

4.3 Η έννοια της πιθανότητας

Το βασικό χαρακτηριστικό όλων των παραδειγμάτων που είδαμε μέχρι στιγμής είναι η αβεβαιότητα για τα αποτελέσματα των ερευνητικών ερωτημάτων. Έτσι, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων πόσοι μαθητές επισκέφθηκαν μία φορά κάποιο μουσείο στο Παράδειγμα 1, ούτε το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν πάνω από 4 λεπτά για την επίλυση της άσκησης στο Παράδειγμα 2. Επιπλέον, αν τα παραπάνω πειράματα τύχης (δηλαδή πειράματα τα αποτελέσματα των οποίων εξαρτώνται από την αβεβαιότητα, την τύχη) επαναληφθούν είναι σχεδόν βέβαιο ότι δεν θα έχουμε ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα. Θα ήταν λοιπόν πολύ χρήσιμο να αντιστοιχήσουμε σε κάθε κατάσταση ενός πειράματος τύχης, την οποία αποκαλούμε **ενδεχόμενο** (event), έναν αριθμό που να εκφράζει αυτή την άγνωστη σε εμάς τιμή της σχετικής συχνότητας. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **πιθανότητα** (probability). Η πιθανότητα λοιπόν είναι ένα μέτρο της προσδοκίας με την οποία αναμένουμε να υλοποιηθούν διάφορες καταστάσεις της πραγματικότητας που διέπονται από αβεβαιότητα.

Υπάρχουν διάφοροι ορισμοί για την έννοια της πιθανότητας. Στην παρούσα εργασία θα ακολουθήσουμε τον εμπειρικό ή στατιστικό ορισμό. Ο ορισμός βασίζεται σε εμπειρικές παρατηρήσεις που δείχνουν ότι η σχετική συχνότητα που εμφανίζεται σε πολλαπλές επαναλήψεις του ίδιου πειράματος τείνει να σταθεροποιηθεί σε κάποια συγκεκριμένη τιμή την οποία θεωρούμε ως την πιθανότητα του ενδεχομένου (Παπαϊωάννου 1982, σελ. 39-40). Συγκεκριμένα, ορίζουμε πιθανότητα ενός ενδεχομένου A και τη συμβολίζουμε με $\Pr(A)$ τη σχετική συχνότητα αυτού του ενδεχομένου, όταν το πείραμα επαναλαμβάνεται θεωρητικά άπειρες φορές. Δηλαδή,

$$\Pr(A) = \frac{v_A}{v} = f_A, \text{ καθώς το } v \text{ τείνει στο άπειρο.}$$

Στην πράξη η έκφραση «καθώς το v τείνει στο άπειρο» σημαίνει ότι εκτελούμε το πείραμα πάρα πολλές φορές. Πρέπει να τονιστεί ότι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι γενικά άγνωστη και συνήθως δύσκολο να υπολογιστεί, για αυτό και προσεγγίζεται από τη σχετική συχνότητα. Η εφαρμογή του εμπειρικού ορισμού της πιθανότητας αναδεικνύεται από το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1 (Συνέχεια - Εμπειρικός ορισμός πιθανότητας)

Το ενδεχόμενο A: «Ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής του Νομού επισκέφθηκε 2 φορές κάποιο μουσείο κατά το έτος 2011» γράφεται ισοδύναμα A: $X = 2$ και έχει, με βάση τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, πιθανότητα που δίνεται από τη σχέση:

$$\Pr(A) = \Pr(X = 2) = f_3 = 0.20 \text{ ή } 20\%.$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα ήταν πιο κοντά στην πραγματικότητα αν το δείγμα μας αποτελούνταν από πολύ περισσότερους μαθητές, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη «το n τείνει στο άπειρο».

■

Παράδειγμα 2 (Συνέχεια - Εμπειρικός ορισμός πιθανότητας)

Το ενδεχόμενο A: «Ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής χρειάστηκε πάνω από 2 λεπτά για την επίλυση της άσκησης φυσικής» γράφεται ισοδύναμα A: $X > 120$ και έχει, με βάση τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, πιθανότητα που δίνεται από τη σχέση:

$$\Pr(A) = \Pr(X > 120) = f_3 + f_4 + f_5 = 0.30 + 0.15 + 0.10 = 0.55 \text{ ή } 55\%.$$

■

Παράδειγμα 5 (Εμπειρικός ορισμός πιθανότητας)

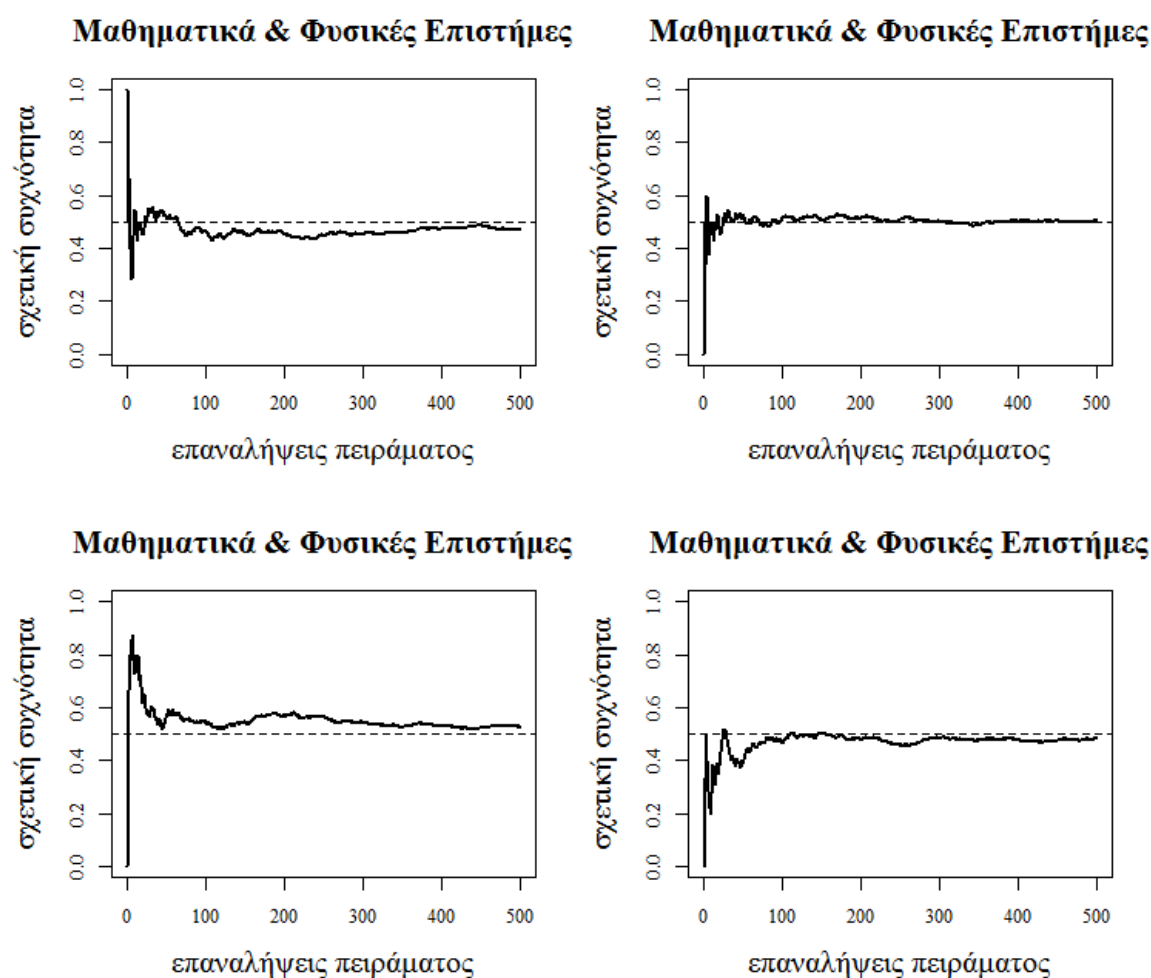
Σε ένα εκπαιδευτικό παιχνίδι γνώσεων οι μαθητές έχουν να επιλέξουν μία μόνο ερώτηση από δύο κατηγορίες: Μαθηματικά & Φυσικές Επιστήμες και Νεοελληνική Γλώσσα & Λογοτεχνία. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A: «ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής να επιλέξει την κατηγορία ερωτήσεων Μαθηματικά & Φυσικές Επιστήμες», αν είναι γνωστό ότι θα συμμετέχουν 500 μαθητές; Η προσδοκία που έχουμε για το παραπάνω πείραμα τύχης είναι ότι περίπου οι μισοί μαθητές θα επιλέξουν την πρώτη κατηγορία ερωτήσεων και οι υπόλοιποι τη δεύτερη κατηγορία. Επομένως, η πιθανότητα του A ισούται με 0.50 ή 50%. Δεν θα είχαμε την ίδια ακριβώς αίσθηση για τα αποτελέσματα αν οι συμμετέχοντες ήταν λίγοι, π.χ. 10 μαθητές. Τότε δεν θα ήταν καθόλου δύσκολο 7 ή 8 από αυτούς να επέλεξαν την πρώτη κατηγορία και οι υπόλοιποι τη δεύτερη. Οι σχετικές συχνότητες και οι αντίστοιχες πιθανότητες σε αυτή την περίπτωση θα ήταν αρκετά διαφορετικές από το 50%. Η παραπάνω διαισθητική προσέγγιση συμφωνεί με τα αποτελέσματα από τέσσερα διαφορετικά δείγματα 500 μαθητών που αναπαριστώνται στο Σχήμα 12.

Σε κάθε μία από τις τέσσερις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος ... παρατηρούμε ότι στις πρώτες επαναλήψεις του πειράματος (δηλαδή στους πρώτους μαθητές που επέλεξαν την κατηγορία Μαθηματικά & Επιστήμες) έχουμε έντονες

μεταβολές στη σχετική συχνότητα. Όμως μετά τους 100 περίπου πρώτους μαθητές η σχετική συχνότητα ομαλοποιείται και τείνει στην τιμή 0.50 (διακεκομμένη γραμμή), που θεωρείται με βάση τον εμπειρικό ορισμό πιθανότητας η πιθανότητα του ενδεχομένου, δηλαδή

$$\Pr(\text{«ένας μαθητής να επιλέξει την κατηγορία Μαθηματικά \& Φυσικές Επιστήμες»})=0.5$$

Στα ίδια συμπεράσματα θα καταλήξουμε όσες φορές και αν εκτελέσουμε το ίδιο πείραμα τύχης. Οι εντολές της R για τη δημιουργία του σχήματος περιλαμβάνονται στο αρχείο [probability_definition.R](#) (Φωκιανός & Χαραλάμπους, 2010, σελ. 67-69).



Σχήμα 12. Σε καθένα από τα τέσσερα γραφήματα αναπαρίσταται το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων των επιλογών (Μαθηματικά & Φυσικές Επιστήμες και Νεοελληνική Γλώσσα & Λογοτεχνία) 500 μαθητών. Η οριζόντια διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην τιμή 0.5.

■

4.4 Κατανομές πιθανότητας

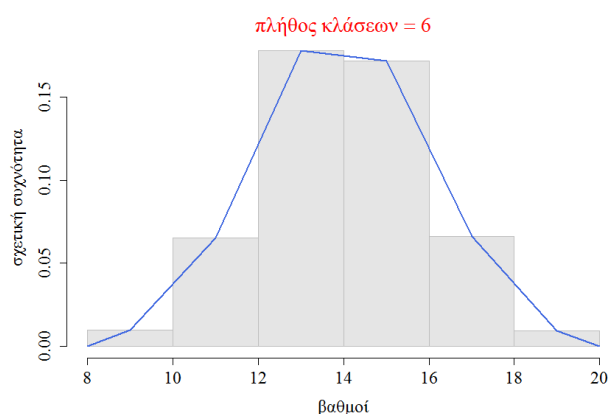
Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων σε ομαδοποιημένα δεδομένα μιας ποσοτικής μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλος, δηλαδή τείνει στο άπειρο, και το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό, δηλαδή τείνει στο μηδέν, τότε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων τείνει σε μια ομαλή καμπύλη, την οποία ονομάζουμε **καμπύλη συχνοτήτων** (frequency curve).

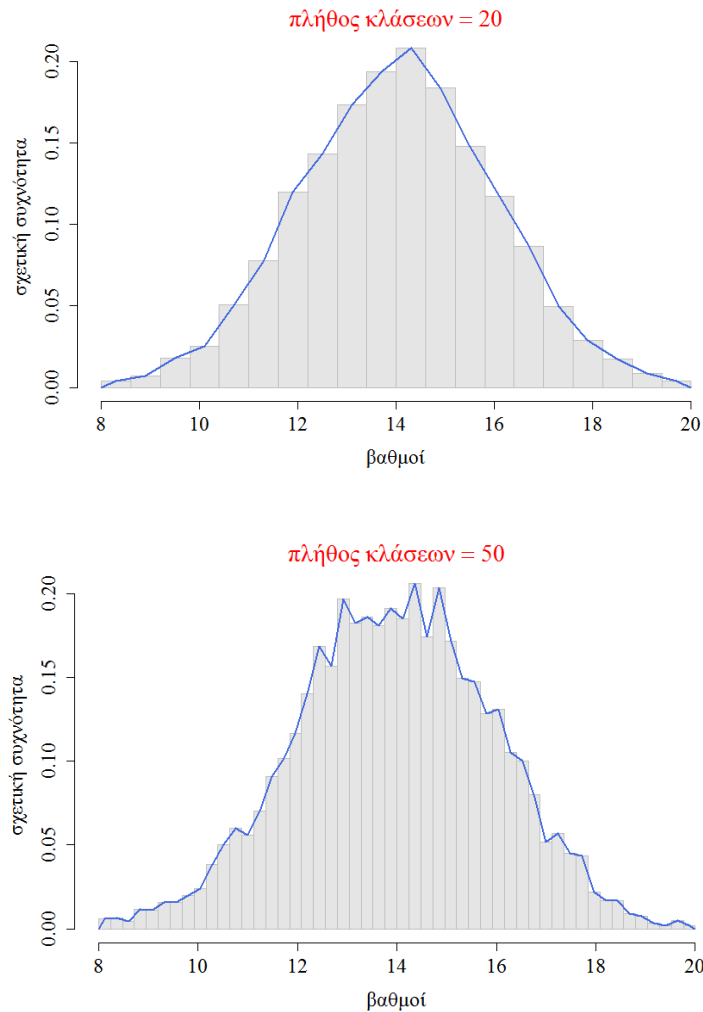
Παράδειγμα 6 (Καμπύλη συχνοτήτων)

Στο Σχήμα 13 ομαδοποιήσαμε τους βαθμούς 5,000 μαθητών σε ένα μάθημα των Πανελληνίων εξετάσεων του 2011, οι οποίοι κυμαίνονται από 8 έως 20 στην κλίμακα αξιολόγησης με άριστα το 20. Στα τρία ιστογράμματα συχνοτήτων μεταβάλλουμε τον αριθμό των κλάσεων και σχηματίζουμε το αντίστοιχο πολύγωνο σε κάθε περίπτωση. Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των κλάσεων, μειώνεται το πλάτος κάθε κλάσης και η πολυγωνική γραμμή μετατρέπεται από μια τεθλασμένη γραμμή σε μια καμπύλη, την καμπύλη συχνοτήτων της μεταβλητής. Οι εντολές της R για τη δημιουργία των σχημάτων περιλαμβάνονται στο αρχείο `plot_frequency_polygon.R`. Η κλήση της συνάρτησης αυτού του αρχείου γίνεται με την εντολή (για το πρώτο γράφημα):

```
> frequency.curve(n=6)
```

όπου το `n` εκφράζει το πλήθος των κλάσεων με το οποίο ο αναγνώστης μπορεί να πειραματιστεί ώστε να σχηματίσει τα γραφήματα της επιλογής του.





Σχήμα 13. Ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο των βαθμών 5,000 μαθητών, σε 6, 20 και 50 κλάσεις.

■

Μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων, οι οποίες για την περίπτωση των συνεχών μεταβλητών ονομάζονται συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (probability density function), είναι ιδιαίτερες χρήσιμες στην μελέτη των πειραματικών δεδομένων. Η πιο γνωστή από αυτές είναι η **κανονική κατανομή** (normal distribution), ενώ πολύ χρήσιμες είναι η t , και η χ^2 . Η R διαθέτει έναν ευρύ κατάλογο κατανομών πιθανότητας, που μπορούμε να δούμε με την εντολή:

> ?Distributions

4.4.1 Κανονική κατανομή

Είναι ίσως η πιο σημαντική κατανομή διότι πολλά φαινόμενα στην εκπαιδευτική έρευνα και όχι μόνο ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μ

και διακύμανση σ^2 . Η μέση τιμή μ είναι μια άγνωστη παράμετρος της κατανομής η οποία μπορεί να εκτιμηθεί, δηλαδή να προσεγγιστεί, από το μέσο όρο του δείγματος $\bar{x}$. Ομοίως, η διακύμανση σ^2 είναι μια θετική παράμετρος που εκτιμάται από τη διακύμανση του δείγματος s^2 . Η κανονική κατανομή έχει σχήμα κώδωνα, είναι συμμετρική γύρω από το μ και το εύρος των τιμών της μεταβλητής (δηλαδή η απόσταση από τη μικρότερη μέχρι τη μεγαλύτερη τιμή) είναι περίπου 6σ .

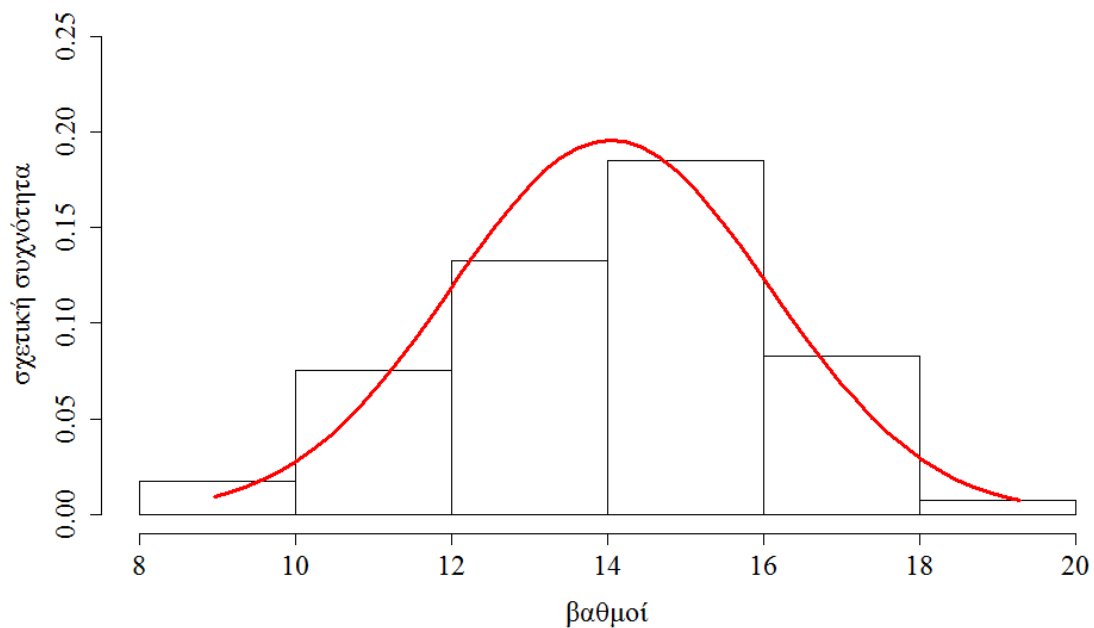
Παράδειγμα 7 (Κανονική κατανομή)

Στο Σχήμα 14 έχουμε το ιστόγραμμα των βαθμών από τις γραπτές εξετάσεις 250 μαθητών και την κόκκινη γραμμή που αντιστοιχεί στην καμπύλη συχνοτήτων της κανονικής κατανομής με μέση τιμή 14 και διακύμανση 4. Παρατηρούμε ότι η θεωρητική κατανομή προσεγγίζει με σχετικά μεγάλη ακρίβεια τα εμπειρικά δεδομένα. Η καμπύλη της κανονικής κατανομής είναι συμμετρική ως προς το $\mu = 14$, δηλαδή είναι συμμετρική ως προς ένα νοητό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το 14. Επιπλέον, η διακύμανση είναι $\sigma^2 = 4$, οπότε $\sigma = 2$. Παρατηρούμε ότι οι τιμές της μεταβλητής που εκφράζει τους βαθμούς των μαθητών κυμαίνονται από 8 έως 20, οπότε των εύρος των τιμών είναι 12 που ισούται πράγματι με 6σ . Οι εντολές της R για τη δημιουργία του σχήματος περιλαμβάνονται στο αρχείο `plot_normal.R`.

■

Θεωρητικά η καμπύλη συχνοτήτων της κανονικής κατανομής μιας μεταβλητής X εκφράζεται από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$



Σχήμα 14. Ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων των βαθμών 250 μαθητών. Η κόκκινη γραμμή αντιστοιχεί στην καμπύλη συχνοτήτων της Κανονικής κατανομής με μέση τιμή 14 και τυπική απόκλιση 2.

όπου x είναι μια συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής, $f(x)$ η αντίστοιχη σχετική συχνότητα, $\pi \approx 3.14$ και $e \approx 2.72$. Το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη της κανονικής κατανομής, αλλά και την καμπύλη οποιασδήποτε άλλης κατανομής και τον οριζόντιο άξονα ισούται με ένα. Η έννοια του εμβαδού μας βοηθάει να αντιληφθούμε τη χρησιμότητα της καμπύλης συχνοτήτων στον υπολογισμό πιθανοτήτων. Αν μια μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου $a < x < b$ ισούται με το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη συχνοτήτων της κανονικής κατανομής, τον οριζόντιο άξονα και τις κατακόρυφες ευθείες που τέμνουν τον άξονα των x στα σημεία a και b .

Παράδειγμα 8 (Κανονική κατανομή – υπολογισμός πιθανοτήτων)

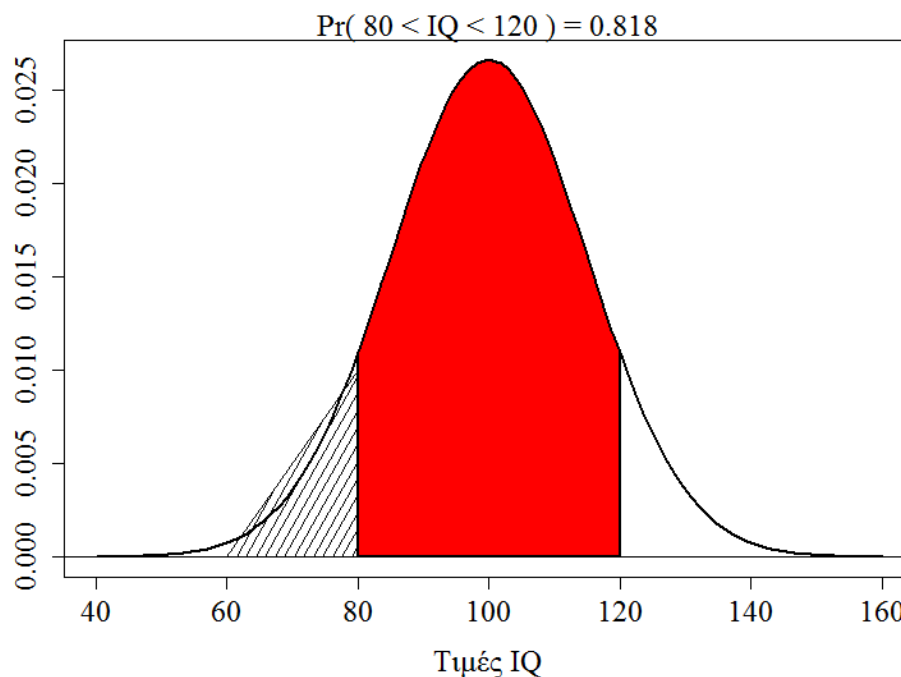
Έχει παρατηρηθεί ότι ο δείκτης IQ των παιδιών ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu=100$ και τυπική απόκλιση $\sigma=15$. Ποια είναι η πιθανότητα ένα παιδί να έχει δείκτη IQ μεταξύ 80 και 120; Το ερώτημα αυτό είναι ισοδύναμο με τη διατύπωση: ποιο ποσοστό παιδιών περιμένουμε να έχουν δείκτη IQ μεταξύ 80 και 120; Η απάντηση προκύπτει από τον υπολογισμό του εμβαδού του κόκκινου επίπεδου

χωρίου που φαίνεται στο Σχήμα 15 και είναι ίσο με 0.818 ή 81.8%. Ο υπολογισμός του εμβαδού γίνεται με τη βοήθεια της προχωρημένης μαθηματικής έννοιας του ολοκληρώματος που ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της εργασίας. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα αυτή με τη βοήθεια της R πρέπει καταρχήν να παρατηρήσουμε ότι:

$$\Pr(80 < IQ < 120) = \Pr(IQ < 120) - \Pr(IQ \leq 80),$$

που αντιστοιχεί στις παρακάτω εντολές της R:

```
> pnorm(q=120, mean=100, sd=15) - pnorm(q=80, mean=100, sd=15)
[1] 0.8175776
```



Σχήμα 15. Η καμπύλη συχνοτήτων της Κανονικής κατανομής του Παραδείγματος 8.

Μπορούμε όμως να επιβεβαιώσουμε προσεγγιστικά τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους επίπεδων σχημάτων. Έτσι το σχήμα του κώδωνα προσεγγίζεται με τρίγωνο εμβαδού:

$$\frac{\text{βάση} \cdot \text{ύψος}}{2} = \frac{(160 - 40) \cdot 0.025}{2} = \frac{80 \cdot 0.025}{2} = 1.$$

Τα δύο επίπεδα κομμάτια εκατέρωθεν του κόκκινου χωρίου μπορούν να προσεγγιστούν από ορθογώνια τρίγωνα, όπως το γραμμοσκιασμένο τρίγωνο του σχήματος, εμβαδού:

$$\frac{\text{βάση} \cdot \text{ύψος}}{2} = \frac{(80-60) \cdot 0.010}{2} = \frac{20 \cdot 0.010}{2} = 0.10.$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι περίπου $1 - 2 \cdot 0.10 = 0.80$ ή 80%, που αποτελεί μια πολύ ικανοποιητική προσέγγιση του σωστού αποτελέσματος.

Οι εντολές της R για τη δημιουργία του σχήματος περιλαμβάνονται στο αρχείο `probability_normal.R`.

■

Μια άλλη πολύ σημαντική ιδιότητα της κανονικής κατανομής που βοηθά και στον υπολογισμό πιθανοτήτων είναι ότι το 68% των τιμών του x βρίσκονται στο διάστημα $\mu \pm \sigma$, το 95% των τιμών στο διάστημα $\mu \pm 2\sigma$ και το 99% των τιμών στο διάστημα $\mu \pm 3\sigma$.

Παράδειγμα 8 (Συνέχεια)

Η πιθανότητα ένα παιδί να έχει δείκτη IQ μεταξύ 70 και 130, μπορεί να υπολογιστεί άμεσα αν παρατηρήσουμε ότι $\mu - 2\sigma = 70$ και $\mu + 2\sigma = 130$. Επομένως

$$\Pr(70 < IQ < 130) = 0.95 \text{ ή } 95\%.$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι το IQ των χαρισματικών παιδιών είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το 130, το ποσοστό αυτών των παιδιών είναι:

$$\Pr(IQ \geq 130) = 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975 \text{ ή } 97.5\%.$$

■

Αναλυτική παρουσίαση της κανονικής κατανομής μπορεί να αναζητήσει ο αναγνώστης από τους Johnson et al. (1994, σελ. 80-206).

4.4.2 Οι κατανομές t και χ^2

Η κατανομή t είναι εξίσου σημαντική με την κανονική. Οι δύο κατανομές παρουσιάζουν σημαντικές ομοιότητες. Είναι και οι δύο συμμετρικές με κωδωνοειδή γραφική παράσταση. Η σημαντικότερη διαφορά είναι ότι η κατανομή t διαθέτει μια διαφορετική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για κάθε τιμή της παραμέτρου n ($1 \leq n \leq \infty$), η οποία αντιστοιχεί τους βαθμούς ελευθερίας της κατανομής. Ο στατιστικός όρος για τους **βαθμούς ελευθερίας** (degrees of freedom) ορίζεται ως ο

αριθμός των παρατηρήσεων του δείγματος μείον τον αριθμό των περιορισμών που δεν επιτρέπουν στις παρατηρήσεις να μεταβάλλονται ελεύθερα (Ρούσσος & Τσαούσης 2011, σελ. 293). Για να κατανοήσουμε την έννοια των βαθμών ελευθερίας ως υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δείγμα που απαρτίζεται από 5 παρατηρήσεις, π.χ. 5, 2, 0, 1, 2, με μέσο όρο το 2. Από τη στιγμή που οι 5 τιμές μεταβάλλονται ελεύθερα οι βαθμοί ελευθερίας είναι 5, διότι θα μπορούσαμε να έχουμε επιλέξει οποιεσδήποτε 5 άλλες τιμές, με διαφορετικό κάθε φορά μέσο όρο. Αν όμως θέλουμε ένα δείγμα μεγέθους 5, με τον ίδιο μέσο όρο τότε έχουμε έναν περιορισμό. Αν είχαμε επιλέξει τις 4 από τις πέντε τιμές, με δεδομένο μέσο όρο το 2, π.χ. 4, 3, 0, 2, τότε η επιλογή της πέμπτης τιμής δεν είναι ελεύθερη, διότι για να έχουμε μέσο όρο 2, η πέμπτη τιμή του δείγματος x_5 , θα προκύψει από τη σχέση

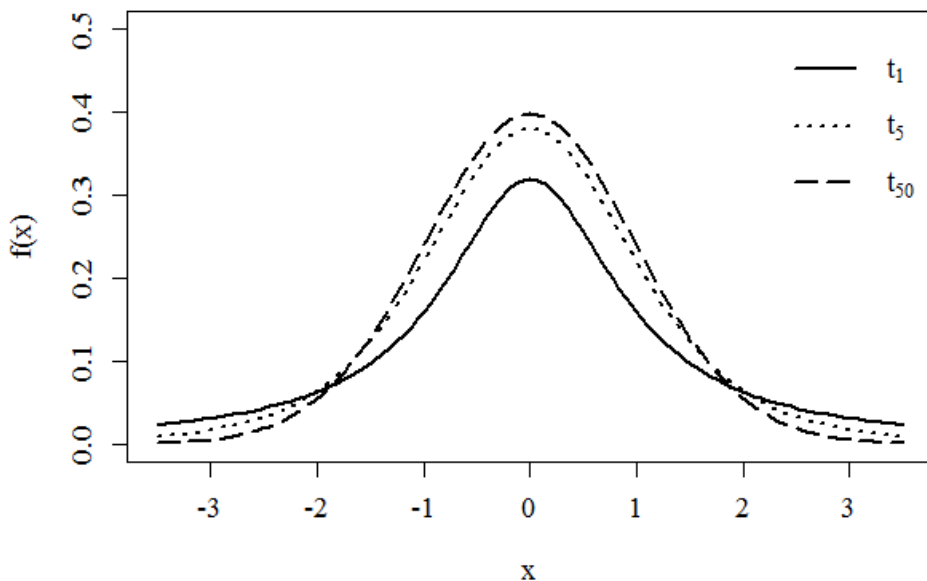
$$\bar{X} = \frac{4+3+0+2+x_5}{5} \Leftrightarrow 2 = \frac{9+x_5}{5} \Leftrightarrow x_5 = 1$$

Θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια ότι ορισμένες στατιστικές συναρτήσεις ενός δείγματος ακολουθούν κατανομή t με ν βαθμούς ελευθερίας, συμβολικά t_ν .

Ο γενικός τύπος της κατανομής t είναι αρκετά πολύπλοκος και θα δώσουμε ενδεικτικά μόνο την περίπτωση για $\nu = 5$, που δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{200\sqrt{5}}{3\pi(5+x^2)^3}.$$

Στο Σχήμα 16 που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση της κατανομής για $\nu = 1, 5, 50$. Παρατηρούμε ότι καθώς οι βαθμοί ελευθερίας τείνουν προς το άπειρο η κατανομή t προσεγγίζει την κανονική κατανομή. Οι εντολές της R για τη δημιουργία των σχημάτων περιλαμβάνονται στο αρχείο [t_graph.R](#).



Σχήμα 16. Οι καμπύλες συχνοτήτων της κατανομής t για 1, 5 και 50 βαθμούς ελευθερίας.

Η κατανομή χ^2 εξαρτάται επίσης από τους βαθμούς ελευθερίας ν . Σημαντική διαφορά με τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των δύο προηγούμενων κατανομών είναι ότι δεν είναι συμμετρική και ότι η μεταβλητή παίρνει μόνο θετικές τιμές. Ο τύπος και αυτής της κατανομής είναι αρκετά πολύπλοκος και θα αρκεστούμε στη γραφική του αναπαράσταση και στον υπολογισμό πιθανοτήτων. Οι εντολές της R για τη δημιουργία των σχημάτων περιλαμβάνονται στο αρχείο [prob_chisq.R](#).

Παράδειγμα 9 (Κατανομή χ^2 – υπολογισμός πιθανοτήτων)

Έστω ότι μια μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή χ^2 με $\nu = 12$ βαθμούς ελευθερίας, συμβολικά $X \sim \chi^2_{12}$. Η πιθανότητα η X να πάρει τιμή μικρότερη ή ίση π.χ. από το 22, υπολογίζεται ως εξής:

```
> pchisq(q=22, df=12)
```

```
[1] 0.962480
```

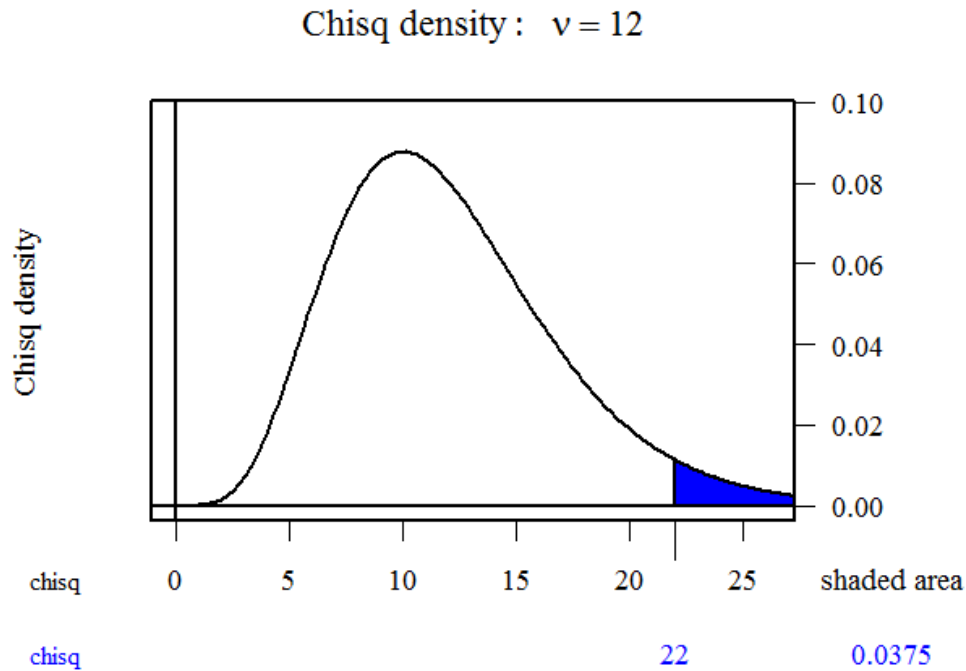
Αν θέλουμε στρογγυλοποίηση σε τέσσερα δεκαδικά ψηφία, τότε θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή [round](#), ως εξής:

```
> round( pchisq(q=22, df=12), 4)
```

```
[1] 0.9625
```

Δηλαδή, βρήκαμε ότι

$$\Pr(X \leq 22) = 0.9625 \text{ ή } 96.25\%.$$



Σχήμα 17. Η καμπύλη συχνοτήτων της κατανομής χ^2 με 12 βαθμούς ελευθερίας. Το εμβαδόν του μπλε χωρίου (shaded area) αντιστοιχεί στην πιθανότητα η μεταβλητή να είναι μεγαλύτερη από 22.

Αν θέλουμε την πιθανότητα η X να πάρει τιμή μεγαλύτερη από το 22, τότε επειδή το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση και τον οριζόντιο άξονα ισούται με ένα προκύπτει ότι:

$$\Pr(X > 22) = 1 - \Pr(X \leq 22) = 1 - 0.9625 = 0.0375 \text{ ή } 3.75\%.$$

Η τιμή 0.0375 αντιστοιχεί στο εμβαδόν του μπλε χωρίου του Σχήματος 17, ενώ το εμβαδόν του υπόλοιπου λευκού χωρίου ισούται με 0.9625.

■