Κ Ω Ν Ι Κ Ε Σ Τ Ο Μ Ε Σ

Τ Α Ξ Η Β
Θετική-Τεχνολογική κατεύθυνση

Ε Ν Ο Τ Η Τ Α 1η: Προσέγγιση βασικών θεμάτων

Θέμα 1ο:

Πολλές φορές συναντάμε θέματα που έχουν να κάνουν με την ευθεία ψ=λx+κ,λ≠0,να τέμνει κωνικές τομές (κύκλο-παραβολή-έλλειψη-υπερβολή) στα σημεία Α,Β και χρειαζόμαστε να εργαστούμε με τις συντεταγμένες των Α,Β.Βασική σκέψη είναι να θεωρήσουμε το σύστημα των εξισώσεων της ευθείας και της κωνικής τομής και να οδηγηθούμε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση.Οι ρίζες της εξίσωσης μας δίνουν τις τετμημένες ή τις τεταγμένες των Α,Β ανάλογα με τον άγνωστο που έχουμε στην εξίσωση.Για να αποφύγουμε τις πράξεις ενδέχεται να έχουμε εύκολα αυτό που ζητάμε κάνοντας χρήση των τύπων Vieta για τις ρίζες της εξίσωσης.

Σημείωση: Αν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0,\alpha\neq 0$ δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες ρ_1,ρ_2,τότε οι τύποι Vieta είναι: $\rho_1+\rho_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $\rho_1\rho_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Παραδείγματα

1ο: Θεωρούμε τον κύκλο $c: x^2+\psi^2=\rho^2$ και την ευθεία $\varepsilon:\psi=\lambda\chi+\kappa,\lambda\neq 0$.

i) Να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των κ,λ,ρ ώστε η ε να τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α,Β.

ii) Αν η ε τέμνει τον κύκλο στα Α,Β,να βρείτε το (ΑΒ).

Λύση

i) Θεωρούμε το σύστημα $\begin{cases}\chi^2+\psi^2=\rho^2 (1)\\ \psi=\lambda\chi+\kappa (2)\end{cases}$.Αντικαθιστούμε το ψ από την (2) στην (1) και παίρνουμε $\chi^2+(\lambda\chi+\kappa)^2=\rho^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (1+\lambda^2)\chi^2+2\kappa\lambda\chi+\kappa^2-\rho^2=0$ (Ε).

Η (Ε) είναι εξίσωση 2ου βαθμού με άγνωστο τον χ και διακρίνουσα $\Delta=4\kappa^2\lambda^2-4(1+\lambda^2)(\kappa^2-\rho^2)=\ldots=4(\rho^2+\lambda^2\rho^2-\kappa^2)$.

Η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο αν και μόνο αν $\Delta>0 \Leftrightarrow \rho^2+\lambda^2\rho^2-\kappa^2>0$,που είναι η ζητούμενη συνθήκη.

ii) Έστω $A(\chi_1,\psi_1), B(\chi_2,\psi_2)$.Τα χ_1,χ_2 είναι ρίζες της (Ε),οπότε από τους τύπους Vieta έχουμε

$\chi_1+\chi_2=-\dfrac{2\kappa\lambda}{1+\lambda^2}, \chi_1\chi_2=\dfrac{\kappa^2-\rho^2}{1+\lambda^2}$.Επίσης έχουμε $\psi_1=\lambda\chi_1+\kappa$ και $\psi_2=\lambda\chi_2+\kappa$ οπότε

$$\psi_1+\psi_2=\lambda(\chi_1+\chi_2)+2\kappa \Leftrightarrow \psi_1+\psi_2=-\frac{2\kappa\lambda^2}{1+\lambda^2}+2\kappa=\frac{2\kappa}{1+\lambda^2}.$$

$$(AB)=\sqrt{(\chi_2-\chi_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2}=\sqrt{(\chi_2-\chi_1)^2+(\lambda\chi_2-\lambda\chi_1)^2}=\sqrt{(\chi_2-\chi_1)^2+\lambda^2(\chi_2-\chi_1)^2}=$$

$$=\sqrt{(\chi_2-\chi_1)^2(1+\lambda^2)}=\sqrt{[(\chi_1+\chi_2)^2-4\chi_1\chi_2](1+\lambda^2)}=\sqrt{\left[\frac{4\kappa^2\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}-4\frac{\kappa^2-\rho^2}{1+\lambda^2}\right](1+\lambda^2)}=$$

$$=\sqrt{\frac{4\kappa^2\lambda^2}{1+\lambda^2}-4(\kappa^2-\rho^2)}=\ldots=2\sqrt{\frac{\rho^2+\lambda^2\rho^2-\kappa^2}{1+\lambda^2}}\,.$$

2ο: **Δίνεται η έλλειψη** $c:\chi^2+\frac{\psi^2}{2}=1$ **και η ευθεία ε:** $\psi=\lambda\chi+1$**.**

i) Δείξτε ότι για κάθε λ∈R η ε τέμνει την c σε δύο σημεία.

ii) Αν Κ,Λ τα κοινά σημεία της ε με την c,να βρείτε την εξίσωση της ε,όταν $\hat{K O \Lambda}=90^0$**.**

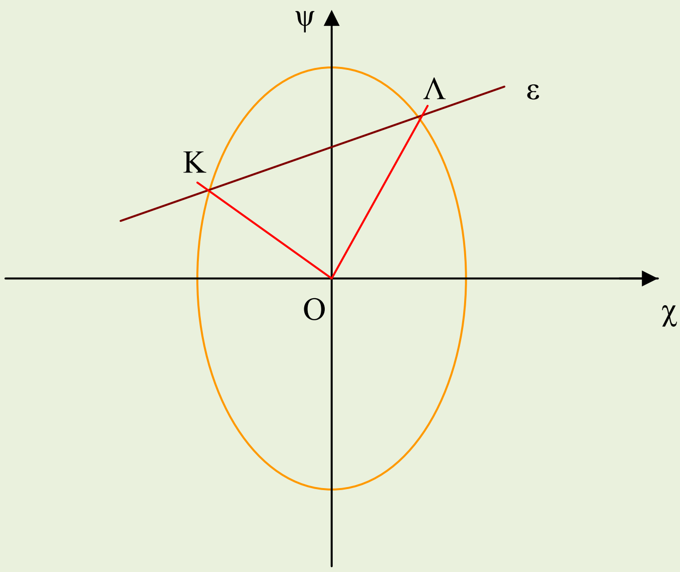
Λύση

i) Θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων $\chi^2+\frac{\psi^2}{2}=1$ (1) και $\psi=\lambda\chi+1$ (2).Αντικαθιστούμε το ψ από την (2) στην (1) και παίρνουμε $2\chi^2+(\lambda\chi+1)^2=2\Leftrightarrow(2+\lambda^2)\chi^2+2\lambda\chi-1=0$ (E).

Η διακρίνουσα της (Ε) είναι $\Delta=4\lambda^2+4(2+\lambda^2)>0$ για κάθε λ∈R.Αυτό σημαίνει ότι η ε τέμνει την c σε δύο σημεία

ii) Έστω ότι $K(\chi_1,\psi_1)$, $\Lambda(\chi_2,\psi_2)$ τα κοινά σημεία της ε με την c,τότε τα χ_1,χ_2 είναι ρίζες της (Ε),οπότε $\chi_1+\chi_2=-\frac{2\lambda}{2+\lambda^2}$ και $\chi_1\chi_2=-\frac{1}{2+\lambda^2}$.

$$\psi_1\psi_2=(\lambda\chi_1+1)(\lambda\chi_2+1)=\lambda^2\chi_1\chi_2+\lambda(\chi_1+\chi_2)+1=-\frac{\lambda^2}{2+\lambda^2}-\frac{2\lambda^2}{2+\lambda^2}+1=\frac{2-2\lambda^2}{2+\lambda^2}\,.$$



Έχουμε $\overrightarrow{OK}=(\chi_1,\psi_1),\overrightarrow{O\Lambda}=(\chi_2,\psi_2)$.Είναι $\hat{K O \Lambda}=90^0\Leftrightarrow\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{O\Lambda}=0\Leftrightarrow\chi_1\chi_2+\psi_1\psi_2=0\Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{2+\lambda^2}+\frac{2-2\lambda^2}{2+\lambda^2}=0 \Leftrightarrow 1-2\lambda^2=0 \Leftrightarrow \lambda^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα $\varepsilon:\psi=\frac{\sqrt{2}}{2}\chi+1$ ή ε:$\psi=-\frac{\sqrt{2}}{2}\chi+1$.

<u>Παρατήρηση</u>

Η έλλειψη έχει τις εστίες της στον άξονα $\psi'\psi$ με $\alpha^2=2$ και $\beta^2=1$,οπότε $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2 \Leftrightarrow$ $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=1 \Leftrightarrow \gamma=1$.Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι $E'(0,-1), E(0,1)$.
Η ευθεία ε διέρχεται από την εστία Ε.

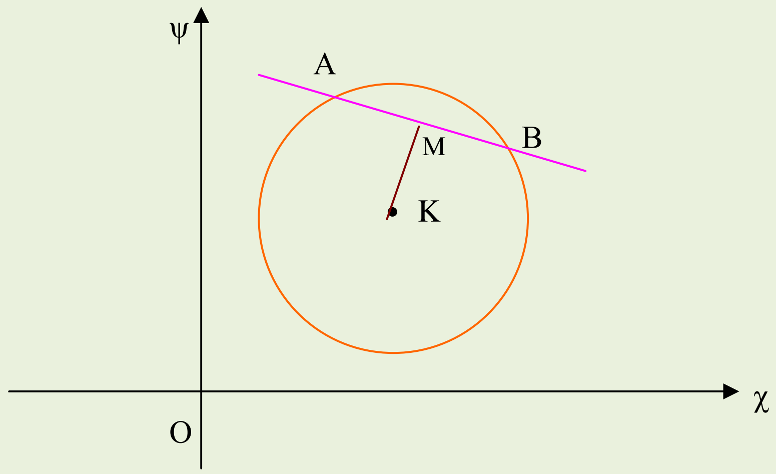
<u>Θέμα 2ο:</u>

Μια ευθεία ε μη παράλληλη στον άξονα $\psi'\psi$ τέμνει μια κωνική τομή c στα σημεία Α,Β.Δίνεται το σημείο Μ(κ,λ) (εσωτερικό της κωνικής τομής) και ζητάμε να βρούμε την εξίσωση της ε έτσι,ώστε το Μ να είναι μέσο του τμήματος ΑΒ.

<u>Βήμα 1ο</u>: Έστω $A(\chi_1,\psi_1), B(\chi_2,\psi_2)$.Οι συντεταγμένες των Α,Β επαληθεύουν την εξίσωση της c,οπότε έχουμε δύο σχέσεις με τα χ_1,ψ_1 και χ_2,ψ_2 αντίστοιχα.

<u>Βήμα 2ο</u>: Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις που δημιουργήσαμε στο 1ο βήμα με στόχο να παρουσιάσουμε τον λόγο $\frac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1}$, που είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ε.

<u>Σημείωση</u>: Στο κύκλο το παραπάνω θέμα αντιμετωπίζεται πιο εύκολα,γιατί αν Κ το κέντρο του κύκλου τότε είναι $KM \perp AB$,οπότε $\lambda_{KM}\lambda_{AB}=-1\,(1)$.Ο συντελεστής διεύθυνσης λ_{KM} βρίσκεται εύκολα,οπότε από την (1) βρίσκουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της ΑΒ και έτσι βρίσκουμε την εξίσωση της ε.

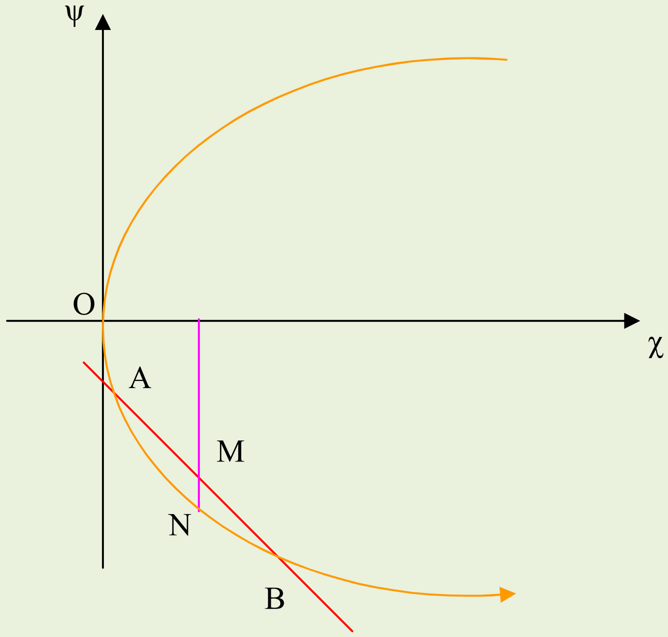


<u>Παράδειγμα</u>

Θεωρούμε την παραβολή c: $\psi^2 = 5\chi$ **και το σημείο Μ(2,-3).**
i) Δείξτε ότι το Μ είναι εσωτερικό σημείο της c.
ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που τέμνει την παραβολή στα Α,Β και το Μ είναι μέσο του ΑΒ.
Λύση

i) Έχουμε $p = \frac{5}{2}$,οπότε ο Οχ είναι άξονας συμμετρίας της c.

Από το Μ φέρνουμε παράλληλο προς τον άξονα $\psi'\psi$ που τέμνει το τμήμα της c που βρίσκεται στην 4η γωνία των αξόνων στο Ν,τότε $\mathrm{N}(2,\psi_0)$.Ν∈c $\Leftrightarrow \psi_0^2 = 10 \Leftrightarrow |\psi_0| = \sqrt{10} > |-3|$ (1).Από την (1) προκύπτει ότι το Μ είναι εσωτερικό σημείο της c.



Έστω $\mathrm{A}(\chi_1,\psi_1),\mathrm{B}(\chi_2,\psi_2)$.Πρέπει $\psi_1{}^2 = 5\chi_1$ (1) και $\psi_2{}^2 = 5\chi_2$ (2).Αφαιρούμε τις (2),(1) κατά μέλη και παίρνουμε $\psi_2{}^2 - \psi_1{}^2 = 5(\chi_2 - \chi_1) \Leftrightarrow (\psi_2 - \psi_1)(\psi_2 + \psi_1) = 5(\chi_2 - \chi_1)$ (3).

Επειδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ έχουμε $\frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = -3 \Leftrightarrow \psi_1 + \psi_2 = -6$,οπότε από την (3) έχουμε $-6(\psi_2 - \psi_1) = 5(\chi_2 - \chi_1)$ (4). Είναι $\chi_2 \neq \chi_1$ γιατί αν ήταν $\chi_1 = \chi_2$,τότε ΑΒ// $\psi'\psi$.Δεδομένου ότι ο Οχ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής θα είχαμε το Μ πάνω στον $\chi'\chi$.Άτοπο.

Άρα (4) $\Leftrightarrow \frac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1} = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow \lambda_{AB} = -\frac{5}{6}$.

Έτσι η εξίσωση της ε είναι $\psi + 3 = -\frac{5}{6}(\chi - 2) \Leftrightarrow 5\chi + 6\psi + 8 = 0$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2η: ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η: Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}(\chi_1,\lambda\chi_1),\mathrm{B}(\chi_2,-\lambda\chi_2),\lambda\neq 0$ και $\mathrm{M}(\mu,\nu)$ το μέσο του ΑΒ.

i) Να βρείτε τα χ_1,χ_2 συναρτήσει των μ,ν.

ii) Αν $\mathrm{K}(\chi_1,\chi_2),\Lambda(\mu,\frac{\nu}{\lambda})$,δείξτε ότι $|\overrightarrow{\mathrm{OK}}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}}|$.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής που διαγράφουν τα σημεία $P(\chi_1-\mu+1,\chi_2-\mu)$.

Λύση

i) Αφού το Μ είναι μέσο του ΑΒ πρέπει $\frac{\chi_1+\chi_2}{2}=\mu\Leftrightarrow \chi_1+\chi_2=2\mu$ (1)

και $\frac{\lambda\chi_1-\lambda\chi_2}{2}=\nu\Leftrightarrow \lambda\chi_1-\lambda\chi_2=2\nu\Leftrightarrow \chi_1-\chi_2=\frac{2\nu}{\lambda}$ (2).

Προσθέτουμε τις (1),(2) κατά μέλη και παίρνουμε $2\chi_1=2\mu+\frac{2\nu}{\lambda}\Leftrightarrow \chi_1=\mu+\frac{\nu}{\lambda}$.Αφαιρούμε από την (1) την (2) και έχουμε $2\chi_2=2\mu-\frac{2\nu}{\lambda}\Leftrightarrow \chi_2=\mu-\frac{\nu}{\lambda}$.

ii) $|\overrightarrow{\mathrm{OK}}|=\sqrt{\chi_1^2+\chi_2^2}\overset{i)}{=}\sqrt{(\mu+\frac{\nu}{\lambda})^2+(\mu-\frac{\nu}{\lambda})^2}=\sqrt{2\mu^2+2\frac{\nu^2}{\lambda^2}}=\sqrt{2}\sqrt{\mu^2+\frac{\nu^2}{\lambda^2}}=\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}}|$.

iii) Είναι $\chi_1-\mu+1=\frac{\nu}{\lambda}+1$ και $\chi_2-\mu=-\frac{\nu}{\lambda}$,άρα $P\left(\frac{\nu}{\lambda}+1,-\frac{\nu}{\lambda}\right)$.

Έστω (χ,ψ) τυχαίο σημείο από τα P,τότε για κάποια λ,ν έχουμε $\frac{\nu}{\lambda}+1=\chi$ (3) και $-\frac{\nu}{\lambda}=\psi$ (4).

Απαλοίφουμε από τις (3),(4) το $\frac{\nu}{\lambda}$ και βρίσκουμε χ+ψ=1 $\Leftrightarrow \chi+\psi-1=0$ (Ε).

Άρα τα σημεία P διαγράφουν την ευθεία με εξίσωση την (Ε).

2η: Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οχψ.Στο Ο έχουμε τοποθετήσει ένα προβολέα και στο σημείο Α(2,1) ένα εμπόδιο.Φωτίζουμε το Α και το φως ανακλώμενο τέμνει τον $\chi'\chi$ στο Β και σχηματίζει με τον $\chi'\chi$ γωνία 135^0.

Να βρείτε:

i) Το σημείο Β.

ii) Το σημείο Μ της ΑΒ που δέχεται τον ισχυρότερο φωτισμό.

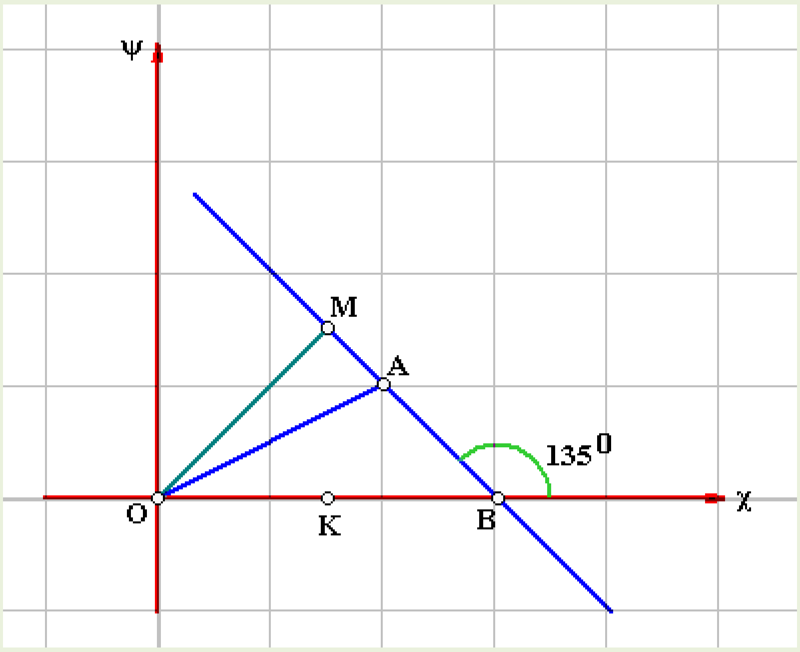
iii) Τον περιγεγγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΟΜΒ.

Λύση

i) Αφού η ΑΒ σχηματίζει με τον $\chi'\chi$ γωνία 135^o,ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι $\lambda_{AB}=\varepsilon\phi 135^o=-\varepsilon\phi 45^o=-1$.Άρα $AB:\psi-1=-(\chi-2)\Leftrightarrow \psi=-\chi+3$ (1).

Για ψ=0 από την (1) παίρνουμε χ=3.Άρα Β(3,0).

ii



Το σημείο της ΑΒ που θα δεχτεί τον ισχυρότερο φωτισμό είναι αυτό που θα είναι πιο κοντά στο Ο.Το πιο κοντινό όμως σημείο της ΑΒ από το Ο είναι η προβολή του Ο στην ΑΒ.Η προβολή λοιπόν του Ο στην ΑΒ είναι το ζητούμενο σημείο Μ.

$\mathrm{OM}\perp\mathrm{AB} \Leftrightarrow \lambda_{OM}\lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OM} = 1$. Άρα $\mathrm{OM}: \psi = \chi$ (2).

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (1),(2) θα βρούμε τις συντεταγμένες του Μ.

$(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \chi = -\chi + 3 \Leftrightarrow \chi = \frac{3}{2}$.Άρα $\mathrm{M}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

ii) Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Μ,ο περιγγεγραμμένος κύκλος του θα έχει κέντρο το μέσο Κ του ΟΒ δηλαδή $\mathrm{K}(\frac{3}{2},0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{(\mathrm{OB})}{2}=\frac{3}{2}$.

Άρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι $(\chi-\frac{3}{2})^2+\psi^2=\frac{9}{4}$.

<u>3η:</u> **Θεωρούμε τα σημεία** $\mathrm{M}(\lambda,\mu)$ **και τις ευθείες** $\varepsilon_1: \mu\chi-(\lambda+5)\psi+5\mu=0$ $\varepsilon_2: \mu\chi+(5-\lambda)\psi-5\mu=0$. **Αν οι ευθείες είναι κάθετες να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ.**

Λύση

Έστω $\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}$ τα παράλληλα διανύσματα στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ αντίστοιχα.Τότε $\overrightarrow{\delta_1}=\left(-(\lambda+5),-\mu\right)$ και $\overrightarrow{\delta_2}\left(5-\lambda,-\mu\right)$.Είναι $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\delta_1}\perp\overrightarrow{\delta_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{\delta_1}\overrightarrow{\delta_2}=0 \Leftrightarrow -(\lambda+5)(5-\lambda)+\mu^2=0 \Leftrightarrow$ $\lambda^2-25+\mu^2=0 \Leftrightarrow \lambda^2+\mu^2=25$ (1).Η (1) είναι εξίσωση κύκλου.Στις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ οι συντελεστές των χ,ψ δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα μηδέν.Άρα $(\lambda,\mu)\neq(-5,0)$ και $(\lambda,\mu)\neq(5,0)$.

Τα σημεία $\mathrm{A}(-5,0),\mathrm{B}(5,0)$ είναι σημεία του κύκλου με εξίσωση την (1).Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με εξίσωση την (1) εκτός των σημείων Α,Β.

4η: **α) Δίνεται η εξίσωση** $(\lambda^2+2)\chi^2+3\lambda\psi^2-6\lambda\chi+3\lambda\psi+4=0$ **(1).Για ποιο λ∈R η (1) είναι εξίσωση κύκλου;**

β) Θεωρούμε την εξίσωση $\chi^2+\psi^2+(m-1)\chi+m\psi-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}=0$ **(2),m∈R.**

Δείξτε ότι : i) Για κάθε m∈R η (2) είναι εξίσωση κύκλου.
ii) Οι κύκλοι με εξίσωση την (2) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία από τα οποία το ένα είναι το κέντρο του κύκλου του α) ερωτήματος.
γ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον $\chi'\chi$ η κοινή χορδή των κύκλων του β ερωτήματος
Λύση

α) Θα αναζητήσουμε λ τέτοια ώστε η (1) να γράφεται στη μορφή $\chi^2+\psi^2+\mathrm{A}\chi+\mathrm{B}\psi+\Gamma=0$ με $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$.

Απαιτούμε $\lambda^2+2=3\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=2$.

- Για λ=1 η (1) γράφεται $3\chi^2+3\psi^2-6\chi+3\psi+4=0 \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2-2\chi+\psi+\frac{4}{3}=0$.

$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=4+1-\frac{16}{3}=-\frac{1}{3}$.Άρα για λ=1 η (1) δεν είναι εξίσωση κύκλου.

- Για λ=2 η (1) γράφεται $6\chi^2+6\psi^2-12\chi+6\psi+4=0 \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2-2\chi+\psi+\frac{2}{3}=0$.

$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=4+1-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}>0$. Άρα για λ=2 η (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $\mathrm{K}(1,-\frac{1}{2})$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{21}}{6}$.

β) i) $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=(m-1)^2+m^2-4(-\frac{m}{2}-\frac{1}{4})=2(m^2+1)>0$ για κάθε $m\in\mathrm{R}$.Άρα η (2) είναι εξίσωση κύκλου για κάθε τιμή του m.

ii) $(2)\Leftrightarrow(\chi+\psi-\frac{1}{2})m+\chi^2+\psi^2-\chi-\frac{1}{4}=0$ (3).Οι κύκλοι με εξίσωση την (2) θα διέρχονται από σταθερά σημεία όταν η (3) ισχύει για κάθε τιμή του m.Αυτό συμβαίνει όταν

$$\begin{cases}\chi+\psi-\frac{1}{2}=0\\ \chi^2+\psi^2-\chi-\frac{1}{4}=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\psi=\frac{1}{2}-\chi\\ \chi^2+(\frac{1}{2}-\chi)^2-\chi-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\chi=0 ή \chi=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=0,\psi=\frac{1}{2}\\ \chi=1,\psi=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

.Άρα οι κύκλοι με εξίσωση την (2) διέρχονται από τα σταθερά σημεία $\Lambda(0,\frac{1}{2}),\mathrm{K}(1,-\frac{1}{2})$.Το Κ είναι το κέντρο του κύκλου του α) ερωτήματος.

γ) Η κοινή χορδή των κύκλων του β) ερωτήματος είναι η ΚΛ.Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η ΚΛ με τον $\chi'\chi$.Πρέπει $\varepsilon\varphi\omega=\lambda_{\mathrm{K\Lambda}}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi(\pi-\frac{\pi}{4})\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}\overset{0\le\omega<\pi}{\Leftrightarrow}\omega=\frac{3\pi}{4}$.

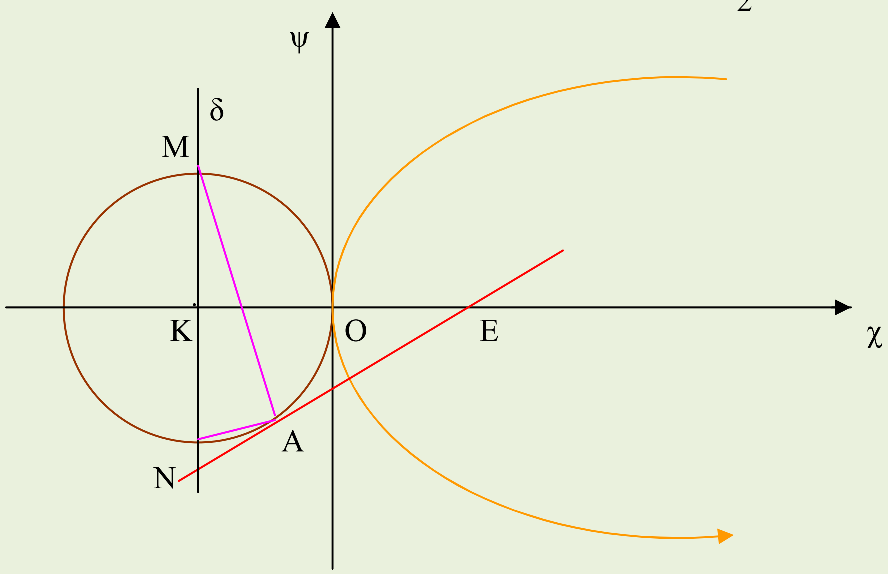
5η: Θεωρούμε το κύκλο με κέντρο K(-1,0) που διέρχεται από το σημείο $A(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

α) Να βρείτε: i) Την εξίσωση του κύκλου.
ii) Την εφαπτομένη ε του κύκλου στο Α.
β) Αν η ε διέρχεται από την εστία της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον θετικό ημιάξονα Οχ ,τότε: i) να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.
ii) Αν η διευθετούσα της παραβολής τέμνει τον κύκλο στα σημεία Μ,Ν,να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΝ.
Λύση

α) i) Έστω ρ η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου,τότε η εξίσωσή του είναι $(\chi+1)^2+\psi^2=\rho^2$.Επειδή ο κύκλος διέρχεται από το σημείο Α πρέπει $\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2+\frac{3}{4}=\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=1 \Leftrightarrow \rho=1$. Άρα $(\chi+1)^2+\psi^2=1$ (1).

ii) Έστω Μ(χ,ψ) τυχαίο σημείο της ζητούμενης εφαπτομένης.Έχουμε $\overrightarrow{AM}=(\chi+\frac{1}{2},\psi+\frac{\sqrt{3}}{2})$ και $\overrightarrow{AK}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.Πρέπει $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\overrightarrow{AK}=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\chi+\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{3}}{2}(\psi+\frac{\sqrt{3}}{2})=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$ $\chi-\sqrt{3}\psi-1=0$.

β) i) Η παραβολή έχει εξίσωση $\psi^2=2p\chi, p>0$,εστία $E(\frac{p}{2},0)$ και διευθετούσα $\delta:\chi=-\frac{p}{2}$.



Επειδή η ε διέρχεται από την εστία της παραβολής πρέπει $\frac{p}{2}-1=0 \Leftrightarrow p=2$.Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $\psi^2=4\chi$ και της διευθετούσας $\delta:\chi=-1$.

ii) Παρατηρούμε ότι η δ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου,οπότε το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ορθογώνιο στο Α.Η απόσταση του Α από τη δ είναι $d(A,\delta)=\frac{1}{2}$.

Άρα $E_{AMN}=\frac{1}{2}(MN)d(A,\delta)=\frac{1}{2}$ τετρ.μονάδες

6η: Δίνεται η παραβολή $c:\psi^2=2p\chi, p\rangle 0$ και οι ευθείες $\varepsilon_1:\psi=\lambda\chi, \varepsilon_2:\psi=-\lambda\chi$, όπου λ θετικός ακέραιος.

i) Δείξτε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνουν την παραβολή σε σημεία Α,Β συμμετρικά ως προς τον άξονα $\chi'\chi$.

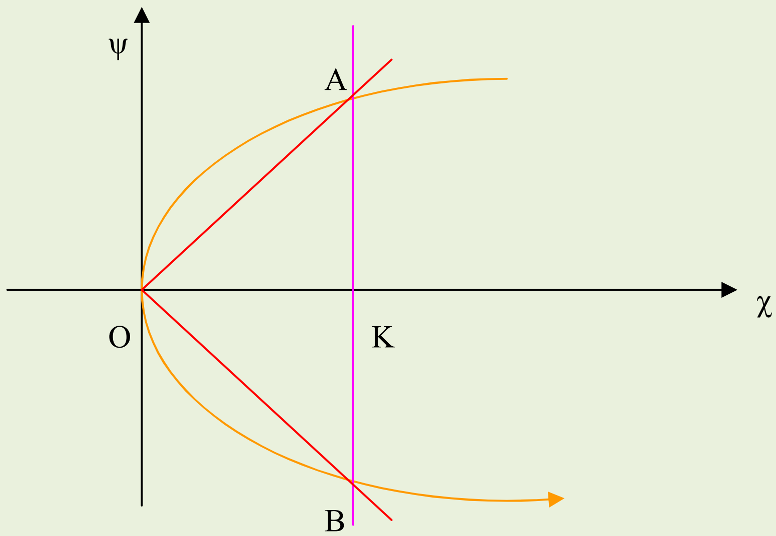
ii) Να βρείτε τον λ όταν η ΑΒ διέρχεται από την εστία της c.

iii) Όταν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ γίνεται μέγιστο,όπου Ο η αρχή των αξόνων,δείξτε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι κάθετες.

Λύση

i)Από το σύστημα των εξισώσεων της c και της ε_1 προκύπτει η εξίσωση $\lambda^2\chi^2=2p\chi \Leftrightarrow \chi(\lambda^2\chi-2p)=0$ (1).Επειδή μας ενδιαφέρει το σημείο τομής της ε_1 με την c που είναι διαφορετικό της αρχής των αξόνων πρέπει $\chi\neq 0$,οπότε από την (1) παίρνουμε $\lambda^2\chi-2p=0 \Leftrightarrow \chi=\dfrac{2p}{\lambda^2}$ και από την εξίσωση της ε_1 βρίσκουμε $\psi=\dfrac{2p}{\lambda}$.Άρα $A\left(\dfrac{2p}{\lambda^2},\dfrac{2p}{\lambda}\right)$.Όμοια από το σύστημα των εξισώσεων της c με την ε_2 βρίσκουμε $\chi=\dfrac{2p}{\lambda^2},\psi=-\dfrac{2p}{\lambda}$.Άρα $B\left(\dfrac{2p}{\lambda^2},-\dfrac{2p}{\lambda}\right)$.

Τα σημεία Α,Β έχουν ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες,άρα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $\chi'\chi$.



ii) Η εστία της παραβολής είναι $E\left(\dfrac{p}{2},0\right)$.Επειδή ο ημιάξονας Οχ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και ΑΒ// $\psi'\psi$ το μέσο Κ της ΑΒ είναι σημείο του Οχ.Έχουμε $K\left(\dfrac{2p}{\lambda^2},0\right)$.

Η ΑΒ διέρχεται από την εστία Ε όταν $\dfrac{2p}{\lambda^2}=\dfrac{p}{2} \Leftrightarrow \lambda^2=4 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda=2$.

iii) Είναι $(AB)=\frac{4p}{\lambda}$.Αν Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ,τότε $E=\frac{1}{2}(AB)(OK)=\frac{4p^2}{\lambda^3}$.Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο όταν το λ^3 πάρει την ελάχιστή του τιμή.Επειδή ο λ είναι θετικός ακέραιος η ελάχιστη τιμή του λ^3 γίνεται όταν λ=1.Άρα $\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}=\lambda(-\lambda)=-1$,που σημαίνει ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι κάθετες.

7η: Δίνεται η έλλειψη $c:\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ με α>β>0 και η ευθεία $\varepsilon:\chi=\frac{\alpha^2}{\gamma}$.

i) Δείξτε ότι η ε δεν έχει κοινά σημεία με την c.

ii) Ευθεία ε_1 με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από την εστία $E(\gamma,0)$ της έλλειψης και τέμνει την ε στο σημείο Μ.Η Β(0,β) είναι μια κορυφή της c.Να βρείτε το λ όταν: α) Ο κύκλος με διάμετρο το ΒΜ διέρχεται από το Ε. β) Ο κύκλος με διάμετρο το ΕΜ διέρχεται από το Β. γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα λ των παραπάνω α),β) ερωτημάτων.

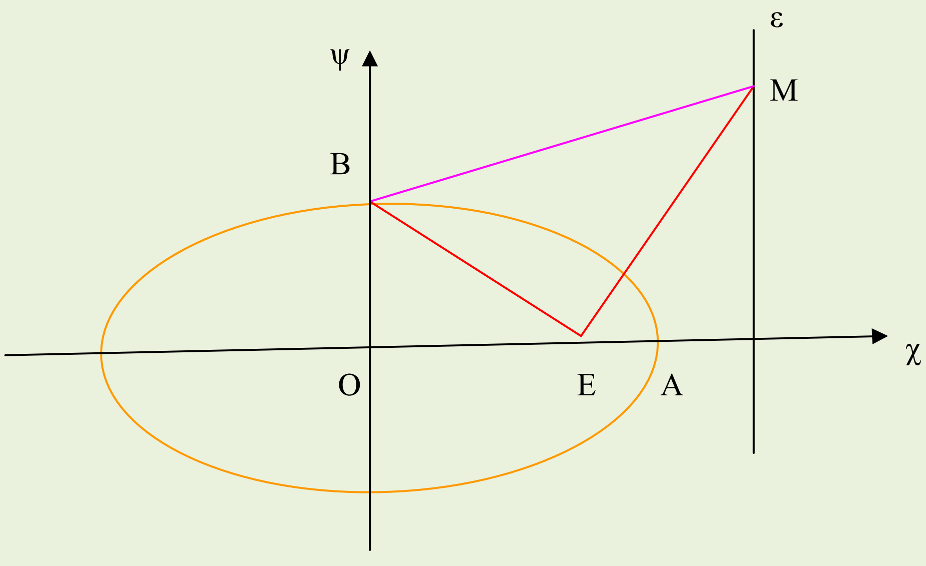
iii) Αν η ευθεία ε_1 του ii) τέμνει την ε,στην περίπτωση α) στο M_1 και στην περίπτωση β) στο M_2,να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου EM_1M_2.

Λύση

i) Έχουμε $\alpha>\gamma \Leftrightarrow \alpha^2>\alpha\gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\gamma}>\alpha$ (1).Από την (1) συμπεραίνουμε ότι η ε δεν έχει κοινά σημεία με την c,αφού είναι παράλληλη στον άξονα $\psi'\psi$ και βρίσκεται πιο δεξιά από την κορυφή Α(α,0) της έλλειψης.

ii) Η ε_1 έχει εξίσωση $\psi=\lambda(\chi-\gamma)$. Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ε_1 και ε βρίσκουμε $\psi=\lambda(\frac{\alpha^2}{\gamma}-\gamma)=\lambda\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma}=\frac{\lambda\beta^2}{\gamma}$,οπότε $M(\frac{\alpha^2}{\gamma},\frac{\lambda\beta^2}{\gamma})$.

α) Έχουμε $\overrightarrow{EB}=(-\gamma,\beta),\overrightarrow{EM}=(\frac{\alpha^2}{\gamma}-\gamma,\frac{\lambda\beta^2}{\gamma})=(\frac{\beta^2}{\gamma},\frac{\lambda\beta^2}{\gamma})$.



Ο κύκλος με διάμετρο την ΒΜ διέρχεται από το Ε όταν η $\widehat{BEM} = 90^0 \Leftrightarrow \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EM} = 0 \Leftrightarrow -\gamma\dfrac{\beta^2}{\gamma} + \dfrac{\lambda\beta^3}{\gamma} = 0 \Leftrightarrow -\beta^2 + \dfrac{\lambda\beta^3}{\gamma} = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda = \dfrac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}$.

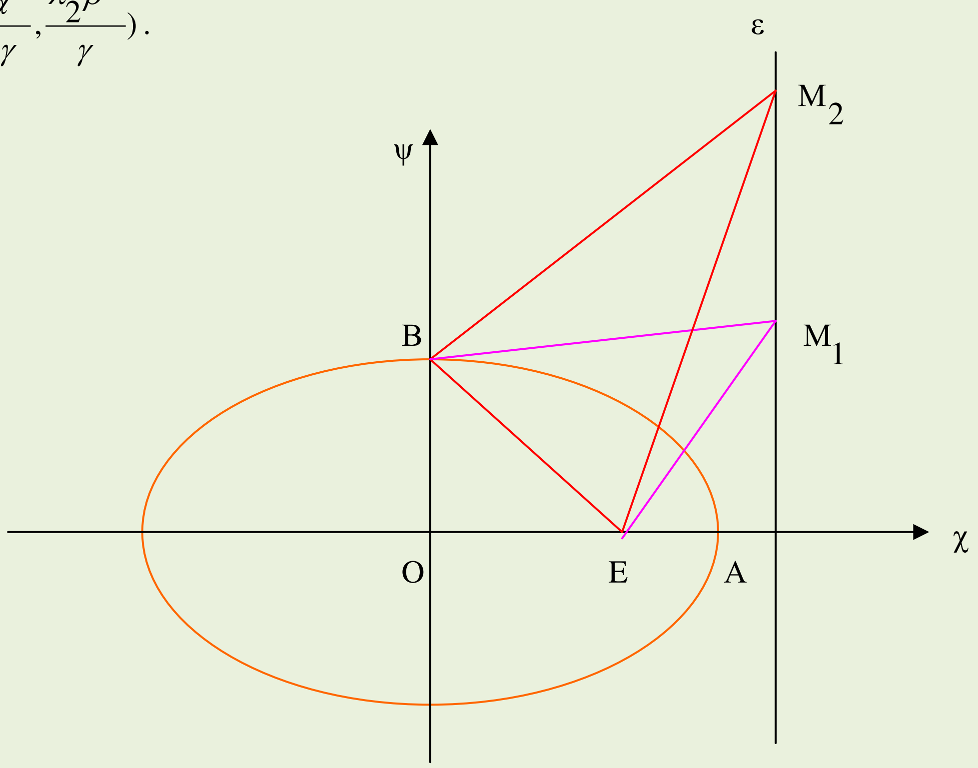
β) Είναι $\overrightarrow{BE} = (\gamma, -\beta)$ και $\overrightarrow{BM} = (\dfrac{\alpha^2}{\gamma}, \dfrac{\lambda\beta^2}{\gamma} - \beta)$.Ο κύκλος με διάμετρο την ΕΜ διέρχεται από το Β όταν $\widehat{EBM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta(\dfrac{\lambda\beta^2}{\gamma} - \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \dfrac{\lambda\beta^3}{\gamma} + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda = \dfrac{(\alpha^2+\beta^2)\gamma}{\beta^3} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta^3}$.

γ) Έστω $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}$ και $\lambda_2 = \dfrac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta^3} \Leftrightarrow \lambda_2 = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}\lambda_1 \Leftrightarrow$

$\lambda_2 = \left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+1\right)\lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_2 - \lambda_1 = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\lambda_1$.

iii) Αν $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}$,τότε $M_1\ (\dfrac{\alpha^2}{\gamma}, \dfrac{\lambda_1\beta^2}{\gamma})$ και αν $\lambda_2 = \dfrac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta^3}$,τότε $M_2(\dfrac{\alpha^2}{\gamma}, \dfrac{\lambda_2\beta^2}{\gamma})$.



Έχουμε $\overrightarrow{EM}_1=(\frac{\alpha^2}{\gamma}-\gamma,\frac{\lambda_1\beta^2}{\gamma})=(\frac{\beta^2}{\gamma},\frac{\lambda_1\beta^2}{\gamma})$ και $\overrightarrow{EM}_2=(\frac{\beta^2}{\gamma},\frac{\lambda_2\beta^2}{\gamma})$.

$$\det(\overrightarrow{EM}_1,\overrightarrow{EM}_2)=\begin{vmatrix}\frac{\beta^2}{\gamma} & \frac{\lambda_1\beta^2}{\gamma}\\ \frac{\beta^2}{\gamma} & \frac{\lambda_2\beta^2}{\gamma}\end{vmatrix}=\frac{\beta^4}{\gamma^2}\lambda_2-\frac{\beta^4}{\gamma^2}\lambda_1=\frac{\beta^4}{\gamma^2}(\lambda_2-\lambda_1)\overset{\gamma ii}{=}\frac{\beta^4}{\gamma^2}\frac{\alpha^2}{\beta^2}\lambda_1=\frac{\alpha^2\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\gamma^2}.$$

$$E_{EM_1M_2}=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{EM}_1,\overrightarrow{EM}_2)\right|=\frac{1}{2}\frac{\alpha^2\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\gamma^2}=\frac{1}{2}\frac{\alpha^2\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha^2-\beta^2}.$$

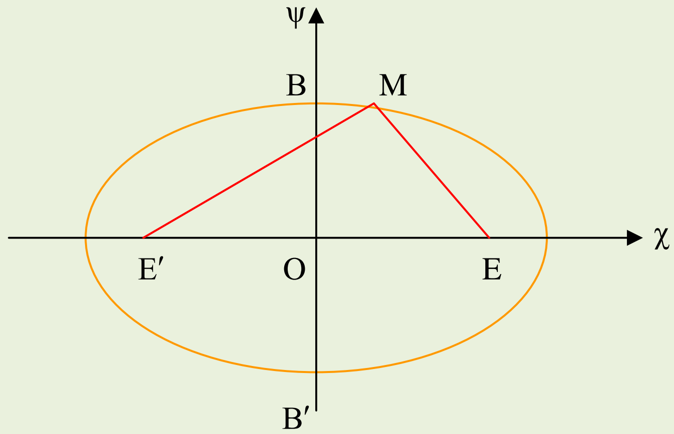
8η: Θεωρούμε την έλλειψη $c:\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ με α>β>0.

i) Αν Μ τυχαίο σημείο της έλλειψης και E', E οι εστίες της,να βρείτε τα $(ME'),(ME)$.

ii) Εξετάστε αν υπάρχουν σημεία Μ της έλλειψης έτσι ώστε $E'\hat{M}E=90^o$.

Λύση

i) Έστω $E'(-\gamma,0),E(\gamma,0)$ και $M(\chi_o,\psi_o)$.



$\overrightarrow{ME'}=(-\gamma-\chi_o,-\psi_o),\overrightarrow{ME}=(\gamma-\chi_o,-\psi_o)$.Έχουμε $(ME')+(ME)=2\alpha$ (1).

$$(ME')^2-(ME)^2=(\gamma+\chi_o)^2-(\gamma-\chi_o)^2\Leftrightarrow[(ME')+(ME)][(ME')-(ME)]=4\gamma\chi_o\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$2\alpha[(ME')-(ME)]=4\gamma\chi_o\Leftrightarrow(ME')-(ME)=\frac{2\gamma\chi_o}{\alpha}\ (2).$$

Προσθέτουμε τις (1),(2) κατά μέλη και παίρνουμε $2(ME')=2\alpha+\frac{2\gamma\chi_o}{\alpha}\Leftrightarrow(ME')=\alpha+\frac{\gamma\chi_o}{\alpha}\Leftrightarrow$

$(ME')=\alpha+\frac{\chi_o\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}$.Από την (1) αφαιρούμε τη (2) και παίρνουμε

$(ME)=\alpha-\frac{\chi_o\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}$.

ii) $\overrightarrow{\text{ME}'}\overrightarrow{\text{ME}} = -(\gamma+\chi_o)(\gamma-\chi_o)+\psi_o^2 = -\gamma^2+\chi_o^2+\psi_o^2$ (3).

Επειδή το Μ είναι σημείο της έλλειψης έχουμε $\frac{\chi_o^2}{\alpha^2}+\frac{\psi_o^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \beta^2\chi_o^2+\alpha^2\psi_o^2=\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow$

$\psi_o^2 = \frac{\alpha^2\beta^2-\beta^2\chi_o^2}{\alpha^2}$.Άρα η (3) γράφεται $\overrightarrow{\text{ME}'}\overrightarrow{\text{ME}} = \beta^2-\alpha^2+\chi_o^2+\frac{\alpha^2\beta^2-\beta^2\chi_o^2}{\alpha^2} =$

$$\overrightarrow{\text{ME}'}\overrightarrow{\text{ME}} = \frac{(\alpha^2-\beta^2)\chi_o^2+2\alpha^2\beta^2-\alpha^4}{\alpha^2} \quad (4)$$

$$\widehat{\text{E}'\text{ME}} = 90^o \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{ME}'}\overrightarrow{\text{ME}} = 0 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} (\alpha^2-\beta^2)\chi_o^2 = \alpha^2(\alpha^2-2\beta^2) \Leftrightarrow \chi_o^2 = \frac{\alpha^2(\alpha^2-2\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2} \quad (5).$$

Είναι $\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2} > 0$.

- Αν $\alpha^2-2\beta^2<0 \Leftrightarrow \alpha<\sqrt{2}\beta$,τότε η (5) είναι αδύνατη,οπότε δεν υπάρχουν στην έλλειψη σημεία Μ τέτοια που ζητάμε.
- Αν $\alpha^2-2\beta^2>0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \alpha>\sqrt{2}\beta$,τότε υπάρχουν σημεία Μ και μάλιστα τέσσερα.
- Αν $\alpha^2-2\beta^2=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \alpha=\sqrt{2}\beta$,τότε υπάρχουν σημεία Μ οι κορυφές $\text{B}'(0,-\beta)$ και $\text{B}(0,\beta)$.

9η: Τα σταθερά σημεία E',E είναι σημεία του $\chi'\chi$ συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων με $(\text{E}'\text{E}) = 2\sqrt{5}$.Σημεία Μ το επιπέδου ικανοποιούν τις σχέσεις $\sqrt{[(\text{ME}')-(\text{ME})]^2}=4$ (1) και $\left|\overrightarrow{\text{ME}'}^2 - \overrightarrow{\text{ME}}^2\right| = 24$ (2).

i) Δείξτε ότι τα σημεία Μ ανήκουν σε δυο κωνικές τομές των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

ii) Αν $\text{M}(\chi_o,\psi_o)$ δείξτε ότι $\chi_o^2 = 9\psi_o^2$.

Λύση

i) (1) $\Leftrightarrow |(\text{ME}')-(\text{ME})| = 4$.Άρα τα σημεία Μ είναι σημεία υπερβολής c_1 με εστίες E',E και $2\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=2$.Επίσης $2\gamma=2\sqrt{5} \Leftrightarrow \gamma=\sqrt{5}$.Είναι $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2=1 \Leftrightarrow \beta=1$.

Άρα $c_1 : \frac{\chi^2}{4}-\psi^2=1$.

(2) $\Leftrightarrow \left|(\text{ME}')^2-(\text{ME})^2\right| = 24 \Leftrightarrow \left|[(\text{ME}')-(\text{ME})][(\text{ME}')+(\text{ME})]\right| = 24 \Leftrightarrow$

$|(\text{ME}')-(\text{ME})|[(\text{ME}')+(\text{ME})] = 24 \Leftrightarrow 4[(\text{ME}')+(\text{ME})] = 24 \Leftrightarrow (\text{ME}')+(\text{ME}) = 6$. Άρα τα σημεία Μ είναι σημεία έλλειψης c_2 με εστίες E',E. Άρα $c_2 : \frac{\chi^2}{\alpha_1^2}+\frac{\psi^2}{\beta_1^2}=1$.

$2\alpha_1 = 6 \Leftrightarrow \alpha_1 = 3$ και $\beta_1^2 = \alpha_1^2 - \gamma^2 = 4 \overset{\beta_1 > 0}{\Leftrightarrow} \beta_1 = 2$. Άρα $c_2 : \frac{\chi^2}{9} + \frac{\psi^2}{4} = 1$.

ii) Τα σημεία Μ είναι κοινά σημεία των c_1, c_2 ,άρα πρέπει $\frac{\chi_o^2}{4} - \psi_o^2 = 1$ και $\frac{\chi_o^2}{9} + \frac{\psi_o^2}{4} = 1$,οπότε $\frac{\chi_o^2}{4} - \psi_o^2 = \frac{\chi_o^2}{9} + \frac{\psi_o^2}{4} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 5\chi_o^2 = 45\psi_o^2 \Leftrightarrow \chi_o^2 = 9\psi_o^2$.

10η: **Κύκλος c έχει το κέντρο του στο θετικό ημιάξονα Οχ και η ακτίνα του είναι ρ. Η ευθεία ε:ψ=2χ είναι ασύμπτωτη της υπερβολής $c_1 : \frac{\chi^2}{\rho^2} - \frac{\psi^2}{16} = 1$ και εφάπτεται του κύκλου c.Να βρείτε τις εξισώσεις των c, c_1 και τα κοινά τους σημεία.**

Λύση

Η ε είναι η ασύμπτωτη της c_1 με εξίσωση $\psi = \frac{\beta}{\alpha}\chi \Leftrightarrow \psi = \frac{4}{\rho}\chi$. Άρα πρέπει $\frac{4}{\rho} = 2 \Leftrightarrow \rho = 2$.

Άρα $c_1 : \frac{\chi^2}{4} - \frac{\psi^2}{16} = 1$ (1).Το κέντρο του κύκλου είναι $\mathrm{K}(\chi_o, 0)$ με $\chi_o > 0$.

ε:2χ-ψ=0.Η ε είναι εφαπτομένη του κύκλου αν και μόνο αν $d(\mathrm{K}, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2\chi_o|}{\sqrt{5}} = 2 \Leftrightarrow$ $\chi_o = \sqrt{5}$. Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι $(\chi - \sqrt{5})^2 + \psi^2 = 4$ (2).

(1) $\Leftrightarrow 4\chi^2 - \psi^2 = 16$ (3).Προσθέτουμε τις (2),(3) κατά μέλη και παίρνουμε $(\chi - \sqrt{5})^2 + 4\chi^2 = 20 \Leftrightarrow 5\chi^2 - 2\sqrt{5}\chi - 15 = 0 \Leftrightarrow \chi = \sqrt{5}$ ή $\chi = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Για $\chi = \sqrt{5}$ από την (3) παίρνουμε $\psi^2 = 4 \Leftrightarrow \psi = \pm 2$. Για $\chi = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$ από την (3) παίρνουμε $5\psi^2 = -44$ αδύνατο.

Άρα τα κοινά σημεία των c, c_1 είναι $(\sqrt{5}, -2), (\sqrt{5}, 2)$.

<u>**Σημείωση:**</u> Η τιμή $\chi = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$ μπορούσε να απορριφθεί αμέσως δεδομένου ότι ο κύκλος βρίσκεται δεξιά του $\psi'\psi$.

11η: **Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + (\lambda - 1)\psi^2 = \lambda - 1$ (1),λ∈R.**

α) Για τις διάφορες τιμές του λ να βρείτε το είδος της γραμμής που εκφράζει η (1).

β) Στην περίπτωση που η (1) είναι εξίσωση υπερβολής να βρείτε την εξίσωσή της και το εμβαδόν του ορθογωνίου της βάσης, όταν οι ασύμπτωτες σχηματίζουν γωνία 60^o.

Λύση

α) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: **i)** Αν λ=1 από την (1) παίρνουμε $\chi^2 = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$. Στην περίπτωση αυτή η (1) παριστάνει ευθεία και μάλιστα τον $\psi'\psi$.

ii) Αν $\lambda \neq 1$,τότε $(1) \Leftrightarrow \dfrac{\chi^2}{\lambda - 1} + \psi^2 = 1\,(2)$.

- Αν $\lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$,τότε $\lambda - 1 = -|\lambda - 1|$ και η (2) γράφεται $-\dfrac{\chi^2}{|\lambda - 1|} + \psi^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\psi^2 - \dfrac{\chi^2}{|\lambda - 1|} = 1$.Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση εκφράζει υπερβολή με εστίες στον άξονα $\psi'\psi$.

- Αν $\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$,τότε $\lambda - 1 = |\lambda - 1|$ και η (2) γράφεται $\dfrac{\chi^2}{|\lambda - 1|} + \psi^2 = 1$.Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση εκφράζει έλλειψη.

β) Έχουμε την υπερβολή με εξίσωση $\psi^2 - \dfrac{\chi^2}{|\lambda - 1|} = 1$ και $\lambda < 1$.Είναι α=1 και $\beta = \sqrt{|\lambda - 1|} = \sqrt{1 - \lambda}$.

Οι εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής είναι $\varepsilon_1 : \psi = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\chi \Leftrightarrow \chi + \sqrt{1-\lambda}\psi = 0$,

$\varepsilon_2 : \psi = \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\chi \Leftrightarrow \chi - \sqrt{1-\lambda}\psi = 0$.

Έστω $\overrightarrow{\delta_1}, \overrightarrow{\delta_2}$ τα παράλληλα διανύσματα στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.Τότε $\overrightarrow{\delta_1} = (\sqrt{1-\lambda}, -1)$ και $\overrightarrow{\delta_2} = (-\sqrt{1-\lambda}, -1)$.Έχουμε $\sigma\upsilon\nu 60^o = \dfrac{\overrightarrow{\delta_1}\overrightarrow{\delta_2}}{|\overrightarrow{\delta_1}||\overrightarrow{\delta_2}|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{-(1-\lambda)+1}{2-\lambda} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\lambda}{2-\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2}{3}$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της υπερβολής είναι $\psi^2 - \dfrac{\chi^2}{\frac{1}{3}} = 1$.

Έχουμε $\alpha = 1$και $\beta = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E} = 2\alpha 2\beta = 4\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ τετρ.μονάδες.