Απλή απόδειξη θεωρήματος Darboux

Έστω ότι $f'(\alpha) < n < f'(\beta)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - nx, x \in [\alpha, \beta]$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων με $g'(x) = f'(x) - n$.

Στο $[\alpha, \beta]$ η g ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής, οπότε στο διάστημα αυτό θα παρουσιάζει ελάχιστη τιμή.

- $g'(\alpha) = f'(\alpha) - n < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha^+} \dfrac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} < 0$. Άρα κοντά στο α από μεγαλύτερες τιμές του είναι $\dfrac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} < 0 \overset{x-\alpha>0}{\Leftrightarrow} g(x) - g(\alpha) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(\alpha)$. Αυτό σημαίνει ότι το ελάχιστο της g δεν γίνεται για $x = \alpha$.
- $g'(\beta) = f'(\beta) - n > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \beta^-} \dfrac{g(x) - g(\beta)}{x - \beta} > 0$. Άρα κοντά στο β από μικρότερες τιμές του είναι $\dfrac{g(x) - g(\beta)}{x - \beta} > 0 \overset{x-\beta<0}{\Rightarrow} g(x) - g(\beta) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(\beta)$. Αυτό σημαίνει ότι το ελάχιστο της g δεν γίνεται για $x = \beta$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο για κάποιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = n$.

Σπύρος Γιαννακόπουλος