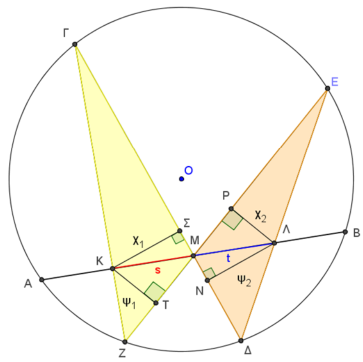
Θεώρημα της πεταλούδας

Έστω ΑΒ μια χορδή ενός κύκλου και Μ το μέσον της.
Οι χορδές ΓΔ,ΕΖ διέρχονται από το Μ με τα σημεία Γ,Ε είναι προς το ίδιο μέρος της χορδής ΑΒ.
Οι χορδές ΓΖ,ΕΔ τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Κ,Λ αντίστοιχα,τότε είναι ΜΚ=ΜΛ.

Απόδειξη



$$\text{Έστω ότι } \mathrm{AM} = \mathrm{MB} = \omega \text{ και } MK = s\,, \mathrm{M\Lambda} = t$$

$$\mathrm{KA.KB} = \mathrm{K\Gamma.KZ} \iff (\omega - s)(\omega + s) = \mathrm{K\Gamma.KZ} \iff \mathrm{K\Gamma.KZ} = \omega^2 - s^2$$

$$\mathrm{\Lambda B.\Lambda A} = \mathrm{\Lambda E.\Lambda\Delta} \iff (\omega - t)(\omega + t) = \mathrm{\Lambda E.\Lambda\Delta} \iff \mathrm{\Lambda E.\Lambda\Delta} = \omega^2 - t^2$$

$$\tau\rho\iota\gamma.\mathrm{\Sigma K\Gamma} \sim \tau\rho\iota\gamma.P\mathrm{\Lambda E} \Rightarrow \frac{\chi_1}{\chi_2} = \frac{\mathrm{K\Gamma}}{\mathrm{\Lambda E}} \quad (1)$$

$$\tau\rho\iota\gamma.T\mathrm{KZ} \sim \tau\rho\iota\gamma.\mathrm{N\Lambda\Delta} \Rightarrow \frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{\Lambda\Delta}} \quad (2)$$

$$(1)\chi(2) \Rightarrow \frac{\chi_1\psi_1}{\chi_2\psi_2} = \frac{\mathrm{K\Gamma.KZ}}{\mathrm{\Lambda E.\Lambda\Delta}} \iff \frac{\chi_1\psi_1}{\chi_2\psi_2} = \frac{\omega^2 - s^2}{\omega^2 - t^2} \quad (\mathrm{I})$$

$$\tau\rho\iota\gamma.\mathrm{\Sigma KM} \sim \tau\rho\iota\gamma.\mathrm{NM\Lambda} \Rightarrow \frac{\chi_1}{\psi_2} = \frac{s}{t} \quad (3)$$

$$\tau\rho\iota\gamma.P\mathrm{M\Lambda} \sim \tau\rho\iota\gamma.\mathrm{TMK} \Rightarrow \frac{\psi_1}{\chi_2} = \frac{s}{t} \quad (4)$$

$$\frac{\omega^2 - s^2}{\omega^2 - t^2} = \frac{s^2}{t^2} \Rightarrow \frac{\omega^2 - s^2}{\omega^2 - t^2} = \frac{s^2}{t^2} = \frac{\omega^2 - s^2 + s^2}{\omega^2 - t^2 + t^2} = 1 \Rightarrow \frac{s^2}{t^2} = 1 \Rightarrow s = t \iff \mathrm{MK} = \mathrm{M\Lambda}$$