Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ
ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Χρήσιμες επισημάνσεις

Τα πολυώνυμα κατέχουν σημαντική θέση στην Άλγεβρα (και μάλιστα στην Ανώτερη Άλγεβρα).Το σχολικό βιβλίο διαπραγματεύεται στοιχειώδεις έννοιες που αφορούν τα πολυώνυμα και τις πολυωνυμικές εξισώσεις,ώστε οι μαθητές να έχουν μία απλή και απαραίτητη γνώση.
Παρακάτω γίνονται μερικές επισημάνσεις που δεν έχουν σκοπό να υποκαταστήσουν το θεωρητικό μέρος των πολυωνύμων που αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο.Θεωρώ δεδομένο ότι το κεφάλαιο αυτό (πολυώνυμα-πολυωνυμικές εξισώσεις)έχει μελετηθεί από τους μαθητές.▓

Α. Ας θεωρήσουμε τα πολυώνυμα $f(\chi), g(\chi)$.

- Λέμε ότι το $f(\chi)$ είναι **μηδενικό πολυώνυμο** και γράφουμε $f(\chi)=0$ **όταν και μόνο όταν όλοι οι συντελεστές του είναι μηδέν.**
- Λέμε ότι τα $f(\chi), g(\chi)$ είναι **ίσα** και γράφουμε $f(\chi)=g(\chi)$ **όταν και μόνο όταν οι συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του** χ **στα δύο πολυώνυμα και οι σταθεροί τους όροι είναι αντίστοιχα ίσοι.**
- ✓ Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για κάθε τιμή του χ.
- ✓ Για να εκφράσουμε την ισότητα δύο πολυωνύμων αν λείπουν όροι μπορούμε να τους συμπληρώσουμε με συντελεστή το μηδέν.
- Το $f(\chi)$ χαρακτηρίζεται ως **σταθερό** πολυώνυμο αν η μορφή του είναι $f(\chi)=c$,όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Παράδειγμα:Θεωρούμε τα πολυώνυμα $f(\chi)=-2\chi+\beta-1, g(\chi)=\alpha\chi^2+(\gamma-1)\chi+1$.**Αν τα πολυώνυμα είναι ίσα να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών** α,β,γ .
Λύση

$$f(\chi)=g(\chi)\Leftrightarrow\begin{cases} & \alpha=0 \\ \text{ταυτόχρονα} & \gamma-1=-2 \\ & \beta-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \gamma=-1\\ \beta=2\end{cases}.$$

Β.α) Έστω ένα πολυώνυμο $f(\chi)$.

- Αν το $f(\chi)$ **δεν είναι σταθερό πολυώνυμο** ορίζουμε ως **βαθμό** του $f(\chi)$ **το μεγαλύτερο εκθέτη της δύναμης του** χ **που ο συντελεστής της είναι διάφορος του μηδέν.**
- Αν το $f(\chi)$ είναι **σταθερό πολυώνυμο** τότε: **i) Αν είναι μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός. ii) Αν δεν είναι μηδενικό πολυώνυμο ορίζουμε ως βαθμό του το μηδέν.**
- ✓ Με το συμβολισμό βαθμ.$f(\chi)$ θα παριστάνουμε το βαθμό του $f(\chi)$.Επίσης η έκφραση "**το** $f(\chi)$ **είναι το πολύ βαθμού** ν" σημαίνει ή **ότι το** $f(\chi)$ **είναι μηδενικό** ή **ότι** βαθμ.$f(\chi)\leq\nu$.

✓ Αν δύο μη μηδενικά πολυώνυμα είναι ίσα, τότε είναι ίδιου βαθμού.

Παράδειγμα: **Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$ το βαθμό του πολυωνύμου** $f(\chi)=(\lambda^2-1)\chi^3+[\eta\mu(\lambda-1)]\chi+\lambda-1$.

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: i) Αν $\lambda^2-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq\pm 1$**, τότε το** $f(\chi)$ **είναι τρίτου βαθμού.**

ii) Αν $\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$**, τότε: Για** $\lambda=1$, $f(\chi)=0$**, οπότε δεν ορίζεται βαθμός για το** $f(\chi)$.

Για $\lambda=-1$, $f(\chi)=(-\eta\mu 2)\chi-2$**. Επειδή** $\eta\mu 2\neq 0$**, το** $f(\chi)$ **είναι πρώτου βαθμού.**

β) Έστω τα **μη μηδενικά πολυώνυμα** $f(\chi), g(\chi)$ με $\boldsymbol{\beta\alpha\theta\mu. f(\chi)=\kappa, \beta\alpha\theta\mu. g(\chi)=\lambda}$.

- Αν το πολυώνυμο $f(\chi)+g(\chi)$ είναι **μη μηδενικό** τότε: $\boldsymbol{\beta\alpha\theta\mu.(f(\chi)+g(\chi))\leq \max\{\kappa,\lambda\}}$.
- $\boldsymbol{\beta\alpha\theta\mu.(f(\chi)g(\chi))=\kappa+\lambda}$.

Γ. Για τα πολυώνυμα $f(\chi), g(\chi)$ η ταυτότητα $\boldsymbol{f(\chi)=g(\chi)\Pi(\chi)+\upsilon(\chi)}$ (1), όπου $\Pi(\chi),\upsilon(\chi)$ πολυώνυμα εκφράζει τη διαίρεση $f(\chi):g(\chi)$ **όταν το $g(\chi)$ είναι μη μηδενικό πολυώνυμο και το $\upsilon(\chi)$ είναι είτε μηδενικό πολυώνυμο είτε βαθμού μικρότερου του βαθμού του $g(\chi)$.**

Έστω ότι η (1) είναι η ταυτότητα της διαίρεσης $f(\chi):g(\chi)$ τότε:

- Το $\Pi(\chi)$ είναι το **πηλίκο** και το $\upsilon(\chi)$ το **υπόλοιπο** της διαίρεσης, πολυώνυμα μοναδικά ώστε να ισχύει η (1).
- Αν $\beta\alpha\theta\mu. f(\chi)=\nu, \beta\alpha\theta\mu. g(\chi)=\mu$ με $\nu\geq\mu$, είναι $\beta\alpha\theta\mu.\Pi(\chi)=\nu-\mu$.
- Αν $\boldsymbol{\upsilon(\chi)=0}$, λέμε ότι η διαίρεση είναι τέλεια και για το $g(\chi)$ λέμε ότι **διαιρεί** το $f(\chi)$ ή ότι το $g(\chi)$ **είναι παράγοντας** του $f(\chi)$.
- (1) $\Leftrightarrow f(\chi)-\upsilon(\chi)=g(\chi)\Pi(\chi)$ (2). Από τη (2) προκύπτει ότι το $g(\chi)$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(\chi)-\upsilon(\chi)$.
- Αν $\beta\alpha\theta\mu. f(\chi)<\beta\alpha\theta\mu. g(\chi)$, είναι $\Pi(\chi)=0$ και $\upsilon(\chi)=f(\chi)$.

Δ. Αν $f(\chi)$ πολυώνυμο και ρ σταθερός πραγματικός αριθμός τότε:

- **Το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(\chi):(\chi-\rho)$ είναι $\upsilon=f(\rho)$.**
- **Το $\chi-\rho$ είναι παράγοντας του $f(\chi)$** (δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(\chi)$ τέτοιο ώστε $f(\chi)=(\chi-\rho)\Pi(\chi)$) **αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $f(\chi)$** (δηλαδή $f(\rho)=0$)

Ε. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\chi+\alpha_0=0$ βαθμού $\nu\geq 1$ με **ακέραιους συντελεστές**. **Αν ο ακέραιος $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0. Το αντίστροφο δεν ισχύει.**

- Μια πολυωνυμική εξίσωση ν βαθμού αν έχει ρίζες, το πλήθος των ριζών της κ είναι $\kappa\leq\nu$.

Λ Υ Μ Ε Ν Α   Θ Ε Μ Α Τ Α

1ο: Η διαίρεση του πολυωνύμου $f(\chi)$ με το πολυώνυμο $g(\chi)=\chi^2+1$ δίνει πηλίκο $\Pi(\chi)=\chi+1$ και υπόλοιπο $\upsilon(\chi)=(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha-\frac{1}{2})\chi^2+(\sigma\upsilon\nu4\alpha)\chi+1$ για κάποια γωνία α.

α) Να βρείτε το $f(\chi)$.

β) Για $\chi\in R-\{1\}$ να διασπάσετε το κλάσμα $\frac{f(\chi)}{(\chi-1)^4}$ σε άθροισμα κλασμάτων με σταθερό αριθμητή και παρονομαστή δύναμη του $\chi-1$.

Λύση

α) Επειδή ο διαιρέτης $g(\chi)$ είναι 2ου βαθμού,το υπόλοιπο $\upsilon(\chi)$ πρέπει να είναι το πολύ πρώτου βαθμού.

Άρα πρέπει $\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+$ $+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1}{4}\Leftrightarrow1+\eta\mu2\alpha=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\eta\mu2\alpha=-\frac{3}{4}$.Έτσι έχουμε $\sigma\upsilon\nu4\alpha=1-2\eta\mu^2 2\alpha=1-2\frac{9}{16}=$ $=-\frac{1}{8}$.Άρα $\upsilon(\chi)=-\frac{1}{8}\chi+1$,οπότε από την ταυτότητα της διαίρεσης $f(\chi):g(\chi)$ παίρνουμε:

$f(\chi)=(\chi^2+1)(\chi+1)-\frac{1}{8}\chi+1\Leftrightarrow f(\chi)=\chi^3+\chi^2+\frac{7}{8}\chi+2$.

β) Θέτουμε $\chi-1=\psi\Leftrightarrow\chi=\psi+1$.Το $f(\chi)$ γράφεται $f(\psi+1)=(\psi+1)^3+(\psi+1)^2+\frac{7}{8}(\psi+1)+2$ $\Leftrightarrow f(\psi+1)=\psi^3+4\psi^2+\frac{47}{8}\psi+\frac{39}{8}$ (1).Αντικαθιστούμε στην (1) το ψ με $\chi-1$ και παίρνουμε

$f(\chi)=(\chi-1)^3+4(\chi-1)^2+\frac{47}{8}(\chi-1)+\frac{39}{8}$.

Για $\chi\in R-\{1\}$ έχουμε $\frac{f(\chi)}{(\chi-1)^4}=\frac{1}{\chi-1}+\frac{4}{(\chi-1)^2}+\frac{\frac{47}{8}}{(\chi-1)^3}+\frac{\frac{39}{8}}{(\chi-1)^4}$.

K

2ο: Θεωρούμε τα πολυώνυμα $f(\chi),g(\chi)$ για τα οποία έχουμε $f(\chi)=g(\chi-1)$ (1) και $f^2(1)+2=2(2f(1)g(0)-2g^2(0)+1)$ (2).

i) Δείξτε ότι το $\chi-1$ διαιρεί το $f(\chi)$ και το χ διαιρεί το $g(\chi)$.

ii) Αν $\Pi(\chi)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $f(\chi):(\chi-1)$,ποιο είναι το πηλίκο της διαίρεσης $g(\chi):\chi$;

Λύση

Από τη (2) παίρνουμε $f^2(1)-4f(1)g(0)+4g^2(0)=0\Leftrightarrow(f(1)-2g(0))^2=0\Leftrightarrow f(1)=2g(0)$ (3).

i) Για $\chi=1$ από την (1) παίρνουμε $f(1)=g(0)$.Άρα (3) $\Leftrightarrow f(1)=2f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$,δηλαδή το $\chi-1$ είναι παράγοντας του $f(\chi)$,πράγμα που μας εξασφαλίζει ότι το $\chi-1$ διαιρεί το $f(\chi)$.

Αφού $f(1)=0$ λόγω της (3) είναι $g(0)=0$.Αυτό σημαίνει ότι το χ είναι παράγοντας του $g(\chi)$,δηλαδή το χ διαιρεί το $g(\chi)$.

ii) Με βάση το i) ερώτημα έχουμε $f(\chi)=(\chi-1)\Pi(\chi)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} g(\chi-1)=(\chi-1)\Pi(\chi)$ (4).
Στην (4) βάζουμε όπου χ το $\chi+1$ και παίρνουμε $g(\chi)=\chi\Pi(\chi+1)$ (5).
Από την (5) προκύπτει ότι το πηλίκο της διαίρεσης $g(\chi):\chi$ είναι το $\Pi(\chi+1)$.

K

3ο: Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(\chi)=2\chi^4-(\kappa+4)\chi^3+5\chi^2-3\chi+\kappa, \kappa\in R$.
Η διαίρεση $P(\chi):(2\chi^2+1)$ δίνει υπόλοιπο $\upsilon(\chi)=[\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta]\chi+\eta\mu(\alpha+2\beta)$.Δείξτε ότι $\alpha=\rho\pi, \rho\in Z$.

Λύση

Εκτελούμε τη διαίρεση $P(\chi):(2\chi^2+1)$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2\chi^4 & -(\kappa+4)\chi^3 & +5\chi^2 & -3\chi & +\kappa & 2\chi^2+1 \\
\cline{1-6}
-2\chi^4 & & -\chi^2 & & & \chi^2-\dfrac{\kappa+4}{2}\chi+2 \\
\cline{1-5}
 & -(\kappa+4)\chi^3 & +4\chi^2 & -3\chi & +\kappa & \\
 & (\kappa+4)\chi^3 & & +(\dfrac{\kappa}{2}+2)\chi & & \\
\cline{1-5}
 & & 4\chi^2 & +(\dfrac{\kappa}{2}-1)\chi & +\kappa & \\
 & & -4\chi^2 & & -2 & \\
\cline{1-5}
 & & & (\dfrac{\kappa}{2}-1)\chi & +\kappa-2 &
\end{array}
$$

Σύμφωνα με την παραπάνω διαίρεση έχουμε υπόλοιπο $\upsilon(\chi)=(\dfrac{\kappa}{2}-1)\chi+\kappa-2$.

Πρέπει $(\dfrac{\kappa}{2}-1)\chi+\kappa-2=[\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta]\chi+\eta\mu(\alpha+2\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\kappa}{2}-1=\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta \quad (1)\\ \text{και}\\ \kappa-2=\eta\mu(\alpha+2\beta) \quad (2)\end{cases}$.

Από τις (1),(2) παίρνουμε $\eta\mu(\alpha+2\beta)=2\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta\Leftrightarrow\eta\mu[(\alpha+\beta)+\beta]=2\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta$
$\Leftrightarrow\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\eta\mu\beta=2\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta\Leftrightarrow\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\eta\mu\beta=0$
$\Leftrightarrow\eta\mu[(\alpha+\beta)-\beta]=0\Leftrightarrow\eta\mu\alpha=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\kappa\pi\\ \acute{\eta}\\ \alpha=2\kappa\pi+\pi=(2\kappa+1)\pi\end{cases},\kappa\in Z\Leftrightarrow\alpha=\rho\pi,\rho\in Z$.

K

4ο: Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(\chi)=\alpha\chi^4-\beta\chi^3+\chi^2+5\chi-2, \alpha,\beta\in R$.Αν η διαίρεση $f(\chi):(\chi^2-1)$ δίνει υπόλοιπο $\upsilon(\chi)=2\chi+1$ τότε: i) Να βρείτε το υπόλοιπο των διαιρέσεων $f(\chi):(\chi-1)$, $f(\chi):(\chi+1)$ καθώς και τα α,β.
ii) Για τα α,β του i) ερωτήματος,να λύσετε την ανίσωση $f(\chi)>2\chi+1$.

Λύση

i) Η ταυτότητα της διαίρεσης $f(\chi):(\chi^2-1)$ είναι $f(\chi)=(\chi^2-1)\Pi(\chi)+2\chi+1$ (1),όπου $\Pi(\chi)$ το πηλίκο της διαίρεσης.
Για $\chi=1$ και $\chi=-1$ από την (1) παίρνουμε $f(1)=3$ που είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(\chi):(\chi-1)$ και $f(-1)=-1$ που είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(\chi):(\chi+1)$.

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ \text{και} \\ f(-1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=-1 \\ \text{και} \\ \alpha+\beta=5 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=2,\beta=3.$$

<u>Σημείωση:</u> **Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε τα α,β είναι να εκτελέσουμε τη διαίρεση $f(\chi):(\chi^2-1)$ και το υπόλοιπο που θα βρούμε να το ταυτίσουμε με το $2\chi+1$.Έτσι έχουμε ισότητα πολυωνύμων από την οποία προκύπτουν τα α,β (βλέπε 3ο θέμα).**

ii) Για $\alpha=2$ και $\beta=3$ έχουμε $f(\chi)=2\chi^4-3\chi^3+\chi^2+5\chi-2$.

Εκτελούμε τη διαίρεση $f(\chi):(\chi^2-1)$ και βρίσκουμε πηλίκο $\Pi(\chi)=2\chi^2-3\chi+3$,οπότε η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $f(\chi)=(\chi^2-1)(2\chi^2-3\chi+3)+2\chi+1$ (2).

$$f(\chi)>2\chi+1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} (\chi^2-1)(2\chi^2-3\chi+3)+2\chi+1>2\chi+1 \Leftrightarrow (\chi^2-1)(2\chi^2-3\chi+3)>0 \quad (3).$$

Το τριώνυμο $2\chi^2-3\chi+3$ έχει αρνητική διακρίνουσα,οπότε για κάθε $\chi\in R$, $2\chi^2-3\chi+3>0$.

Άρα $(3)\Leftrightarrow \chi^2-1>0 \Leftrightarrow \chi\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

5ο: α) Έστω το πολυώνυμο $g(\chi)$.Η διαίρεση $g(\chi):(\alpha\chi+\beta),\alpha,\beta\neq0$ δίνει πηλίκο $\Pi(\chi)$ και υπόλοιπο το σταθερό αριθμό υ.

Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $g(\chi):(\chi+\frac{\beta}{\alpha})$.

β) Έστω το πολυώνυμο $f(\chi)=\chi^4-5\chi^3+\frac{6}{\lambda},\lambda\in R^*$.Να βρείτε το λ εκείνο για το οποίο το $f(\chi)$ έχει παράγοντα το $\lambda\chi-1$.

Λύση

α) Η ταυτότητα της διαίρεσης $g(\chi):(\alpha\chi+\beta)$ είναι $g(\chi)=(\alpha\chi+\beta)\Pi(\chi)+\upsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(\chi)=(\chi+\frac{\beta}{\alpha})\alpha\Pi(\chi)+\upsilon$ (1).Από την (1) προκύπτει ότι το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα της διαίρεσης $g(\chi):(\chi+\frac{\beta}{\alpha})$ είναι $\Pi_1(\chi)=\alpha\Pi(\chi)$ και υ.

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(\chi):(\lambda\chi-1)$ σύμφωνα με το α) είναι ίδιο με το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(\chi):(\chi-\frac{1}{\lambda})$,δηλαδή είναι το $f(\frac{1}{\lambda})$.Επομένως το $f(\chi)$ έχει παράγοντα το $\lambda\chi-1$ αν και μόνο αν $f(\frac{1}{\lambda})=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^4}-\frac{5}{\lambda^3}+\frac{6}{\lambda}=0 \Leftrightarrow 6\lambda^3-5\lambda+1=0$ (1).Παρατηρούμε ότι το -1 είναι ρίζα της (1),οπότε έχουμε το παρακάτω σχήμα Horner:

6	0	-5	1	-1
	-6	6	-1	
6	-6	1	$\boxed{0}$	

Άρα $(1) \Leftrightarrow (\lambda+1)(6\lambda^2-6\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1 \\ \acute{\eta} \\ 6\lambda^2-6\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6} \end{cases}$.

Κ

6ο: Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(\chi)=\chi^3-3\alpha\chi+2\beta, \alpha,\beta \in R^*$ και ρ κάποιος σταθερός πραγματικός αριθμός.Αν το $(\chi-\rho)^2$ είναι παράγοντας του $f(\chi)$ δείξτε ότι $\alpha^3=\beta^2$.

Λύση

Έχουμε $f(\chi)=(\chi-\rho)^2\Pi(\chi)=(\chi-\rho)[(\chi-\rho)\Pi(\chi)]$ (1).Θέτουμε $\Pi_1(\chi)=(\chi-\rho)\Pi(\chi)$ (2) και η (1) γράφεται $f(\chi)=(\chi-\rho)\Pi_1(\chi)$,οπότε το $\Pi_1(\chi)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $f(\chi):(\chi-\rho)$.

Είναι $f(\rho)=0$ και $\Pi_1(\rho)=0$.Επίσης $\rho\neq 0$,γιατί αν $\rho=0$,τότε $f(0)=0 \Leftrightarrow \beta=0$.Άτοπο.

Από το παρακάτω σχήμα Horner θα βρούμε το $\Pi_1(\chi)$.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3\alpha & 2\beta & \rho \\ & \rho & \rho^2 & \rho^3-3\alpha\rho & \\ \hline 1 & \rho & \rho^2-3\alpha & \boxed{\rho^3-3\alpha\rho+2\beta} & \end{array}$$

$\Pi_1(\chi)=\chi^2+\rho\chi+\rho^2-3\alpha$.

Έχουμε $\begin{cases} f(\rho)=0 \\ \text{και} \\ \Pi_1(\rho)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3-3\alpha\rho+2\beta=0 \quad (3) \\ \text{και} \\ 3\rho^2-3\alpha=0 \Leftrightarrow \rho^2=\alpha \overset{\rho\neq 0}{\Leftrightarrow} \rho^3=\alpha\rho \quad (4) \end{cases}$.

Η (3) με βάση την (4) δίνει $\beta=\alpha\rho \Rightarrow \beta^2=\alpha^2\rho^2=\alpha^2\alpha=\alpha^3$.Άρα $\alpha^3=\beta^2$.

Κ

7ο: Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(\chi)=(\alpha^3+\beta^3)\chi^{2004}+3\alpha\beta\gamma\chi^{2003}+\gamma^3\chi^{2002}+\chi+1$ με ακέραιους συντελεστές και $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha<-\alpha\beta\gamma$ (1).

Αν το $f(\chi)$ έχει αρνητική ακέραια ρίζα και το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(\chi):(\chi^3-1)$ είναι $\upsilon(\chi)=-24\chi^2-7\chi-15$,τότε: i) Να βρείτε το $f(\chi)$.

ii) Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $g(\chi)$ τέτοιο ώστε το $f(\chi)$ να γράφεται στη μορφή $f(\chi)=-2g(\chi)\chi^2-3g(\chi)\chi-g(\chi)+\chi+1$.

iii) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(\chi):(-2\chi^2-3\chi-1)$.

Λύση

i) Επειδή το $f(\chi)$ έχει ακέραιους συντελεστές οι πιθανές ακέραιες ρίζες του είναι διαιρέτες του σταθερού όρου 1.Αφού το $f(\chi)$ έχει αρνητική ακέραια ρίζα αυτή θα είναι το -1.Άρα $f(-1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta=\gamma \\ \acute{\eta} \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \quad (2) \end{cases}.$$

Από την (1) έχουμε $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha+\alpha\beta\gamma<0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)<0 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma\neq 0$.Άρα η (2) απορρίπτεται,οπότε είναι $\alpha=\beta=\gamma$ και $f(\chi)=2\alpha^3\chi^{2004}+3\alpha^3\chi^{2003}+\alpha^3\chi^{2002}+\chi+1$.

Έχουμε $f(\chi)=(\chi^3-1)\Pi(\chi)+(-24\chi^2-7\chi-15)$ (3),όπου $\Pi(\chi)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $f(\chi)$ με το χ^3-1.Για $\chi=1$ από την (3) παίρνουμε $f(1)=-46 \Leftrightarrow 6\alpha^3+2=-46 \Leftrightarrow \alpha^3=-8 \Leftrightarrow \alpha=-2$.

Άρα $f(\chi)=-16\chi^{2004}-24\chi^{2003}-8\chi^{2002}+\chi+1$.

ii) Το $f(\chi)$ γράφεται $f(\chi)=-2(8\chi^{2002})\chi^2-3(8\chi^{2002})\chi-8\chi^{2002}+\chi+1$.

Θέτουμε $g(\chi)=8\chi^{2002}$ και έχουμε $f(\chi)=-2g(\chi)\chi^2-3g(\chi)\chi-g(\chi)+\chi+1$.

iii) Από το ii) ερώτημα έχουμε $f(\chi)=(-2\chi^2-3\chi-1)g(\chi)+(\chi+1)$ (4) με $g(\chi)=8\chi^{2002}$.
Επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου $\chi+1$ (πρώτου βαθμού) είναι μικρότερος από το βαθμό του πολυωνύμου $-2\chi^2-3\chi-1$ (δευτέρου βαθμού) η (4) είναι η ταυτότητα της διαίρεσης $f(\chi):(-2\chi^2-3\chi-1)$.Άρα το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $g(\chi)=8\chi^{2002}$ και το υπόλοιπο το $\chi+1$.

K

8ο: Για το πολυώνυμο $f(\chi)$ βαθμού $\nu>1$,έχουμε $f(\rho)=\rho$ και $f(\chi)=f(\rho-\chi)$ (1),όπου ρ κάποιος μη μηδενικός σταθερός πραγματικός αριθμός.Δείξτε ότι: i) Ο ν είναι άρτιος.
ii) Υπάρχει πολυώνυμο $\varphi(\chi)$ τέτοιο,ώστε να ισχύει $f(\chi)=\chi(\chi-\rho)\varphi(\chi)+\rho$.

Λύση

i) Έστω $f(\chi)=\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\chi+\alpha_0$.Ο μεγιστοβάθμιος όρος του $f(\chi)$ είναι ο $\alpha_\nu\chi^\nu, \alpha_\nu\neq 0$,οπότε ο μεγιστοβάθμιος όρος του $f(\rho-\chi)$ θα είναι ο $\alpha_\nu(-1)^\nu\chi^\nu$.Λόγω της (1) πρέπει $\alpha_\nu=(-1)^\nu\alpha_\nu$ (2).Η (2) όμως ισχύει όταν ο ν είναι άρτιος.

ii) Θεωρούμε το πολυώνυμο $g(\chi)=f(\chi)-\rho$.

$g(\rho)=f(\rho)-\rho=0$.Άρα το $g(\chi)$ έχει παράγοντα το $\chi-\rho$,δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(\chi)$ τέτοιο ώστε $g(\chi)=(\chi-\rho)\Pi(\chi)$ (3).

Για $\chi=\rho$ από την (1) παίρνουμε $f(\rho)=f(0) \Leftrightarrow f(0)=\rho$.

$g(0)=f(0)-\rho=0 \overset{(3)}{\Rightarrow} -\rho\Pi(0)=0 \overset{\rho\neq 0}{\Leftrightarrow} \Pi(0)=0$.Άρα το $\Pi(\chi)$ έχει παράγοντα το χ,δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο $\varphi(\chi)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\Pi(\chi)=\chi\varphi(\chi)$ (4).

Η (3) με βάση την (4) γράφεται $g(\chi)=\chi(\chi-\rho)\varphi(\chi) \Leftrightarrow f(\chi)-\rho=\chi(\chi-\rho)\varphi(\chi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(\chi)=\chi(\chi-\rho)\varphi(\chi)+\rho$.

K

9ο: α) Θεωρούμε τα πολυώνυμα $f(\chi), g(\chi)$ και το μη μηδενικό πολυώνυμο $\delta(\chi)$.Έστω $\upsilon_1(\chi)$, $\upsilon_2(\chi)$ τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $f(\chi):\delta(\chi)$ και $g(\chi):\delta(\chi)$ αντίστοιχα.
Δείξτε ότι: Το $\delta(\chi)$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(\chi)-g(\chi)$ αν και μόνο αν $\upsilon_1(\chi)=\upsilon_2(\chi)$.

β) Έστω τα πολυώνυμα $f(\chi), Q(\chi) = f(\chi) + \chi^3 - 1$**.Αν το** $\chi^2 + \chi + 2$ **διαιρεί το** $Q(\chi)$ **να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης** $f(\chi) : (\chi^2 + \chi + 2)$**.**

Λύση

α) Αν $\Pi_1(\chi), \Pi_2(\chi)$ τα πηλίκα των διαιρέσεων $f(\chi) : \delta(\chi)$ και $g(\chi) : \delta(\chi)$ αντίστοιχα τότε έχουμε $f(\chi) = \delta(\chi)\Pi_1(\chi) + \upsilon_1(\chi)$, $g(\chi) = \delta(\chi)\Pi_2(\chi) + \upsilon_2(\chi)$.Άρα $f(\chi) - g(\chi) = \delta(\chi)[\Pi_1(\chi) - \Pi_2(\chi)] + \upsilon_1(\chi) - \upsilon_2(\chi)$ (1).

- Έστω ότι το $\delta(\chi)$ διαιρεί το $f(\chi) - g(\chi)$.

Είναι $\beta\alpha\theta\mu.\upsilon_1(\chi) < \beta\alpha\theta\mu.\delta(\chi)$ και $\beta\alpha\theta\mu.\upsilon_2(\chi) < \beta\alpha\theta\mu.\delta(\chi)$,οπότε $\beta\alpha\theta\mu.[\upsilon_1(\chi) - \upsilon_2(\chi)] < \beta\alpha\theta\mu.\delta(\chi)$ Άρα λόγω της (1) το $\upsilon_1(\chi) - \upsilon_2(\chi)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $[f(\chi) - g(\chi)] : \delta(\chi)$.Επειδή όμως η διαίρεση αυτή είναι τέλεια, πρέπει $\upsilon_1(\chi) - \upsilon_2(\chi) = 0 \Leftrightarrow \upsilon_1(\chi) = \upsilon_2(\chi)$.

- <u>Αντίστροφα</u>: Έστω ότι $\upsilon_1(\chi) = \upsilon_2(\chi)$.

Από την (1) παίρνουμε $f(\chi) - g(\chi) = \delta(\chi)[\Pi_1(\chi) - \Pi_2(\chi)]$,πράγμα που μας εξασφαλίζει ότι το $\delta(\chi)$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(\chi) - g(\chi)$.

β) Έχουμε $Q(\chi) = f(\chi) - (-\chi^3 + 1)$.Αφού το $\chi^2 + \chi + 2$ διαιρεί το $Q(\chi)$ σύμφωνα με το α) ερώτημα οι διαιρέσεις $f(\chi) : (\chi^2 + \chi + 2)$ και $(-\chi^3 + 1) : (\chi^2 + \chi + 2)$ έχουν το ίδιο υπόλοιπο.

$$
\begin{array}{r|l}
-\chi^3 + 0\chi^2 + 0\chi + 1 & \chi^2 + \chi + 2 \\
\hline
\chi^3 + \chi^2 + 2\chi & -\chi + 1 \\
\hline
\chi^2 + 2\chi + 1 & \\
-\chi^2 - \chi - 2 & \\
\hline
\chi - 1 &
\end{array}
$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(\chi) : (\chi^2 + \chi + 1)$ είναι $\upsilon(\chi) = \chi - 1$.

K

10ο: Έστω ένα μη σταθερό πολυώνυμο $f(\chi)$ **και** α, β **σταθεροί πραγματικοί αριθμοί με** $\alpha \neq \beta$ **.Αν** $\Pi_1(\chi), \Pi_2(\chi)$ **τα πηλίκα των διαιρέσεων** $f(\chi) : (\chi - \alpha)$ **και** $f(\chi) : (\chi - \beta)$ **αντίστοιχα τότε: i) Δείξτε ότι** $\Pi_1(\beta) = \Pi_2(\alpha)$**.**

ii) Να βρείτε το $f(\chi)$ **όταν ισχύει:** $\Pi_1(\chi) f(\chi) = \chi\Pi_2^3(\chi) + \Pi_1^2(\chi)$ **(1).**

Λύση

i) Έχουμε $f(\chi) = (\chi - \alpha)\Pi_1(\chi) + f(\alpha)$ (2) και $f(\chi) = (\chi - \beta)\Pi_2(\chi) + f(\beta)$ (3).

Για $\chi = \beta$ από την (2) και $\chi = \alpha$ από την (3) παίρνουμε $f(\beta) = (\beta - \alpha)\Pi_1(\beta) + f(\alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\alpha) - f(\beta) = (\alpha - \beta)\Pi_1(\beta)$ (4) και $f(\alpha) = (\alpha - \beta)\Pi_2(\alpha) + f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) - f(\beta) =$

$= (\alpha - \beta)\Pi_2(\alpha) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} (\alpha - \beta)\Pi_1(\beta) = (\alpha - \beta)\Pi_2(\alpha) \overset{\alpha \neq \beta}{\Leftrightarrow} \Pi_1(\beta) = \Pi_2(\alpha)$.

ii) Έστω ότι ο βαθμός του $f(\chi)$ είναι ν $(\nu \geq 1)$,τότε τα πολυώνυμα $\Pi_1(\chi), \Pi_2(\chi)$ είναι βαθμού $\nu - 1$.Το πολυώνυμο $\chi\Pi_2^3(\chi)$ είναι βαθμού $1 + 3(\nu - 1) = 3\nu - 2$ και το πολυώνυμο $\Pi_1^2(\chi)$ είναι βαθμού $2(\nu-1)=2\nu-2$.Επειδή $3\nu-2>2\nu-2$ ο βαθμός του πολυωνύμου $\chi\Pi_2^3(\chi)+\Pi_1^2(\chi)$ είναι $3\nu-2$.Το πολυώνυμο $\Pi_1(\chi)f(\chi)$ είναι βαθμού $\nu-1+\nu=2\nu-1$.

Για να ισχύει η (1),αρχικά πρέπει $2\nu-1=3\nu-2 \Leftrightarrow \nu=1$.Άρα το $f(\chi)$ είναι πρώτου βαθμού,οπότε $\Pi_1(\chi)=c_1,\Pi_2(\chi)=c_2$,όπου c_1,c_2 σταθεροί αριθμοί.

Από το i) ερώτημα έχουμε $\Pi_1(\beta)=\Pi_2(\alpha) \Rightarrow c_1=c_2=c\neq 0$.

Άρα η (1) γράφεται $cf(\chi)=c^3\chi+c^2 \Leftrightarrow f(\chi)=c^2\chi+c$ (5).Με βάση τη (5) η διαίρεση $f(\chi):(\chi-\alpha)$ δίνει πηλίκο c^2,οπότε πρέπει $c^2=c \overset{c\neq 0}{\Leftrightarrow} c=1$.Τελικά έχουμε $f(\chi)=\chi+1$.

K

11ο: Δίνονται τα μη μηδενικά πολυώνυμα $\mathrm{A}(\chi),\mathrm{B}(\chi)$.Θεωρούμε τα πολυώνυμα $P(\chi)=\chi^{2004}\mathrm{A}(\chi)+\chi^{2003}\mathrm{B}(\chi)+1$ και $\varphi(\chi)=\chi^{2004}\mathrm{B}(\chi)+\chi^{2003}\mathrm{A}(\chi)+1$.Αν ο ρ με $|\rho|<1$ είναι κοινή ρίζα των $P(\chi),\varphi(\chi)$,δείξτε ότι: i) Είναι $\rho\neq 0$. ii) $\mathrm{A}(\rho)\neq 0$ και $\mathrm{B}(\rho)\neq 0$.

iii) $|\mathrm{A}(\rho)|=|\mathrm{B}(\rho)|>\frac{1}{2}$.

Λύση

i) Είναι $\rho\neq 0$,γιατί αν $\rho=0$,τότε $P(\rho)=0 \Leftrightarrow P(0)=0$.Άτοπο αφού $P(0)=1$.

ii) Έχουμε $P(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho^{2004}\mathrm{A}(\rho)+\rho^{2003}\mathrm{B}(\rho)=-1$, $\varphi(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho^{2004}\mathrm{B}(\rho)+\rho^{2003}\mathrm{A}(\rho)=-1$.

Άρα $\rho^{2004}\mathrm{A}(\rho)+\rho^{2003}\mathrm{B}(\rho)=\rho^{2004}\mathrm{B}(\rho)+\rho^{2003}\mathrm{A}(\rho) \Leftrightarrow \rho^{2003}\mathrm{A}(\rho)(\rho-1)=$

$=\rho^{2003}\mathrm{B}(\rho)(\rho-1) \overset{\rho\neq 1}{\Leftrightarrow} \mathrm{A}(\rho)=\mathrm{B}(\rho)$ (1).

Αν υποθέσουμε ότι $\mathrm{A}(\rho)=0$,τότε από την (1) έχουμε ότι και $\mathrm{B}(\rho)=0$,οπότε $P(\rho)=1$.Άτοπο, αφού είναι $P(\rho)=0$.Άρα $\mathrm{A}(\rho)\neq 0$ και $\mathrm{B}(\rho)\neq 0$.

iii) Στο ii) ερώτημα έχουμε βρει $\mathrm{A}(\rho)=\mathrm{B}(\rho)$,οπότε $P(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho^{2003}\mathrm{A}(\rho)(\rho+1)=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\rho|^{2003}|\rho+1||\mathrm{A}(\rho)|=1$ (2).

$$\left\{\begin{array}{l} |\rho|^{2003}<1 \\ |\rho+1|\leq|\rho|+1<2 \end{array}\right. \Rightarrow |\rho|^{2003}|\rho+1|<2 \Leftrightarrow |\rho|^{2003}|\rho+1||\mathrm{A}(\rho)|<2|\mathrm{A}(\rho)| \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 1<2|\mathrm{A}(\rho)| \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |\mathrm{A}(\rho)|>\frac{1}{2}$.Άρα $|\mathrm{A}(\rho)|=|\mathrm{B}(\rho)|>\frac{1}{2}$.

K

12ο: α) Έστω το πολυώνυμο $f(\chi)$ βαθμού $\nu\geq 1$.Αν $\beta_1,\beta_2,...,\beta_\nu$ πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί ανά δύο,δείξτε ότι υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί $\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_\nu$ τέτοιοι ώστε το $f(\chi)$ να γράφεται στη μορφή:

$f(\chi)=\gamma_0+\gamma_1(\chi-\beta_1)+\gamma_2(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)+...+\gamma_\nu(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)(\chi-\beta_3)...(\chi-\beta_\nu)$.

β) Αν το πολυώνυμο $f(\chi)=\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+...+\alpha_1\chi+\alpha_0$ είναι το πολύ βαθμού ν και μηδενίζεται για $\nu+1$ διαφορετικούς ανά δύο πραγματικούς αριθμούς δείξτε ότι το $f(\chi)$ είναι μηδενικό πολυώνυμο.

γ) Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(\chi)=\frac{(\chi-\alpha)(\chi-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+\frac{(\chi-\beta)(\chi-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(\chi-\gamma)(\chi-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}-2$,όπου α,

β,γ ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί.Δείξτε ότι: $f(\chi)=-1$.

Λύση

α) Εκτελούμε τις διαιρέσεις:

$f(\chi):(\chi-\beta_1)\to f(\chi)=(\chi-\beta_1)\Pi_1(\chi)+\upsilon_1$ (1).

$\Pi_1(\chi):(\chi-\beta_2)\to \Pi_1(\chi)=(\chi-\beta_2)\Pi_2(\chi)+\upsilon_2$ (2).

$\Pi_2(\chi):(\chi-\beta_3)\to \Pi_2(\chi)=(\chi-\beta_3)\Pi_3(\chi)+\upsilon_3$ (3).

....

....

....

$\Pi_{\nu-1}(\chi):(\chi-\beta_\nu)\to \Pi_{\nu-1}(\chi)=(\chi-\beta_\nu)\Pi_\nu(\chi)+\upsilon_\nu$ (ν).

Τα $\upsilon_1,\upsilon_2,...,\upsilon_\nu$ είναι μοναδικοί σταθεροί πραγματικοί αριθμοί αφού είναι υπόλοιπα των προηγούμενων διαιρέσεων.

Τα $\Pi_1(\chi),\Pi_2(\chi),...,\Pi_\nu(\chi)$ είναι τα πηλίκα των διαιρέσεων με $\Pi_\nu(\chi)=c$ όπου c σταθερός πραγματικός με $c\neq 0$.

Πολλαπλασιάζουμε τις (2),(3),...(ν) αντίστοιχα με $\chi-\beta_1,(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2),(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)(\chi-\beta_3),...,$ $(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)...(\chi-\beta_{\nu-1})$ και έχουμε:

$(\chi-\beta_1)\Pi_1(\chi)=(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)\Pi_2(\chi)+\upsilon_2(\chi-\beta_1)$ $(2')$.

$(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)\Pi_2(\chi)=(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)(\chi-\beta_3)\Pi_3(\chi)+(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)\upsilon_3$ $(3')$.

....

....

....

$(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)....(\chi-\beta_{\nu-1})\Pi_{\nu-1}(\chi)=(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)...(\chi-\beta_\nu)\Pi_\nu(\chi)+(\chi-\beta_1)...(\chi-\beta_{\nu-1})\upsilon_\nu$ (ν')

Προσθέτουμε κατά μέλη τις $(1),(2'),(3'),...(\nu')$ και παίρνουμε:

$f(\chi)=\upsilon_1+\upsilon_2(\chi-\beta_1)+\upsilon_3(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)(\chi-\beta_3)+...+\upsilon_\nu(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)...(\chi-\beta_{\nu-1})+$ $+c(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)...(\chi-\beta_{\nu-1})(\chi-\beta_\nu)$.Θέτουμε $\upsilon_1=\gamma_0,\upsilon_2=\gamma_1,...,\upsilon_\nu=\gamma_{\nu-1},c=\gamma_\nu$ και έχουμε:

$f(\chi)=\gamma_0+\gamma_1(\chi-\beta_1)+\gamma_2(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)+...+\gamma_\nu(\chi-\beta_1)(\chi-\beta_2)(\chi-\beta_3)...(\chi-\beta_\nu)$.

β) Έστω $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu,\rho_{\nu+1}$ οι διαφορετικοί ανά δύο πραγματικοί αριθμοί που μηδενίζουν το $f(\chi)$.

- Αν το $f(\chi)$ είναι σταθερό πολυώνυμο,τότε $f(\chi)=\alpha_0\Rightarrow f(\rho_1)=\alpha_0\Rightarrow\alpha_0=0$,οπότε $f(\chi)=0$.
- Αν το $f(\chi)$ δεν είναι σταθερό πολυώνυμο,τότε θα έχει βαθμό κ με $1\leq\kappa\leq\nu$.

Σύμφωνα με το ερώτημα α) υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί $\gamma_0,\gamma_1,...\gamma_\kappa$ έτσι ώστε

$f(\chi)=\gamma_0+\gamma_1(\chi-\rho_1)+\gamma_2(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)+...+\gamma_\kappa(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)...(\chi-\rho_\kappa)$ (I) με $\gamma_\kappa\neq 0$

$f(\rho_1)=0\overset{(I)}{\Rightarrow}\gamma_0=0$. $f(\rho_2)=0\overset{(I)}{\Rightarrow}\gamma_1(\rho_2-\rho_1)=0\overset{\rho_2-\rho_1\neq 0}{\Rightarrow}\gamma_1=0$.Όμοια εργαζόμενοι από τις σχέσεις $f(\rho_3)=0,f(\rho_4)=0,...f(\rho_{\kappa+1})=0$ βρίσκουμε $\gamma_2=\gamma_3=...=\gamma_\kappa=0$.Άτοπο.

Άρα το $f(\chi)$ είναι σταθερό πολυώνυμο,οπότε $f(\chi)=0$.

γ) Θεωρούμε το πολυώνυμο $g(\chi)=f(\chi)+1=\dfrac{(\chi-\alpha)(\chi-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+\dfrac{(\chi-\beta)(\chi-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{(\chi-\gamma)(\chi-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}-1$.

Το $g(\chi)$ είναι το πολύ 2ου βαθμού.Παρατηρούμε ότι: $g(\alpha)=g(\beta)=g(\gamma)=0$.Σύμφωνα με το ερώτημα β) πρέπει $g(\chi)=0\Leftrightarrow f(\chi)+1=0\Leftrightarrow f(\chi)=-1$.

K

13ο: Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ διαφορετικοί ανά δύο πραγματικοί αριθμοί.Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\chi-\alpha_2)(\chi-\alpha_3)(\chi-\alpha_4)+(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_3)(\chi-\alpha_4)=(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)(\chi-\alpha_4)+$ $+(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)(\chi-\alpha_3)$ (1) και $(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)+(\chi-\alpha_3)(\chi-\alpha_4)=0$ (2).

Αν οι (1),(2) έχουν κοινή ρίζα τον $\rho\in R$ να βρεθεί ο ρ.

Λύση

$(1)\Leftrightarrow(\chi-\alpha_3)(\chi-\alpha_4)(2\chi-\alpha_1-\alpha_2)=(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)(2\chi-\alpha_3-\alpha_4)$.

Αφού ο ρ είναι κοινή ρίζα των εξισώσεων (1),(2) πρέπει $(\rho-\alpha_3)(\rho-\alpha_4)(2\rho-\alpha_1-\alpha_2)=$
$=(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_2)(2\rho-\alpha_3-\alpha_4)$ (3) και $(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_2)=-(\rho-\alpha_3)(\rho-\alpha_4)$ (4).
Η (3) με βάση την (4) γράφεται:
$(\rho-\alpha_3)(\rho-\alpha_4)(2\rho-\alpha_1-\alpha_2)=-(\rho-\alpha_3)(\rho-\alpha_4)(2\rho-\alpha_3-\alpha_4)$ (5).
Αν υποθέσουμε ότι $\rho=\alpha_3$,λόγω της (4) θα έχουμε $\rho=\alpha_1$ ή $\rho=\alpha_2$,οπότε θα είναι $\alpha_3=\alpha_1$ ή $\alpha_3=\alpha_2$.Ατοπο.Άρα $\rho\neq\alpha_3$.Όμοια έχουμε $\rho\neq\alpha_4$.Άρα $(\rho-\alpha_3)(\rho-\alpha_4)\neq 0$.Από την (5) παίρνουμε $2\rho-\alpha_1-\alpha_2=-2\rho+\alpha_3+\alpha_4 \Leftrightarrow \rho=\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$.

K

14ο: α) Θεωρούμε την εξίσωση $2\chi^3+(\lambda-5-\sqrt{\lambda^2+5})\chi^2+\lambda\chi+2=0$ (1) με άγνωστο τον $\chi\in R$ και $\lambda\in R$.Αν το 1 είναι ρίζα της (1),να βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $(\chi^2-1)^3-3(\chi^2-1)^2+\chi^2=0$ (2).

Λύση

α) Για κάθε $\lambda\in R$ είναι $\lambda^2+5>0$.

Αφού το 1 είναι ρίζα της (1),πρέπει $2+\lambda-5-\sqrt{\lambda^2+5}+\lambda+2=0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2+5}=2\lambda-1$ (3).

Πρέπει $2\lambda-1>0 \Leftrightarrow \lambda>\frac{1}{2}$.Για $\lambda>\frac{1}{2}$,$(3)\Leftrightarrow 3\lambda^2-4\lambda-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=2, \text{δεκτή} \\ \text{ή} \\ \lambda=-\frac{2}{3}, \text{απορρίπτεται} \end{cases}$.

Για $\lambda=2$ η (1) γράφεται $\chi^3-3\chi^2+\chi+1=0$ (4).Επειδή το 1 είναι ρίζα της (4) έχουμε το παρακάτω σχήμα Horner.

1	-3	1	1	1
	1	-2	-1	
1	-2	-1	0	

Άρα $(4)\Leftrightarrow(\chi-1)(\chi^2-2\chi-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi-1=0 \Leftrightarrow \chi=1 \\ \text{ή} \\ \chi^2-2\chi-1=0 \Leftrightarrow \chi=1\pm\sqrt{2} \end{cases}$.

β) $(2)\Leftrightarrow(\chi^2-1)^3-3(\chi^2-1)^2+(\chi^2-1)+1=0$ (5).Η (5) με άγνωστο αρχικά το χ^2-1 έχει τις ίδιες ρίζες με την εξίσωση (4) του α) ερωτήματος,οπότε:

- $\chi^2-1=1 \Leftrightarrow \chi=\pm\sqrt{2}$.
- $\chi^2-1=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow \chi^2=2+\sqrt{2} \Leftrightarrow \chi=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
- $\chi^2-1=1-\sqrt{2} \Leftrightarrow \chi^2=2-\sqrt{2} \Leftrightarrow \chi=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Σημείωση: **Αν** $A.B\neq 0$ **τότε:** $A=B \Leftrightarrow \begin{cases} A^2=B^2 \\ \text{και} \\ A,B \ \text{ομόσημα} \end{cases}$.

K

15ο: Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i) $\sqrt{\chi-1}+(\chi-1)\sqrt{\chi+1}=1-\chi^2$ **(1).**

ii) $\dfrac{\sqrt{\chi-1}}{\chi-1}+\sqrt{\chi+1}=1$ **(2).**

Λύση

i) Για να ορίζεται η (1) πρέπει: $\begin{cases}\chi-1\ge 0\\ \text{και}\\ \chi+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \chi\ge 1$.

Για $\chi\ge 1$ είναι $1-\chi^2\le 0$,οπότε για τα χ που ζητάμε πρέπει $\sqrt{\chi-1}+(\chi-1)\sqrt{\chi+1}\le 0\overset{\chi\ge1}{\Leftrightarrow}$

$\sqrt{\chi-1}+(\chi-1)\sqrt{\chi+1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{\chi-1}=0\\ \text{και}\\ (\chi-1)\sqrt{\chi+1}=0\end{cases}\overset{\chi\ge 1}{\Leftrightarrow}\chi=1$.Άρα η (1) έχει μία μόνο ρίζα το 1.

Σημείωση: **Προσπαθήστε να λύσετε την εξίσωση και με αντικατάσταση: Για $\chi\ge 1$ θέστε $\sqrt{\chi-1}=\omega\ge 0$...**

ii) Η (2) ορίζεται για $\chi>1$.Για $\chi>1$,θέτουμε $\sqrt{\chi-1}=\omega$ (3).Είναι $\omega>0$.

$(3)\Leftrightarrow \chi-1=\omega^2\Leftrightarrow \chi=1+\omega^2$.

$(2)\Leftrightarrow \sqrt{\chi-1}+(\chi-1)\sqrt{\chi+1}=\chi-1\Leftrightarrow \omega+\omega^2\sqrt{2+\omega^2}=\omega^2\Leftrightarrow \omega\sqrt{2+\omega^2}=\omega-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\omega-1>0\text{ και }\omega>0\\ \text{και}\\ (\omega\sqrt{2+\omega^2})^2=(\omega-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega>1\\ \text{και}\\ \omega^4+\omega^2+2\omega-1=0\ (4)\end{cases}$.Η (4) όμως,όταν $\omega>1$είναι αδύνατη,αφού $\omega^4+\omega^2+2\omega-1>0$.Άρα και η (2) είναι αδύνατη.

K

16ο: Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{1-\eta\mu\chi}=\lambda$ **(1),με** $\lambda\in Z$**.**

Λύση

Για κάθε $\chi\in R$ έχουμε $-1\le\eta\mu\chi\le 1\Rightarrow \eta\mu\chi\le 1\Leftrightarrow 1-\eta\mu\chi\ge 0$.Άρα η εξίσωση ορίζεται στο R.

- ✓ Αν $\lambda<0$,η εξίσωση είναι αδύνατη.
- ✓ Αν $\lambda\ge 0$,τότε $(1)\Leftrightarrow 1-\eta\mu\chi=\lambda^2\Leftrightarrow \eta\mu\chi=1-\lambda^2$ (2).

Είναι $-1\le\eta\mu\chi\le 1$,οπότε για να έχει νόημα η (2) πρέπει $-1\le 1-\lambda^2\le 1\Leftrightarrow -2\le-\lambda^2\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\le\lambda^2\le 2\Leftrightarrow 0\le|\lambda|\le\sqrt{2}\overset{\lambda\ge 0}{\Leftrightarrow}0\le\lambda\le\sqrt{2}\overset{\lambda\in Z}{\Rightarrow}\lambda=0$ ή $\lambda=1$.Έτσι η (2) γράφεται:

- Για $\lambda=0$, $\eta\mu\chi=1\Leftrightarrow \eta\mu\chi=\eta\mu\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ \text{ή}\\ \chi=2\kappa\pi+\pi-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \chi=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\kappa\in Z$.

- Για $\lambda = 1$, $\eta\mu\chi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi \\ \acute{\eta} \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi = (2\kappa+1)\pi \end{cases}, \kappa \in Z \Leftrightarrow \chi = \rho\pi, \rho \in Z$.

K

17ο: Η συνάρτηση $f(\chi) = \sqrt{2}\eta\mu\omega\chi, \omega > 0$ είναι περιοδική με περίοδο π και έστω μια γωνία $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

α) Δείξτε ότι: $(\varepsilon\varphi\theta - 1)(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{\sqrt{2}}{\omega}) < 0$.

β) i) Να λύσετε την εξίσωση $(\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{\chi} + (\eta\mu\theta)\sqrt{\chi - 1} = \sqrt{\chi}$ **(1).**

ii) Δείξτε ότι: $\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu\theta} + \sqrt{2}(\varepsilon\varphi\theta)\eta\mu\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}}{\sigma\upsilon\nu\theta}$.

Λύση

α) Η f είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \pi = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = 2$.

Άρα ζητάμε να δείξουμε ότι $(\varepsilon\varphi\theta - 1)(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}) < 0$.

Η συνάρτηση του συνημιτόνου και της εφαπτομένης στο διάστημα $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως αύξουσα αντίστοιχα.

$$\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} \theta > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta > \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta > 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta - 1 > 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} < \sigma\upsilon\nu\theta < \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \end{cases}.$$

Άρα $(\varepsilon\varphi\theta - 1)(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}) < 0$.

β) i) Αρχικά η (1) ορίζεται για $\chi \geq 1$.Για $\chi \geq 1$ τα μέλη της (1) είναι θετικά.Έτσι έχουμε:

$(1) \Leftrightarrow [(\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{\chi} + (\eta\mu\theta)\sqrt{\chi - 1}]^2 = (\sqrt{\chi})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu^2\theta)\chi + (\eta\mu^2\theta)(\chi - 1) + (2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{\chi(\chi-1)} = \chi \Leftrightarrow (2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{\chi(\chi-1)} = \eta\mu^2\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\chi(\chi-1)} = \frac{\varepsilon\varphi\theta}{2}$ (2).Παρατηρούμε ότι το 1 δεν είναι ρίζα της (2),οπότε δεν είναι ρίζα και της (1).Άρα τα χ που ζητάμε είναι $\chi > 1$. (2) $\overset{\varepsilon\varphi\theta>0}{\Leftrightarrow} \chi^2 - \chi - \frac{1}{4}\varepsilon\varphi^2\theta = 0$ (3).

Η διακρίνουσα της (3) είναι $\Delta = 1 + \varepsilon\varphi^2\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$,οπότε οι ρίζες της (3) είναι $\chi = \frac{1 \pm \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}}{2} =$

$= \frac{\sigma\upsilon\nu\theta \pm 1}{2\sigma\upsilon\nu\theta}$.Όμως η τιμή $\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta - 1}{2\sigma\upsilon\nu\theta} < 0$,οπότε απορρίπτεται.Για το $\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta + 1}{2\sigma\upsilon\nu\theta}$ έχουμε $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta + 1}{2\sigma\upsilon\nu\theta} > 1 \overset{\sigma\upsilon\nu\theta>0}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu\theta + 1 > 2\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta < 1$,που ισχύει για τη δοσμένη γωνία θ.

Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση την $\chi = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta}$.

ii) Από το i) ερώτημα έχουμε ότι η $\chi = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).Άρα πρέπει

$$(\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta}} + (\eta\mu\theta)\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta}-1} = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta}} \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + (\eta\mu\theta)\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\theta} =$$

$$= \sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta} \Leftrightarrow \sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}}{\sigma\upsilon\nu\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + (\varepsilon\varphi\theta)\sqrt{2\eta\mu^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}}{\sigma\upsilon\nu\theta} \Leftrightarrow \sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \sqrt{2}(\varepsilon\varphi\theta)\left|\eta\mu\frac{\theta}{2}\right| = \frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}}{\sigma\upsilon\nu\theta} \overset{\eta\mu\frac{\theta}{2}>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \sqrt{2}(\varepsilon\varphi\theta)\eta\mu\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}}{\sigma\upsilon\nu\theta}.$$

Σημείωση: Προσπαθήστε να λύσετε το β ii) χωρίς να γίνει χρήση του β i).