

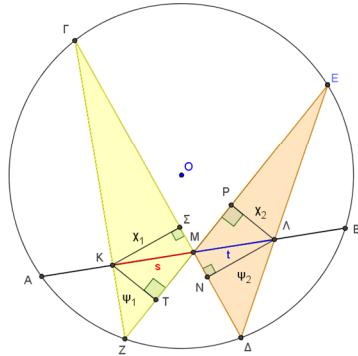
Θεώρημα της πεταλούδας

Έστω AB μια χορδή ενός κύκλου και M το μέσον της.

Οι χορδές ΓΔ, ΕΖ διέρχονται από το M με τα σημεία Γ, Ε είναι προς το ίδιο μέρος της χορδής AB.

Οι χορδές ΓΖ, ΕΔ τέμνουν την AB στα σημεία Κ, Λ αντίστοιχα, τότε είναι MK=ML.

Απόδειξη



$$\text{Έστω ότι } AM = MB = \omega \text{ και } MK = s, ML = t$$

$$KA \cdot KB = KG \cdot KZ \iff (\omega - s)(\omega + s) = KG \cdot KZ \iff KG \cdot KZ = \omega^2 - s^2$$

$$AL \cdot LA = LE \cdot LD \iff (\omega - t)(\omega + t) = LE \cdot LD \iff LE \cdot LD = \omega^2 - t^2$$

$$\text{τριγωνία } \Sigma K \Gamma \sim \text{τριγωνία } \rho A E \Rightarrow \frac{\chi_1}{\chi_2} = \frac{KG}{AE} \quad (1)$$

$$\text{τριγωνία } T K Z \sim \text{τριγωνία } N A D \Rightarrow \frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{KZ}{LD} \quad (2)$$

$$(1) \chi(2) \Rightarrow \frac{\chi_1 \psi_1}{\chi_2 \psi_2} = \frac{KG \cdot KZ}{LE \cdot LD} \iff \frac{\chi_1 \psi_1}{\chi_2 \psi_2} = \frac{\omega^2 - s^2}{\omega^2 - t^2} \quad (I)$$

$$\text{τριγωνία } \Sigma K M \sim \text{τριγωνία } N M A \Rightarrow \frac{\chi_1}{\psi_2} = \frac{s}{t} \quad (3)$$

$$\text{τριγωνία } \rho M A \sim \text{τριγωνία } T M K \Rightarrow \frac{\psi_1}{\chi_2} = \frac{s}{t} \quad (4)$$

$$\frac{\omega^2 - s^2}{\omega^2 - t^2} = \frac{s^2}{t^2} \Rightarrow \frac{\omega^2 - s^2}{\omega^2 - t^2} = \frac{s^2}{t^2} = \frac{\omega^2 - s^2 + s^2}{\omega^2 - t^2 + t^2} = 1 \Rightarrow \frac{s^2}{t^2} = 1 \Rightarrow s = t \iff MK = ML$$