

Πρόβλημα 4^ο

Να λυθεί το σύστημα Σ στο σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών:

$$\Sigma: \begin{cases} \alpha \sqrt[3]{b} - c = a \\ b \sqrt[3]{c} - a = b \\ c \sqrt[3]{a} - b = c \end{cases} .$$

Λύση

- Προφανής λύση του (Σ) είναι η μηδενική, δηλαδή $(\alpha, b, c) = (0, 0, 0)$.
- Αν ένα τουλάχιστον των α, b, c είναι διάφορο του μηδέν π.χ $\alpha \neq 0$ τότε και τα b, c είναι διάφορα του μηδέν. Πράγματι: Αν ήταν $b = 0$, από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος θα είναι $\alpha = 0$. Άτοπο. Άρα στην περίπτωση μας είναι $\alpha > 0, b > 0, c > 0$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος και παίρνουμε:

$$\alpha \sqrt[3]{b} + b \sqrt[3]{c} + c \sqrt[3]{a} = 2\alpha + 2b + 2c \Leftrightarrow \alpha(\sqrt[3]{b} - 2) + b(\sqrt[3]{c} - 2) + c(\sqrt[3]{a} - 2) = 0 \quad (1)$$

Λόγω της (1) και αφού α, b, c θετικοί οι $\sqrt[3]{b} - 2, \sqrt[3]{c} - 2, \sqrt[3]{a} - 2$ δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα και οι τρεις θετικοί ή και οι τρεις αρνητικοί.

— Έστω ότι $\sqrt[3]{b} - 2 > 0$ και $\sqrt[3]{c} - 2 < 0, \sqrt[3]{a} - 2 < 0$.

$$\alpha \sqrt[3]{b} - c = a \Leftrightarrow \alpha(\sqrt[3]{b} - 1) = c \Leftrightarrow \sqrt[3]{b} - 1 = \frac{c}{\alpha} \Leftrightarrow \sqrt[3]{b} = \frac{c}{\alpha} + 1 > 2 \Rightarrow c > \alpha .$$

$$b \sqrt[3]{c} - a = b \Leftrightarrow b(\sqrt[3]{c} - 1) = a \Leftrightarrow \sqrt[3]{c} - 1 = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \sqrt[3]{c} = \frac{a}{b} + 1 < 2 \Rightarrow \alpha < b .$$

Όμοια από την $c \sqrt[3]{a} - b = c$ και $\sqrt[3]{a} < 2$ παίρνουμε $b < c$.

Άρα έχουμε $\boxed{\alpha < b < c}$ που είναι άτοπο αφού: $\sqrt[3]{b} - 2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{b} > 2 \Leftrightarrow \boxed{b > 8}$ και $\sqrt[3]{c} - 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{c} < 2 \Leftrightarrow \boxed{c < 8}$ και $\sqrt[3]{a} - 2 < 0 \Leftrightarrow \boxed{a < 8}$.

— Όμοια αποκλείεται και η περίπτωση ένα από τα $\sqrt[3]{b} - 2, \sqrt[3]{c} - 2, \sqrt[3]{a} - 2$ να είναι αρνητικό και τα άλλα δύο να είναι θετικά.

Τελικά η μόνη περίπτωση για να ισχύει η (1) είναι $\sqrt[3]{b} - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = 8}$ και $\sqrt[3]{c} - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = 8}$ και $\sqrt[3]{a} - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 8}$. Άρα και η $(\alpha, b, c) = (8, 8, 8)$ είναι λύση του συστήματος.

Συνεπώς το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι $L = \{(0, 0, 0), (8, 8, 8)\}$.