1B_1} = \widehat{\Sigma\Gamma B_1}$  και  $\widehat{B_1A B_1} = \widehat{B_1\Gamma\Gamma}$ ,  $\widehat{B_1B_1B_1} + \widehat{B_1A B_1} = \widehat{\Sigma\Gamma B_1} + \widehat{B_1\Gamma\Gamma} = 180^\circ$ . Άρα το τετράπλευρο  $AB_1B\Pi$  είναι εγγράψιμο, οπότε ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $AB_1B$  διέρχεται από το  $\Pi$  και αφού  $\widehat{B_1A B_1} = 90^\circ$  η  $B\Pi$  είναι διάμετρος του κύκλου του οποίου το κέντρο είναι το σημείο τομής της  $B\Pi$  με τη μεσοκάθετο της πλευράς  $AB$  δηλαδή το  $M$ . Ο κύκλος  $(M, MB)$  εφάπτεται της πλευράς  $B\Gamma$  στο  $B$ .

Έχουμε  $\widehat{B_1A B_1} = \widehat{B_1B_1\Gamma}$  (γωνία χορδής και εφαπτομένης). Όμοια  $\widehat{B_1\Gamma A} = \widehat{B_1B_1\Gamma}$ .

Άρα έχουμε  $\widehat{B_1A B_1} = \widehat{B_1\Gamma A} = \widehat{B_1B_1\Gamma} = \omega$ .

**Διερεύνηση:** Οι κύκλοι  $(\Lambda, \Lambda A), (K, K\Gamma)$  τέμνονται και το δεύτερο κοινό τους σημείο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Πράγματι: Το τόξο χορδής  $B\Gamma$  που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο  $(B\Gamma, A)$  και το τόξο χορδής  $A\Gamma$  που περιέχεται στο ημιεπίπεδο  $(A\Gamma, B)$  ένα μέρος τους εξ'ολοκλήρου βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο (αφού οι αντίστοιχοι κύκλοι εφάπτονται των  $A\Gamma$  στο  $\Gamma$  και  $AB$  στο  $A$  αντίστοιχα). Επειδή τα άκρα των τόξων είναι εκατέρωθεν του άλλου τόξου θα έχουν κοινό σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Άρα το πρόβλημα έχει πάντα λύση.

**Βασική ιδιότητα**

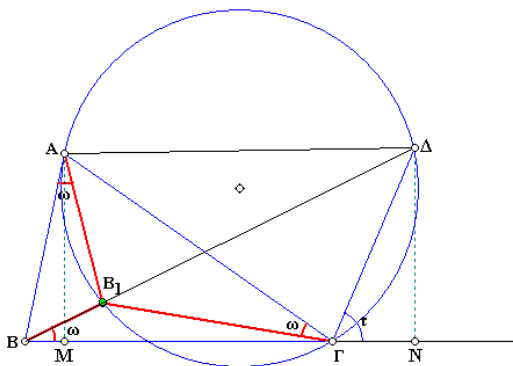
Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $B_1$  το πρώτο σημείο Brocard του τριγώνου. Είναι  $\widehat{B_1AB} = \widehat{B_1\Gamma A} = \widehat{B_1B\Gamma} = \omega$  τότε ισχύουν:

i.  $\sigma\phi\omega = \sigma\phi A + \sigma\phi B + \sigma\phi\Gamma.$

ii.  $\sigma\phi\omega = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4(AB\Gamma)},$  όπου  $\alpha, \beta, \gamma$  οι πλευρές του τριγώνου.

Απόδειξη

i.



Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $AB_1\Gamma$  εφάπτεται της πλευράς  $AB$  στο  $A$  (βλέπε κατασκευή του  $B_1$ ) και η  $BB_1$  τέμνει τον κύκλο στο  $\Delta$ .

Έστω  $M, N$  οι προβολές των  $A, \Delta$  πάνω στην  $B\Gamma$ .

$\widehat{A\Delta B_1} = \widehat{B_1AB_1} = \hat{\omega}$  (χορδής και εφαπτομένης), οπότε  $A\Delta \parallel B\Gamma$ .

$\widehat{B_1A\Gamma} = \widehat{A\Delta\Gamma}$  (χορδής και εφαπτομένης)  $\Rightarrow \hat{A} = \hat{\iota}$ .

Το τετράπλευρο  $AMN\Delta$  είναι ορθογώνιο, οπότε  $AM = \Delta N$ .

$$\text{Στο τρίγωνο } N\Delta B: \sigma\phi\omega = \frac{BN}{\Delta N} = \frac{BM + M\Gamma + \Gamma N}{\Delta N} = \frac{BM}{\Delta N} + \frac{M\Gamma}{\Delta N} + \frac{\Gamma N}{\Delta N} = \frac{BM}{AM} + \frac{M\Gamma}{AM} + \frac{\Gamma N}{\Delta N} = \sigma\phi B + \sigma\phi\Gamma + \sigma\phi\iota \Leftrightarrow \sigma\phi\omega = \sigma\phi A + \sigma\phi B + \sigma\phi\Gamma.$$

ii. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ : Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\eta\mu A \Leftrightarrow \sigma\eta\mu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}.$

Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε:  $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{\alpha}{2R}$ , όπου  $R$  η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

$$\sigma\phi A = \frac{\sigma\eta\mu A}{\eta\mu A} \Leftrightarrow \sigma\phi A = \frac{R(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)}{\alpha\beta\gamma}. \text{ Όμοια έχουμε } \sigma\phi B = \frac{R(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)}{\alpha\beta\gamma} \text{ και } \sigma\phi\Gamma = \frac{R(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)}{\alpha\beta\gamma}.$$

Για το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  έχουμε:  $(AB\Gamma) = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}.$

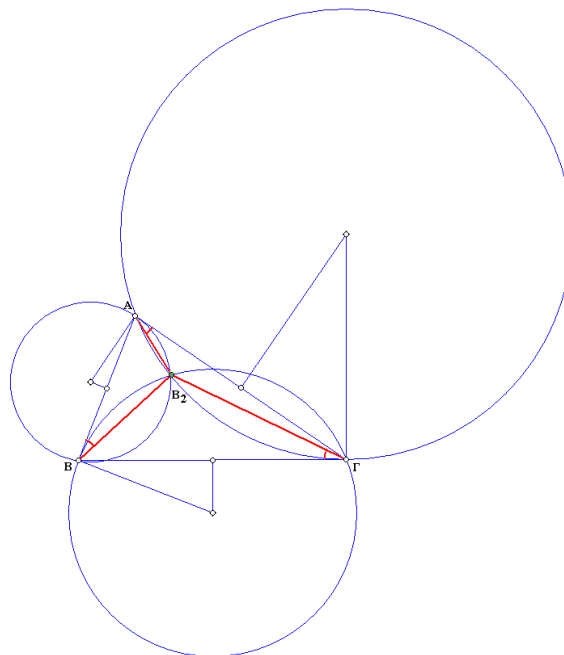
$$\sigma\phi A + \sigma\phi B + \sigma\phi\Gamma = \frac{R(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2) + R(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2) + R(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)}{\alpha\beta\gamma} = \frac{R(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\phi A + \sigma\phi B + \sigma\phi\Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4 \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4(AB\Gamma)} \text{ και με βάση το (i) είναι } \sigma\phi\omega = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4(AB\Gamma)}.$$

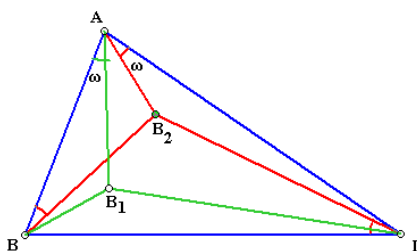
**Σημείωση:**

**1.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  υπάρχει ακριβώς ένα εσωτερικό σημείο  $B_2$  για το οποίο ισχύει  $\widehat{B_2A\Gamma} = \widehat{B_2\Gamma B} = \widehat{B_2B A}$ . Το  $B_2$  ονομάζεται δεύτερο σημείο Brocard του τριγώνου  $AB\Gamma$  και προσδιορίζεται όπως το  $B_1$ .





2. Αν  $\widehat{B_2A\Gamma} = \widehat{B_2\Gamma B} = \widehat{B_2BA} = \omega'$  και  $\widehat{B_1AB} = \widehat{B_1\Gamma A} = \widehat{B_1B\Gamma} = \omega$  έχουμε:  
 $\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma$  και  $\sigma\varphi\omega' = \sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma$ , οπότε  $\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi\omega' \Rightarrow \omega = \omega'$ .  
 Η γωνία  $\omega$  ονομάζεται γωνία Brocard του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



3. Αν  $\omega$  η γωνία Brocard ενός τριγώνου τότε είναι  $0 < \omega \leq \frac{\pi}{6}$  με  $\omega = \frac{\pi}{6}$  όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο τα σημεία Brocard του τριγώνου ταυτίζονται με το κέντρο βάρους του τριγώνου.
4. Το τρίγωνο  $K\Lambda M$  (Σχ.1) είναι όμοιο με το τρίγωνο  $AB\Gamma$  και έχει ίδιο το πρώτο σημείο Brocard με το πρώτο σημείο Brocard του  $AB\Gamma$ . Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι το δεύτερο σημείο Brocard του τριγώνου  $K\Lambda M$ .

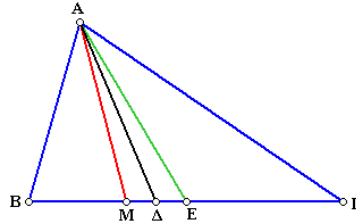
**Σχόλιο:** Henri Brocard (1865 – 1867), Γάλλος στρατιωτικός – μαθηματικός και όχι μόνο με μεγάλη συνεισφορά στη γεωμετρία του τριγώνου. Ο Brocard έφτασε στην ανακάλυψη των σημείων που φέρουν το όνομά του από τη μελέτη του προβλήματος των τριών σκυλιών που κυνηγούν το ένα το άλλο.

## 2. Σημείο Lemoine

### Βασικές γνώσεις

**1.Ορισμός:** Έστω ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $AD, AE$  διχοτόμος και διάμεσος αντίστοιχα του τριγώνου.

Αν  $M$  είναι το συμμετρικό σημείο του  $E$  ως προς το  $\Delta$ , τότε το τμήμα  $AM$  ονομάζεται συμμετροδιάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$  από τη κορυφή  $A$ .

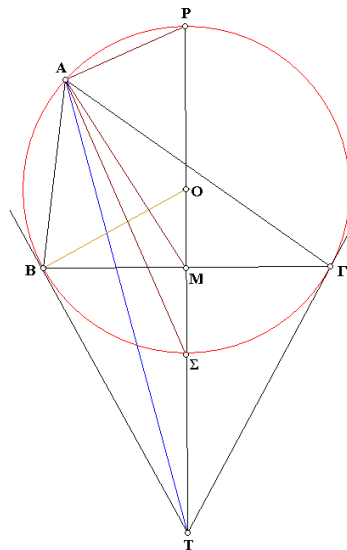


- Προφανώς το τρίγωνο έχει τρεις συμμετροδιαμέσους.
- $\widehat{BAM} = \widehat{EAG}$ .
- $\widehat{BAE} = \widehat{MAG}$ .

### Ιδιότητες της συμμετροδιαμέσου

**1<sup>η</sup>.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Η συμμετροδιάμεσος του τριγώνου από την κορυφή  $A$  διέρχεται από το σημείο τομής των εφαπτομένων του περιγεγραμμένου κύκλου στις κορυφές  $B, \Gamma$  του τριγώνου.

Απόδειξη



Έστω  $T$  το σημείο τομής των εφαπτομένων του περιγεγραμμένου κύκλου  $(O, R)$  στα σημεία  $B, \Gamma$ .

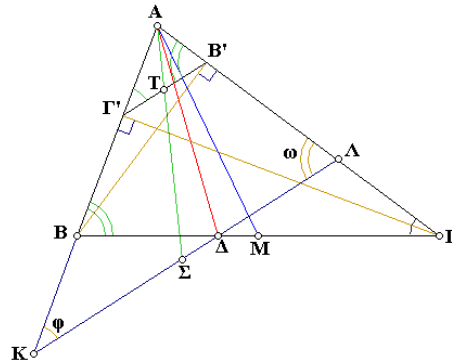
Το  $TO$  είναι μεσοκάθετος του  $B\Gamma$  και τέμνει το κύκλο στα σημεία  $\Sigma, P$ .

Είναι  $\frac{\Sigma M}{\Sigma T} = \frac{R-OM}{OT-R}$  και  $\frac{PM}{PT} = \frac{R+OM}{R+OT}$ .

$\frac{\Sigma M}{\Sigma T} = \frac{PM}{PT} \Leftrightarrow \frac{R-OM}{OT-R} = \frac{R+OM}{R+OT} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow R^2 = OM \cdot OT \Leftrightarrow OB^2 = OM \cdot OT$ , που ισχύει λόγω του ορθογωνίου τριγώνου  $BOT$ . Άρα τα σημεία  $\Sigma, P$  είναι συζυγή αρμονικά των  $T, M$ , οπότε η  $A\Sigma$  είναι εσωτερική διχοτόμος του τριγώνου  $ATM$  και επομένως η  $AT$  είναι συμμετροδιάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$  από την κορυφή  $A$ .

**2<sup>η</sup>.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα ύψη του  $BB', \Gamma\Gamma'$ . Η συμμετροδιάμεσος του τριγώνου από την κορυφή  $A$  διέρχεται από το μέσο του  $\Gamma'B'$ .

### Απόδειξη



Έστω  $AM, AD$  η διάμεσος και η διχοτόμος αντίστοιχα του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Από το  $\Delta$  φέρνουμε παράλληλο προς την  $\Gamma'B'$  που τέμνει τις πλευρές του τριγώνου στα  $K, \Lambda$ .

Το τετράπλευρο  $B\Gamma'B'\Gamma$  είναι εγγράψιμο αφού  $\widehat{B\Gamma'\Gamma} = \widehat{B'B'\Gamma} = 90^\circ$ . Άρα  $\widehat{A\Gamma'B'} = \hat{\Gamma}$  και  $\widehat{AB'\Gamma'} = \hat{B}$ .

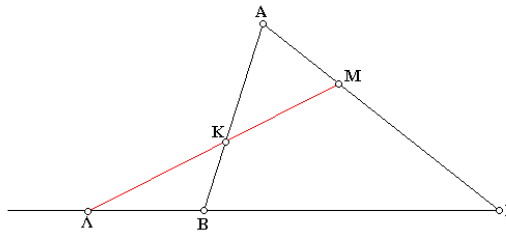
Όμως  $\widehat{A\Gamma'B'} = \hat{\varphi}$  και  $\widehat{AB'\Gamma'} = \hat{\omega}$ . Άρα  $\hat{\varphi} = \hat{\Gamma}$  και  $\hat{\omega} = \hat{B}$ .

Τα τρίγωνα  $AB\Delta, A\Delta\Lambda$  είναι ίσα, αφού έχουν κοινή πλευρά την  $A\Delta$ ,  $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Delta A\Lambda}$  και  $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Delta\Lambda}$  (κριτήριο  $\Gamma - \Pi - \Gamma$ ). Άρα  $\Delta B = \Delta\Lambda$ . Επίσης τα τρίγωνα  $A\Delta K, A\Delta\Gamma$  είναι ίσα γιατί έχουν κοινή πλευρά την  $A\Delta$ ,  $\widehat{KA\Delta} = \widehat{\Delta A\Gamma}$  και  $\widehat{A\Delta K} = \widehat{A\Delta\Gamma}$  (κριτήριο  $\Gamma - \Pi - \Gamma$ ). Άρα  $\Delta K = \Delta\Gamma$ . Έτσι έχουμε  $B\Gamma = K\Lambda$ .

Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $AK\Lambda$  έχουν την  $A\Delta$  κοινή διχοτόμο. Στρέφουμε την  $B\Gamma$  γύρω από το  $\Delta$  έτσι ώστε το  $\Gamma$  να συμπίσει με το  $K$ , τότε το  $B$  θα συμπίσει με το  $\Lambda$ . Το  $B\Gamma$  θα ταυτιστεί με το  $K\Lambda$ , οπότε το μέσο  $M$  του  $B\Gamma$  θα ταυτιστεί με το μέσο  $\Sigma$  του  $K\Lambda$ . Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta M, A\Delta\Sigma$  είναι ίσα. Έτσι έχουμε ότι το  $A\Sigma$  είναι συμμετρικό του  $AM$  ως προς την  $A\Delta$ . Συνεπώς η  $A\Sigma$  είναι συμμετροδιάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$  από την κορυφή  $A$ . Έστω  $T$  το σημείο τομής της  $A\Sigma$  με το  $\Gamma'B'$ . Είναι  $\frac{\Gamma'T}{K\Sigma} = \frac{TB'}{\Sigma\Lambda} \Rightarrow \Gamma'T = TB'$ . Άρα το  $T$  είναι μέσο του  $\Gamma'B'$ .

### 2. Θεώρημα Μενελάου

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Αν  $K, \Lambda, M$  σημεία των πλευρών του  $AB, B\Gamma, A\Gamma$  αντίστοιχα (ένα από τα τρία ή και τα τρία εξωτερικά σημεία των πλευρών) τότε ισχύει:

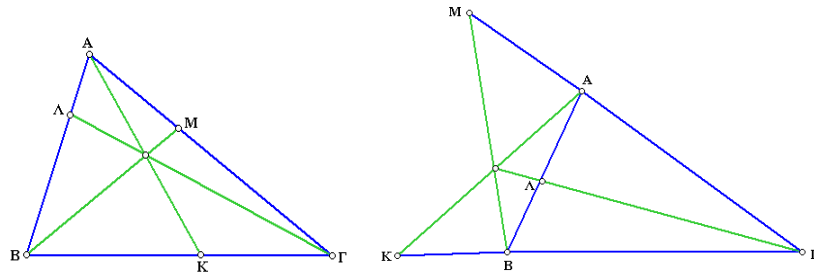


Τα σημεία  $K, \Lambda, M$  είναι συνευθειακά  $\Leftrightarrow \frac{KA}{KB} \cdot \frac{B\Lambda}{\Lambda\Gamma} \cdot \frac{M\Gamma}{MA} = 1$ .

- Η ευθεία  $\Lambda KM$  ονομάζεται διατέμνουσα του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

### 3. Θεώρημα Ceva

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  θεωρούμε τα σημεία  $K, \Lambda, M$  στους φορείς των πλευρών του τριγώνου με ένα ή και τα τρία να είναι εσωτερικά σημεία των πλευρών του τριγώνου.



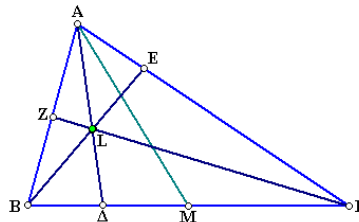
Ισχύει: Οι ευθείες  $AK, BM, ΓΛ$  διέρχονται από το ίδιο σημείο  $\Leftrightarrow \frac{KB}{KΓ} \cdot \frac{MΓ}{MA} \cdot \frac{AA}{AB} = 1$ .

Τώρα μπορούμε να δούμε το παρακάτω θεώρημα.

### Θεώρημα

Οι συμμετροδιάμεσοι τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Lemoine του τριγώνου.

Απόδειξη



Έστω  $AD, BE, ΓZ$  οι συμμετροδιάμεσοι του τριγώνου  $ABΓ$  και  $AM$  η διάμεσός του.

$$\widehat{BAΔ} = \widehat{MAG} \Rightarrow \frac{(ABΔ)}{(AMΓ)} = \frac{AB \cdot AΔ}{AM \cdot AΓ} \Leftrightarrow \frac{BΔ}{MΓ} = \frac{AB \cdot AΔ}{AM \cdot AΓ} \quad (1).$$

$$\widehat{BAM} = \widehat{ΔAΓ} \Rightarrow \frac{(BAM)}{(ΔAΓ)} = \frac{AB \cdot AM}{AΔ \cdot AΓ} \Leftrightarrow \frac{BM}{ΔΓ} = \frac{AB \cdot AM}{AΔ \cdot AΓ} \quad (2).$$

Πολλαπλασιάζουμε τις (1),(2) κατά μέλη και παίρνουμε  $\frac{BΔ}{ΔΓ} = \frac{AB^2}{AΓ^2}$ .

Όμοια έχουμε  $\frac{ΓE}{EA} = \frac{BΓ^2}{AB^2}$  και  $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AΓ^2}{BΓ^2}$ . Άρα  $\frac{BΔ}{ΔΓ} \cdot \frac{ΓE}{EA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{AB^2}{AΓ^2} \cdot \frac{BΓ^2}{AB^2} \cdot \frac{AΓ^2}{BΓ^2} = 1$ .

Σύμφωνα με το θεώρημα Ceva οι συμμετροδιάμεσοι διέρχονται από το ίδιο σημείο  $L$ .

**Παρατήρηση:** Στο τρίγωνο  $ABΓ$  η  $AD$  είναι συμμετροδιάμεσος από την κορυφή  $A$  αν και μόνο αν

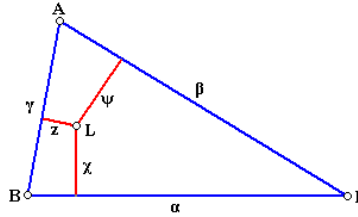
$$\frac{ΔB}{ΔΓ} = \frac{AB^2}{AΓ^2} \quad (1). \text{ Από την (1) έχουμε } \frac{ΔB}{ΔΓ} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \Leftrightarrow \frac{ΔB}{ΔΓ + ΔB} = \frac{\gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} \Leftrightarrow ΔB = \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2}, \text{ οπότε } ΔΓ = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2 + \gamma^2}.$$

Όμοια συμπεράσματα έχουμε και για τις άλλες συμμετροδιάμεσους.

### Μερικές από τις σημαντικότερες ιδιότητες του σημείου Lemoine.

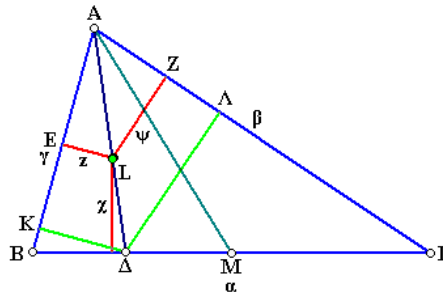
Έστω  $L$  το σημείο Lemoine ενός τριγώνου  $ABΓ$ .

**1. i.** Οι αποστάσεις  $\chi, \psi, z$  του σημείου  $L$  από τις πλευρές του τριγώνου είναι ανάλογες των πλευρών,



δηλαδή  $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ .

ii. Το L είναι το εσωτερικό σημείο του τριγώνου που το άθροισμα  $\chi^2 + \psi^2 + z^2$  είναι ελάχιστο.  
Απόδειξη



i. Έστω AM η διάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$ ,  $\Delta K \perp AB$  και  $\Delta L \perp A\Gamma$ .

Είναι  $\widehat{BAD} = \widehat{MAG} \Rightarrow \frac{(AB\Delta)}{(AM\Gamma)} = \frac{\gamma \cdot AD}{\beta \cdot AM}$  (1) και  $\widehat{BAM} = \widehat{DAG} \Rightarrow \frac{(ABM)}{(\Delta A\Gamma)} = \frac{\gamma \cdot AM}{\beta \cdot AD}$  (2).

Πολλαπλασιάζουμε τις (1),(2) κατά μέλη και δεδομένου ότι  $(ABM) = (AM\Gamma)$  παίρνουμε

$$\frac{(AB\Delta)}{(\Delta A\Gamma)} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\gamma \cdot \Delta K}{\frac{1}{2}\beta \cdot \Delta L} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \Leftrightarrow \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{\gamma}{\beta}$$
 (3). Από την ομοιότητα των τριγώνων  $AK\Delta$ ,  $AEL$  και  $A\Delta L$ ,  $ALZ$

έχουμε:  $\frac{\Delta K}{z} = \frac{AD}{AL} = \frac{\Delta L}{\psi} \Rightarrow \frac{\Delta K}{z} = \frac{\Delta L}{\psi} \Leftrightarrow \frac{\Delta L}{\Delta K} = \frac{\psi}{z}$  (4).

Από τις (3),(4) παίρνουμε  $\frac{\psi}{z} = \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\psi}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ . Ομοια προκύπτει ότι  $\frac{\psi}{\beta} = \frac{\chi}{\alpha}$ . Άρα  $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ .

ii. Θέτουμε  $(AB\Gamma) = E$ . Είναι  $(BL\Gamma) + (\Gamma LA) + (ALB) = E \Leftrightarrow \alpha z + \beta \psi + \gamma z = 2E$ .

Από την ταυτότητα Lagrange έχουμε:

$$(\chi^2 + \psi^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\chi + \beta\psi + \gamma z)^2 = (\alpha\psi - \beta\chi)^2 + (\beta z - \gamma\psi)^2 + (\alpha z - \gamma\chi)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\chi^2 + \psi^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 4E^2 = (\alpha\psi - \beta\chi)^2 + (\beta z - \gamma\psi)^2 + (\alpha z - \gamma\chi)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$(\chi^2 + \psi^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq 4E^2 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 + z^2 \geq \frac{4E^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$
 (I).

Η (I) ισχύει ως ισότητα όταν:  $\alpha\psi - \beta\chi = 0 \Leftrightarrow \frac{\chi}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta}$  και  $\beta z - \gamma\psi = 0 \Leftrightarrow \frac{\psi}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$  και  $\alpha z - \gamma\chi = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\chi}{\alpha} = \frac{z}{\gamma},$$
 οι οποίες ισχύουν μόνο για το σημείο Lemoine του τριγώνου.

Άρα το μόνο εσωτερικό σημείο του τριγώνου  $AB\Gamma$  που το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεών του από τις πλευρές του τριγώνου είναι ελάχιστο, είναι το σημείο Lemoine με ελάχιστη τιμή  $\frac{4E^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ .

**Παρατήρηση:** α. Θέτουμε  $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = t \Rightarrow \chi = \alpha t, \psi = \beta t, z = \gamma t$ .

$$\text{Όμως } \chi^2 + \psi^2 + z^2 = \frac{4E^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)t^2 = \frac{4E^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \Leftrightarrow t^2 = \frac{4E^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} \Leftrightarrow t = \frac{2E}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

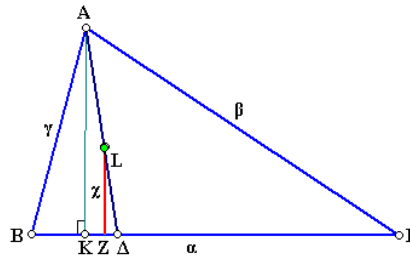
$$\text{Έτσι έχουμε } \chi = \frac{2\alpha E}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \psi = \frac{2\beta E}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, z = \frac{2\gamma E}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

β. Το σημείο Lemoine L του τριγώνου  $AB\Gamma$  χωρίζει τη συμμετροδιάμεσο AD εσωτερικά σε λόγο  $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2}$ .

Ανάλογο συμπέρασμα έχουμε και για τις άλλες συμμετροδιαμέσους.

Πράγματι:

Έστω  $AK$  το ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$  και  $\chi$  η απόσταση του  $L$  από την πλευρά  $AB$ .

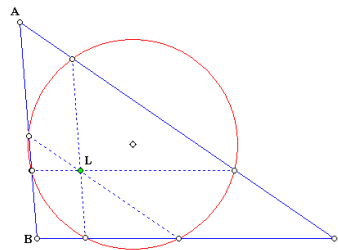


Από την ομοιότητα των τριγώνων  $ZL\Delta, K\Delta\Delta$  έχουμε  $\frac{\chi}{AK} = \frac{L\Delta}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{2\alpha E}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)AK} = \frac{L\Delta}{A\Delta} \Leftrightarrow$

$$\frac{2\alpha \frac{1}{2}\alpha AK}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)AK} = \frac{L\Delta}{A\Delta} \Leftrightarrow L\Delta = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} A\Delta \text{ και } LA = A\Delta - L\Delta \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow LA = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} A\Delta.$$

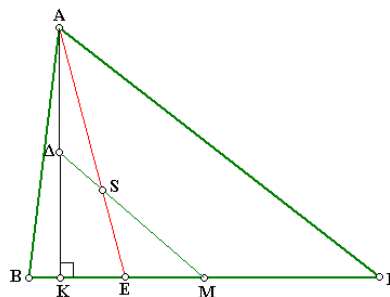
Άρα  $\frac{LA}{L\Delta} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2}$  που σημαίνει ότι το σημείο Lemoine χωρίζει τη συμμετροδιάμεσο  $A\Delta$  εσωτερικά σε λόγο  $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2}$ .

**2.** Οι παράλληλες από το  $L$  προς τις πλευρές του τριγώνου τέμνουν τις πλευρές του τριγώνου σε σημεία που βρίσκονται στον ίδιο κύκλο. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται κύκλος Lemoine του τριγώνου.



**3.** Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το μέσο ενός ύψους μη ισοσκελούς τριγώνου με το μέσο της πλευρά που αντιστοιχεί το ύψος διέρχεται από το  $L$ .

Απόδειξη



Έστω  $AB < A\Gamma$ ,  $\Delta$  το μέσο του ύψους  $AK$  και  $M$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . Η  $AE$  είναι συμμετροδιάμεσος από την κορυφή  $A$  και έστω  $S$  το σημείο τομής της με το  $\Delta M$ .

Στο τρίγωνο  $KAE$  η  $MS\Delta$  είναι διατέμνουσα, οπότε από το θεώρημα Μενελάου έχουμε:

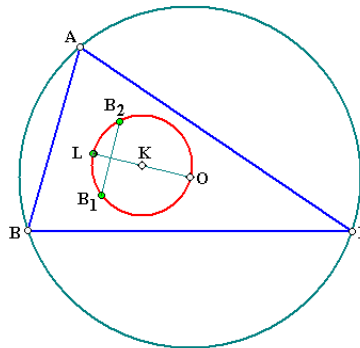
$$\frac{AK}{KE} \cdot \frac{ME}{EA} \cdot \frac{AS}{SA} = 1 \Leftrightarrow \frac{SE}{SA} = \frac{ME}{MK} \quad (1).$$

Έχουμε:  $ME = MB - EB = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} = \frac{\alpha(\beta^2 - \gamma^2)}{2(\beta^2 + \gamma^2)}$  (2) (Παρατήρηση θεωρήματος συμμετροδιαμέσων).

Από το δεύτερο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε:  $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot MK \Leftrightarrow MK = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\alpha}$  (3).

Με βάση τις (2),(3) από την (1) παίρνουμε  $\frac{SE}{SA} = \frac{\alpha^2}{\beta^2+\gamma^2} \Leftrightarrow \frac{SA}{SE} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$ , δηλαδή το  $S$  χωρίζει εσωτερικά τη συμμετροδιάμεσο  $AE$  σε λόγο  $\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$ . Αυτό όμως ισχύει μόνο για το σημείο Lemoine (παρατήρηση β), οπότε το  $S$  ταυτίζεται με το  $L$ . Συνεπώς τα σημεία  $\Delta, L, M$  είναι συνευθειακά.

**4.** Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από το  $L$  και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου είναι διάμετρος ενός κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Brocard του τριγώνου, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τη διάμετρο του κύκλου.

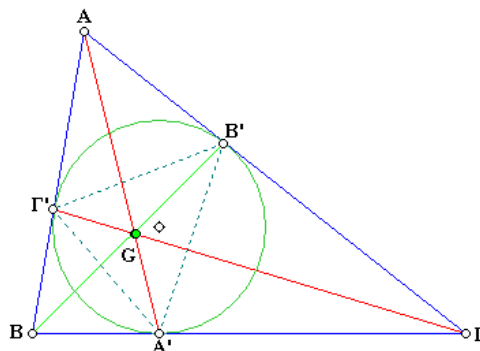


**Σχόλιο:** Emil Lemoine (1840 – 1912), Γάλλος μαθηματικός γεωμέτρης – πολιτικός μηχανικός με σημαντική συνεισφορά στη γεωμετρία του τριγώνου.

### 3. Σημείο Gergonne

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου εφάπτεται των πλευρών  $B\Gamma, A\Gamma, AB$  στα σημεία  $A', B', \Gamma'$  αντίστοιχα. Τα τμήματα  $AA', BB', \Gamma\Gamma'$  διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Gergonne του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Απόδειξη



Σχ.2

Έχουμε  $BA' = B\Gamma', \Gamma A' = \Gamma B'$  και  $AB' = A\Gamma'$ .

$\frac{A'B}{A'\Gamma'} \cdot \frac{B'\Gamma}{B'A'} \cdot \frac{\Gamma'A}{\Gamma'B} = \frac{\Gamma'B}{A'\Gamma'} \cdot \frac{A'\Gamma}{B'A'} \cdot \frac{B'A}{\Gamma'B} = 1$ . Σύμφωνα με το θεώρημα Ceva τα τμήματα  $AA', BB', \Gamma\Gamma'$  διέρχονται από το ίδιο σημείο  $G$ .

**Παρατήρηση 1.**  $\frac{GA}{GA'} \cdot \frac{GB}{GB'} \cdot \frac{GF}{GF'} = \frac{4R}{\rho}$ , όπου  $R$  η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και  $\rho$  η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Πράγματι: Στο τρίγωνο  $ABA'$  (Σχ.2) η  $\Gamma\Gamma'$  είναι διατέμνουσα οπότε από το θεώρημα Μενελάου έχουμε:

$$\frac{GA}{GA'} \cdot \frac{\Gamma A'}{\Gamma B} \cdot \frac{B\Gamma'}{\Gamma'A} = 1 \Leftrightarrow \frac{GA}{GA'} = \frac{\Gamma B}{\Gamma A'} \cdot \frac{\Gamma'A}{B\Gamma'} = \frac{\alpha}{\tau-\gamma} \cdot \frac{\tau-\alpha}{\tau-\beta} \Leftrightarrow \frac{GA}{GA'} = \frac{\alpha(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}. \text{ Όμοια έχουμε } \frac{GB}{GB'} = \frac{\beta(\tau-\beta)}{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)} \text{ και}$$

$$\frac{G\Gamma}{G\Gamma'} = \frac{\gamma(\tau-\gamma)}{(\tau-\beta)(\tau-\alpha)}.$$

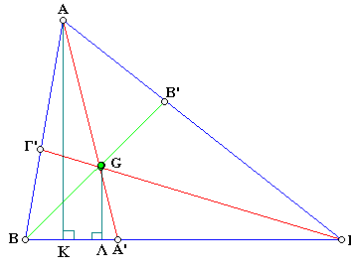
$$\text{Έτσι έχουμε: } \frac{GA}{GA'} \cdot \frac{GB}{GB'} \cdot \frac{G\Gamma}{G\Gamma'} = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \quad (1).$$

Για το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  έχουμε τους τύπους  $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ ,  $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$  και  $E = \tau\rho$ .

$$(1) \Leftrightarrow \frac{GA}{GA'} \cdot \frac{GB}{GB'} \cdot \frac{G\Gamma}{G\Gamma'} = \frac{4R \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}}{\frac{E^2}{\tau}} = \frac{4\tau RE}{E^2} = \frac{4\tau R}{\tau\rho} \Leftrightarrow \frac{GA}{GA'} \cdot \frac{GB}{GB'} \cdot \frac{G\Gamma}{G\Gamma'} = \frac{4R}{\rho}.$$

**Παρατήρηση 2.**  $\frac{GA}{AA'} + \frac{GB}{BB'} + \frac{G\Gamma}{\Gamma\Gamma'} = 2$

Πράγματι:



Έστω  $AK, GL$  τα ύψη των τριγώνων  $AB\Gamma, B\Gamma\Gamma'$  αντίστοιχα.

$$\frac{(B\Gamma\Gamma')}{(AB\Gamma)} = \frac{GA}{AK}. \text{ Από την ομοιότητα των τριγώνων } \Lambda GA', KAA' \text{ έχουμε: } \frac{GA}{AK} = \frac{GA'}{AA'} \Leftrightarrow \frac{GA}{AK} = \frac{AA'-GA}{AA'} = 1 - \frac{GA}{AA'}.$$

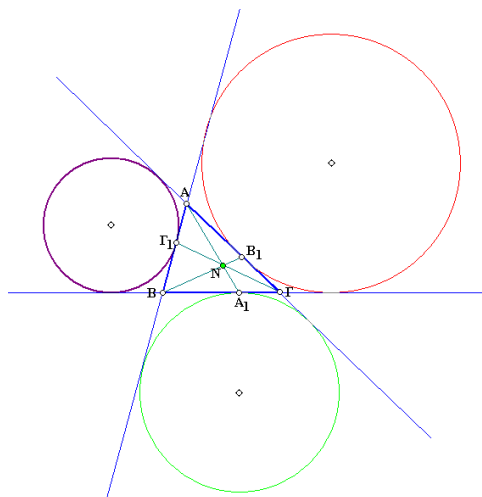
$$\text{Άρα } \frac{(B\Gamma\Gamma')}{(AB\Gamma)} = 1 - \frac{GA}{AA'}. \text{ Όμοια } \frac{(AG\Gamma')}{(AB\Gamma)} = 1 - \frac{GB}{BB'} \text{ και } \frac{(AGB)}{(AB\Gamma)} = 1 - \frac{G\Gamma}{\Gamma\Gamma'}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε: } \frac{(B\Gamma\Gamma')}{(AB\Gamma)} + \frac{(AG\Gamma')}{(AB\Gamma)} + \frac{(AGB)}{(AB\Gamma)} = 3 - \left( \frac{GA}{AA'} + \frac{GB}{BB'} + \frac{G\Gamma}{\Gamma\Gamma'} \right) \Leftrightarrow 1 = 3 - \left( \frac{GA}{AA'} + \frac{GB}{BB'} + \frac{G\Gamma}{\Gamma\Gamma'} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{GA}{AA'} + \frac{GB}{BB'} + \frac{G\Gamma}{\Gamma\Gamma'} = 2.$$

### Σημείωση:

**1.** Οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου  $AB\Gamma$  εφάπτονται των πλευρών  $B\Gamma, A\Gamma, AB$  στα σημεία  $A_1, B_1, \Gamma_1$  αντίστοιχα, τότε τα τμήματα  $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1$  διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Nagel του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Christian Heinrich von Nagel (1803-1882), Γερμανός γεωμέτρης).





**2.** Το τρίγωνο  $A'B'Γ'$  (Σχ.2) ονομάζεται τρίγωνο Gergonne του τριγώνου  $ABΓ$ .

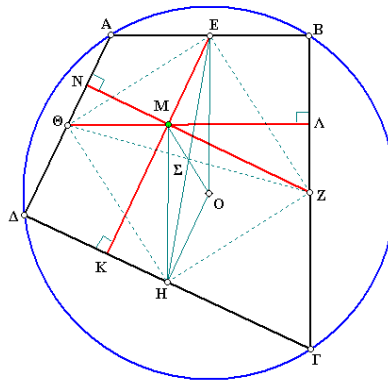
**3.** Το σημείο Gergonne του τριγώνου  $ABΓ$  (Σχ.2) είναι το σημείο Lemoinne του τριγώνου  $A'B'Γ'$ .

**Σχόλιο:** Joseph Gergonne (1771-1859), Γάλλος μαθηματικός. Το 1810 δημιούργισε το μαθηματικό περιοδικό Annales de Gergonne στο οποίο δημοσιεύτηκαν εργασίες διάσημων μαθηματικών όπως των Poncelet, Chasles, Galois και άλλων.

#### 4. Σημείο Mathot

Τετράπλευρο  $ABΓΔ$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ( $O$ ). Οι αποστάσεις των μέσων των πλευρών του από τις απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Mathot ή αντικέντρο του τετραπλεύρου.

Απόδειξη



Έστω  $E, Z, H, \Theta$  τα μέσα των πλευρών  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα του τετραπλεύρου. Το τετράπλευρο  $EZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγωνίες του  $EH, \Theta Z$  διχοτομούνται στο  $\Sigma$ . Έστω  $M$  το συμμετρικό σημείο του  $O$  ως προς το  $\Sigma$ . Το τετράπλευρο  $MEOH$  είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγωνίες του διχοτομούνται. Άρα  $EM // OH$  και αφού  $OH \perp \Delta\Gamma$  είναι  $EM \perp \Delta\Gamma \Rightarrow EK \perp \Delta\Gamma$ . Όμοια αποδεικνύεται ότι  $\Theta M \perp B\Gamma \Rightarrow \Theta\Lambda \perp B\Gamma$  και  $ZM \perp \Delta\Delta \Rightarrow ZN \perp \Delta\Delta$ .

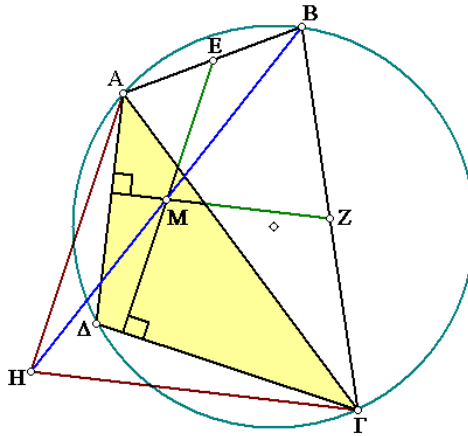
Άρα οι  $EH, ZN, \Theta\Lambda$  διέρχονται από το ίδιο σημείο  $M$ . Το  $M$  είναι το σημείο Mathot του τετραπλεύρου.

#### Μερικές ιδιότητες του σημείου Mathot

Όταν θα λέμε κυκλικό τετράπλευρο θα εννοούμε ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο.

**1.** Το συμμετρικό μιας κορυφής του κυκλικού τετραπλεύρου ως προς το σημείο Mathot του τετραπλεύρου είναι ορθόκεντρο του τριγώνου που ορίζουν οι άλλες τρεις κορυφές.

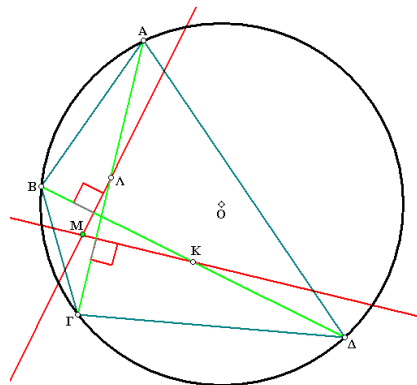
Πράγματι:



Ας είναι  $E, Z$  τα μέσα των πλευρών  $AB, B\Gamma$  αντίστοιχα του τετραπλεύρου.

Έστω  $H$  το συμμετρικό σημείο του  $B$  ως προς το σημείο Mathot  $M$ . Στο τρίγωνο  $ABH$  είναι  $EM \parallel AH$  και επειδή  $EM \perp \Delta\Gamma$  το  $AH$  είναι ύψος του τριγώνου  $A\Delta\Gamma$ . Όμοια στο τρίγωνο  $BH\Gamma$  είναι  $MZ \parallel H\Gamma$  και επειδή  $MZ \perp \Delta\Delta$  είναι  $\Gamma H \perp \Delta\Delta$ , οπότε το  $\Gamma H$  είναι ύψος του τριγώνου  $A\Delta\Gamma$ . Άρα το  $H$  είναι ορθόκεντρο του τριγώνου  $A\Delta\Gamma$ .

**2.** Σε κάθε κυκλικό τετράπλευρο οι κάθετες ευθείες από το μέσο της κάθε διαγωνίου στην άλλη διαγώνιο διέρχονται από το σημείο Mathot του τετραπλεύρου.

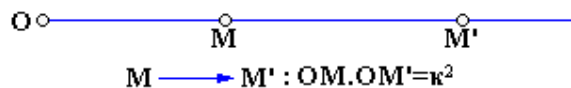


**3.** Οι κύκλοι Euler των τεσσάρων τριγώνων που ορίζονται από τις κορυφές του κυκλικού τετραπλεύρου διέρχονται από το σημείο Mathot του τετραπλεύρου.

## 5. Σημεία Feuerbach

### Βασικές γνώσεις

**1. Ορισμός:** Έστω  $O$  ένα σταθερό σημείο του επιπέδου. Αν σε σημείο  $M$  του επιπέδου διαφορετικό του  $O$  αντιστοιχεί ένα σημείο  $M'$  της ημιευθείας  $OM$  έτσι ώστε να ισχύει  $OM \cdot OM' = \kappa^2$  με  $\kappa$  σταθερό ευθύγραμμο τμήμα, λέμε ότι η αντιστοίχιση αυτή είναι μία αντιστοφή με πόλο ή κέντρο το σημείο  $O$  και δύναμη το  $\kappa^2$ .



• Η αντιστροφή με πόλο το  $O$  και δύναμη  $\kappa^2$  παριστάνεται  $In\nu(O, \kappa^2)$ . Το σημείο  $M'$  ονομάζεται αντιστροφή ή ομόλογο του  $M$  στην  $In\nu(O, \kappa^2)$ .

Αν  $S$  είναι ένα σχήμα και  $S'$  το σχήμα που προκύπτει ως το σύνολο των αντίστροφων σημείων του  $S$  κατά την  $Inv(O, \kappa^2)$ , τότε λέμε ότι το  $S'$  είναι το αντίστροφο του  $S$  κατά την  $Inv(O, \kappa^2)$ .

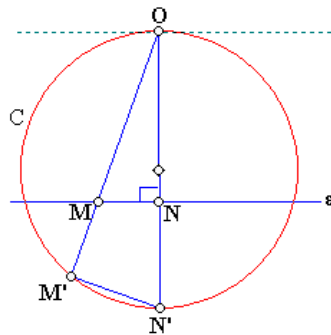
- Το αντίστροφο μιας ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής είναι η ευθεία  $\varepsilon$ .

## 2. Βασικά θεωρήματα

**Θ.1.** Έστω ευθεία  $\varepsilon$  και σημείο  $O$  που δεν ανήκει στην  $\varepsilon$ . Το αντίστροφο της  $\varepsilon$  κατά την  $Inv(O, \kappa^2)$  είναι κύκλος  $C$  που διέρχεται από το  $O$  και αντιστρόφως, το αντίστροφο του  $C$  κατά την  $Inv(O, \kappa^2)$  είναι η ευθεία  $\varepsilon$ .

**Απόδειξη**

Έστω τυχαίο σημείο  $M$  της  $\varepsilon$  και  $M'$  το αντίστροφό του κατά την αντιστροφή  $Inv(O, \kappa^2)$ . Φέρνουμε  $ON \perp \varepsilon$  και έστω  $N'$  το αντίστροφό του.



Είναι  $OM \cdot OM' = ON \cdot ON' = \kappa^2$ . Η ισότητα αυτή μας εξασφαλίζει ότι το τετράπλευρο  $MNN'M'$  είναι εγγράψιμο, οπότε  $\widehat{OM'N'} = 90^\circ$ . Άρα το σημείο  $M'$  βρίσκεται σε κύκλο με διάμετρο  $ON'$ . Άρα το αντίστροφο της ευθείας  $\varepsilon$  κατά την αντιστροφή  $Inv(O, \kappa^2)$  είναι ο κύκλος  $C$  που διέρχεται από το  $O$ .

**Αντίστροφα:** Έστω  $M'$  σημείο του κύκλου  $C$  διαφορετικό του  $O$ . Η  $OM'$  τέμνει την ευθεία  $\varepsilon$  στο  $M$ , οπότε ισχύει  $OM \cdot OM' = \kappa^2$ . Άρα το  $M$  είναι το αντίστροφο του  $M'$  κατά την  $Inv(O, \kappa^2)$ . Επομένως το αντίστροφο του  $C$  είναι η ευθεία  $\varepsilon$ .

**Παρατήρηση:** Το αντίστροφο κύκλου κατά την  $Inv(O, \kappa^2)$  με το  $O$  σημείο του κύκλου είναι ευθεία παράλληλη στην εφαπτομένη του κύκλου στο πόλο  $O$ .

**Θ.2.** Το αντίστροφο κύκλου κατά την  $Inv(O, \kappa^2)$  με το  $O$  να μην είναι σημείο του κύκλου είναι κύκλος.

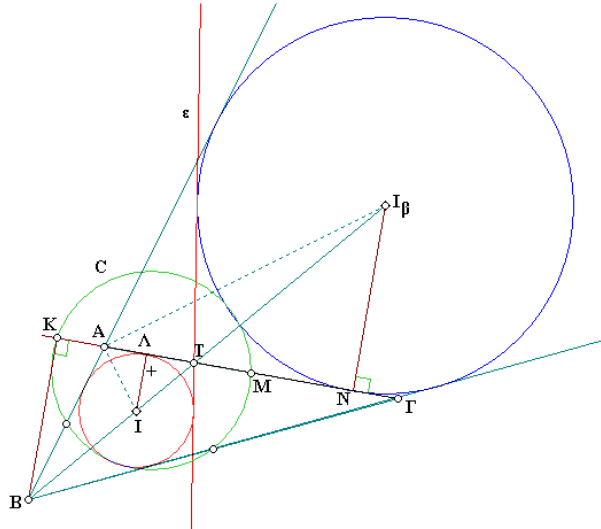
**Θ.3.** Αν η δύναμη αντιστροφής είναι ίση με τη δύναμη του πόλου ως προς κύκλο  $(O, R)$ , το αντίστροφο του κύκλου είναι ο εαυτός του.

**Θ.4.** Αν δύο γραμμές εφάπτονται στο  $M$  τότε και οι αντίστροφες γραμμές θα εφάπτονται στο  $M'$  το οποίο είναι το αντίστροφο του  $M$  κατά την αντιστροφή.

### Θεώρημα Feuerbach

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Ο κύκλος Euler του τριγώνου εφάπτεται του εγγεγραμμένου κύκλου και των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου. Τα σημεία επαφής ονομάζονται σημεία Feuerbach.

Απόδειξη



Έστω  $C$  ο κύκλος Euler και  $(I, \rho)$ ,  $(I_\beta, \rho_\beta)$  ο εγγεγραμμένος και παρεγγεγραμμένος αντίστοιχα κύκλος του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Είναι  $BK \perp A\Gamma$ ,  $I\Lambda \perp A\Gamma$  και  $I_\beta N \perp A\Gamma$ . Οι  $\varepsilon$ ,  $A\Gamma$  είναι κοινές εσωτερικές εφαπτομένες των κύκλων  $(I, \rho)$ ,  $(I_\beta, \rho_\beta)$ , οπότε τέμνονται πάνω στη διάκεντρο  $I I_\beta$  των κύκλων στο σημείο  $T$ .

Ας είναι  $M$  το μέσο της πλευράς  $A\Gamma$ . Ο κύκλος  $C$  διέρχεται από τα σημεία  $K, M$ .

Έχουμε  $AN = \tau - \gamma$ ,  $\Gamma\Lambda = \tau - \gamma$ , οπότε  $AN = \Gamma\Lambda \Leftrightarrow AM + MN = \Gamma M + M\Lambda \Leftrightarrow MN = M\Lambda$ , αφού  $AM = \Gamma M$ . Άρα το  $M$  είναι μέσο του  $\Lambda N$ .

Στο τρίγωνο  $ABT$  οι  $AI, AI_\beta$  είναι εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος αντίστοιχα, οπότε έχουμε

$$\frac{IB}{IT} = \frac{I_\beta B}{I_\beta T} \quad (1), I\Lambda // BK \Rightarrow \frac{IB}{IT} = \frac{\Lambda K}{\Lambda T} \quad (2), BK // I_\beta N \Rightarrow \frac{I_\beta B}{I_\beta T} = \frac{KN}{TN} \quad (3). \text{ Από την (1) λόγω των (2), (3) έχουμε}$$

$$\frac{\Lambda K}{\Lambda T} = \frac{KN}{TN} \Leftrightarrow \Lambda K \cdot TN = KN \cdot \Lambda T \Leftrightarrow (MK - M\Lambda)(TM + MN) = (MK + MN)(M\Lambda - MT) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$MT \cdot MK = M\Lambda^2$  (4). Από την (4) προκύπτει ότι το  $T$  είναι το αντίστροφο του  $K$  στην αντιστροφή με πόλο το  $M$  και δύναμη  $M\Lambda^2$ . Όμως το  $K \in C$  και  $M \in C$ , άρα το  $T$  θα ανήκει στο αντίστροφο του  $C$  κατά την  $\text{Inv}(M, M\Lambda^2)$  που θα είναι ευθεία παράλληλη στην εφαπτομένη του  $C$  στο  $M$ . Η ευθεία αυτή είναι η κοινή εφαπτομένη  $\varepsilon$  των κύκλων  $(I, \rho)$ ,  $(I_\beta, \rho_\beta)$  (παρατήρηση 3 από κύκλο Euler).

$\varepsilon \xrightarrow{\text{Inv}(M, M\Lambda^2)} C$ ,  $(I, \rho) \xrightarrow{\text{Inv}(M, M\Lambda^2)} (I, \rho)$ . Αφού η ευθεία  $\varepsilon$  και ο κύκλος  $(I, \rho)$  εφάπτονται τότε και τα αντίστροφά τους, οι κύκλοι  $C$ ,  $(I, \rho)$  εφάπτονται.

Είναι  $M\Lambda = MN$ , οπότε  $(I_\beta, \rho_\beta) \xrightarrow{\text{Inv}(M, MN^2)} (I_\beta, \rho_\beta)$  (βλέπε  $\theta_3$ ). Αφού η ευθεία  $\varepsilon$  και ο κύκλος  $(I_\beta, \rho_\beta)$  εφάπτονται και τα αντίστροφά τους, οι κύκλοι  $C$ ,  $(I_\beta, \rho_\beta)$  (βλέπε  $\theta_4$ ) θα εφάπτονται.

Όμοια ο  $C$  εφάπτεται και των άλλων παρεγγεγραμμένων κύκλων.

**Σχόλιο:** Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834), καθηγητής Μαθηματικών στο Γυμνάσιο του Erlangen στη Γερμανία.