ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c ,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c ,$$

με $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$.

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

Μονάδες 6

Β2. Αν $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1–1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

Β3. Έστω $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$.

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$, όπου $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & ,\quad x<-1\\ 3x^2-1 & ,\quad x>-1\end{cases}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}-2x-2 & ,\quad x\le -1\\ x^3-x & ,\quad x>-1\end{cases}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ με $x_0>-1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2.

Μονάδες 5

Γ3. Έστω $y=2x-2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x>2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες (2,0). Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Β(3,4) ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε τη χρονική στιγμή t_0.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x-\ln(3x)$$

Δ1. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2, με $x_1<1<x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) .$$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2 - x_1) < 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ε Ν Δ Ε Ι Κ Τ Ι Κ Ε Σ   Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολ. βιβλίο.
Α2. Βλέπε σχολ. βιβλίο.
Α3. Βλέπε σχολ. βιβλίο.
Α4. **α.** → Σωστό.
β. → Σωστό.
γ. → Σωστό.
δ. → Λάθος.
ε. → Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θεωρούμε το σύνολο $\Sigma=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}$.

$\begin{cases} x\in D_g \\ \text{και} \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x}\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1$. Άρα $\Sigma=[0,1]$, οπότε ορίζεται η συνάρτηση h με πεδίο ορισμού το Σ και τύπο: $h(x)=f(g(x))=g^4(x)-2g^2(x)+1=x^2-2x+1\Leftrightarrow h(x)=(x-1)^2$.

Β2. Για κάθε $x\in[0,1)$ έχουμε $h'(x)=2(x-1)<0$. Επιπλέον $\lim\limits_{x\to 1^-}h(x)=0=h(1)$. Άρα η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα και άρα είναι “1-1” που σημαίνει ότι η συνάρτηση h είναι αντιστρέψιμη.
Αφού η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχουμε $h([0,1])=[h(1),h(0)]=[0,1]$.
Για $x\in[0,1]$ και $y\in[0,1]$ έχουμε $h(x)=y\Leftrightarrow(x-1)^2=y\overset{x-1\leq 0}{\Leftrightarrow}x-1=-\sqrt{y}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}$.
Άρα $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x},x\in[0,1]$.

Β3. Είναι $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x\in[0,1) \\ \dfrac{1}{2} & ,x=1\end{cases}$.

i. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
$\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}=\varphi(1)$. Άρα η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης $\varphi(0)=1$ και $\varphi(1)=\dfrac{1}{2}$,δηλαδή $\varphi(0)\neq\varphi(1)$. Συνεπώς πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

ii. $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1 \Leftrightarrow \varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$ (1). Αφού για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών λόγω της (1) θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για x< −1, $f'(x) = -2 \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)' \Leftrightarrow f(x) = -2x + c_1$.

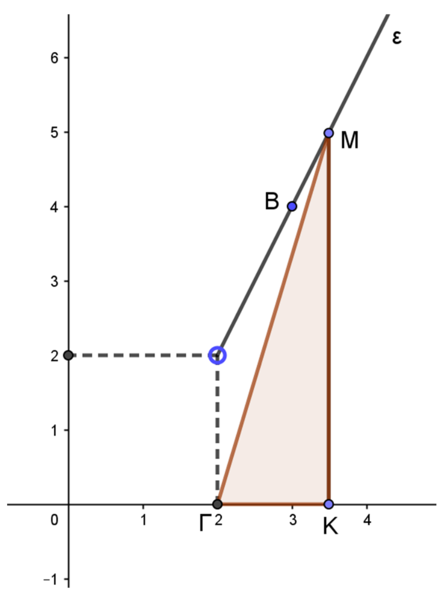
Για x> −1, $f'(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - x)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 - x + c_2$. Είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$. Άρα $f(x) = x^3 - x, x > -1$. Η f είναι συνεχής στο −1 ,οπότε $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$.

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(-2x + c_1) = 2 + c_1$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(x^3 - x) = 0$. Πρέπει $2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$ και $f(-1) = 0$. Άρα $f(x) = \begin{cases} -2x-2, & x \le -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$.

Γ2. Έχουμε $\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Πρέπει $-2 - f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow$
$-2 - (x_0^3 - x_0) = -x_0(3x_0^2 - 1) \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$. $f(x_0) = 0$ και $f'(x_0) = 2$.

Άρα $\varepsilon : y = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

Γ3.



Για x>2, έχουμε $(\Gamma K) = x - 2$ και $(MK) = y_M = 2x - 2$.

$E = \frac{1}{2}(K\Gamma)(MK) = \frac{1}{2}(x-2)(2x-2) = (x-2)(x-1) \Leftrightarrow$

$E = x^2 - 3x + 2$. Την τυχαία χρονική στιγμή t έχουμε $E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2$ (1).

Παραγωγίζουμε την (1) με μεταβλητή παραγώγισης το t και παίρνουμε $E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε $x(t_0) = 3$ και $x'(t_0) = 2$.

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $E'(t_0) = 6$ μονάδες / sec.

Γ4. Θέτουμε $A = \lim_{x\to -\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^2}\right]$. Κοντά στο $-\infty$ είναι $f(x) = -2x - 2$.

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2}\right| = \left|\frac{\eta\mu(2x+2)}{2x+2}\right| = \frac{|\eta\mu(2x+2)|}{|2x+2|} \le \frac{1}{|2x+2|} \Leftrightarrow$$

$-\frac{1}{|2x+2|} \le \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \le \frac{1}{|2x+2|}$ (2). Όμως κοντά στο $-\infty$ είναι 2x+2<0 , οπότε

$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2\chi+2} \le \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \le -\frac{1}{2x+2}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2x+2} = 0$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμο

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^3+x}{1-x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{-x^3} = 1$. Συνεπώς $A = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 1 - \frac{1}{3x}(3x)' = 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x-1}{x}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$			↘	$f(1)$ ολ. ελαχ.	↗	

$f(1) = 1 - \ln 3 = \ln\frac{e}{3} < 0$. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right)\right]$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(3x))'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$,οπότε

$f((0,1]) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right) = \left[\ln\frac{e}{3}, +\infty\right)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε

$f([1,+\infty)) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[\ln\frac{e}{3}, +\infty\right)$.

Επειδή το μηδέν ανήκει στα παραπάνω σύνολα τιμών και λόγω της μονοτονίας της f η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (1,+\infty)$.

ii. Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = \cdots = \frac{1}{x^2} > 0$. Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο $E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$.

Αν $x_1 \le x \le 1 \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta,\sigma\tau o(01]}{\Rightarrow} f(x) \le f(x_1) \Rightarrow f(x) \le 0$.

Αν $1 \le x \le x_2 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.\sigma\tau o[1,+\infty)}{\Rightarrow} f(x) \le f(x_2) \Rightarrow f(x) \le 0$ Άρα για κάθε $x \in [x_1, x_2], f(x) \le 0$

Έτσι έχουμε $E = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = -\int_{x_1}^{x_2} x dx + \int_{x_1}^{x_2} \ln(3x) dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln(3x) dx =$

$-\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + [x\ln(3x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 1 dx = -\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - (x_2 - x_1)$ (1).

Έχουμε $f(x_1)=0 \Leftrightarrow \ln(3x_1)=x_1$. Όμοια $\ln(3x_2)=x_2$.

Άρα από την (1) έχουμε $E=-\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)+x_2^2-x_1^2-(x_2-x_1)=...=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)$.

Δ3. Είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$. Από το ερώτημα Δ2 έχουμε $E>0 \overset{x_2-x_1>0}{\Leftrightarrow}$

$x_1+x_2-2>0 \Leftrightarrow x_1+x_2>2$.

$x_1<2-x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1<2 \Leftrightarrow x_1<1 \text{, που ισχύει} \\ \text{και} \\ x_1+x_2>2 \text{, που ισχύει} \end{cases}$. Άρα $f(2-x_1)<0$.

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_2,f(x_2))=(x_2,0)$ είναι

$y=f'(x_2)(x-x_2)$. Επειδή η f είναι κυρτή είναι $f(x)\ge y \Leftrightarrow f(x)\ge f'(x_2)(x-x_2)$ (2).

Η (2) ισχύει ως ισότητα όταν $x=x_2$.

Η f για x=1 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο (βλέπε Δ1), δηλαδή $f(x)\ge f(1)$ (3).

Οι $(2),(3)$ ως ισότητες ισχύουν για διαφορετικές τιμές του x, οπότε αν προστεθούν κατά μέλη θα πάρουμε καθαρή ανισοτική σχέση, δηλαδή $2f(x)>f(1)+f'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow$

$2f(x)>1-\ln 3+f'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow 2f(x)+\ln 3>1+f'(x_2)(x-x_2)$. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.