ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Οι πραγματικοί αριθμοί, που το σύνολό τους συμβολίζεται με το R (Real), αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών.

Ρητός ονομάζεται ένας αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει την κλασματική μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι (α, $\beta \in Z$) και $\beta \neq 0$. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με το γράμμα Q και έχουμε το εξής :

$$Q = \{ \frac{\alpha}{\beta} \ / \ \alpha, \beta \in Z \text{ με } \beta \neq 0\}$$

΄Ενας ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί σαν ένας δεκαδικός αριθμός με περιορισμένα δεκαδικά ψηφία ή σαν ένας περιοδικός δεκαδικός αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Δηλαδή, οι ρητοί αριθμοί αποτελούνται από τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

Άρρητος ονομάζεται ένας αριθμός που δεν μπορεί να πάρει την κλασματική μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι (α, $\beta \in Z$) και $\beta \neq 0$. ΄Ενας άρρητος αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ούτε σαν ένας δεκαδικός αριθμός με περιορισμένα δεκαδικά ψηφία ούτε σαν ένας περιοδικός δεκαδικός αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία.

Ακολουθούν παραδείγματα :

Ρητοί αριθμοί : $2 = \frac{2}{1}$, $1,\overline{72} = \frac{19}{11}$, $1,5 = \frac{3}{2}$
Άρρητοι αριθμοί : $\sqrt{5}$, $\sqrt{19}$

Αν με Q παραστήσουμε το σύνολο των ρητών αριθμών, με A το σύνολο των άρρητων αριθμών και με R το σύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε ισχύουν τα εξής :

$$Q \subset R,\ A \subset R,\ Q \cap A = \varnothing,\ Q \cup A = R$$

Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των ακεραίων αριθμών παριστάνεται με το γράμμα Z και είναι το εξής :

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

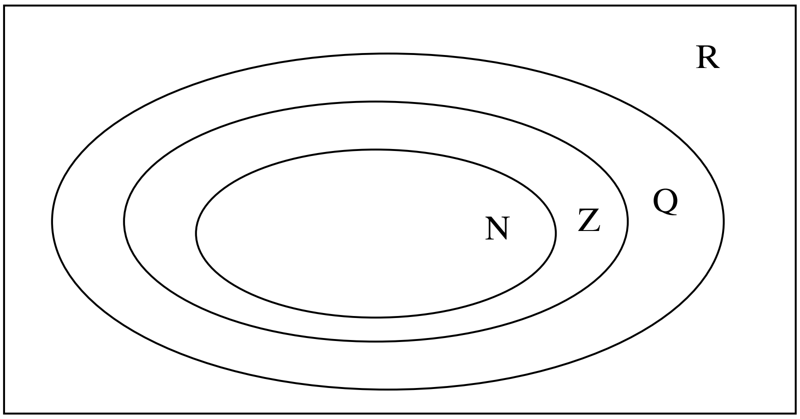
Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών παριστάνεται με το γράμμα N και είναι το εξής :

$$N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Για τα σύνολα N, Z, Q και R ισχύει :

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Και με διάγραμμα Venn :



Αν δίπλα στον συμβολισμό καθενός από τα παραπάνω σύνολα βάλουμε το *, τότε θα εννοούμε το ίδιο το σύνολο αλλά χωρίς το 0. ΄Εχουμε συνεπώς :

- $N^* = N - \{0\}$
- $Z^* = Z - \{0\}$
- $Q^* = Q - \{0\}$
- $R^* = R - \{0\}$

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών ισχύουν οι εξής ιδιότητες :

Ιδιότητα	**Πρόσθεση**	**Πολλαπλασιασμός**
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta = \beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0 = \alpha$	$\alpha.1 = \alpha$
Αντίθετος – αντίστροφος	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha.\frac{1}{\alpha} = \alpha, \alpha\neq 0$

Η αφαίρεση και η διαίρεση δύο πραγματικών αριθμών ορίζονται ως γνωστόν με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, ως εξής :

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) \text{ και } \frac{\alpha}{\beta} = \alpha . \frac{1}{\beta}, \text{ όπου } \beta \neq 0$$

Για τις πράξεις των πραγματικών αριθμών ισχύουν οι εξής ιδιότητες :

- Μπορούμε να προσθέσουμε κατά μέλη δύο ισότητες :

$$\boxed{\alpha=\beta \text{ και } \gamma=\delta \Rightarrow \alpha+\gamma = \beta+\delta}$$

- Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ισότητες :

$$\boxed{\alpha=\beta \text{ και } \gamma=\delta \Rightarrow \alpha.\gamma = \beta.\delta}$$

- Μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε στα ή από τα μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό :

$$\boxed{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma = \beta+\gamma}$$

- Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε τα μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό :

$$\boxed{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha.\gamma = \beta.\gamma, \text{ όπου } \gamma \neq 0}$$

- Για τον πολλαπλασιασμό με το μηδέν ισχύουν τα εξής :

$$\boxed{\alpha.0 = 0}$$

$$\boxed{\alpha.\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha=0 \vee \beta=0}$$

$$\boxed{\alpha.\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0 \wedge \beta\neq 0}$$

- Κανόνας των προσήμων :

$$\boxed{(-1).\alpha = -\alpha}$$

$$\boxed{(-\alpha).\beta = -\alpha.\beta}$$

$$\boxed{(-\alpha).(-\beta) = \alpha.\beta}$$

- Κανόνας απαλοιφής παρενθέσεων :

$$-(\alpha+\beta) = -\alpha-\beta$$

$$\frac{1}{\alpha.\beta} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}$$

- Χρήσιμες ιδιότητες των αναλογιών :

$$\frac{\alpha}{\gamma} \pm \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \pm \beta}{\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta \pm \beta\gamma}{\beta\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\kappa\alpha+\lambda\gamma}{\kappa\beta+\lambda\delta}$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για τις δυνάμεις πραγματικών αριθμών με εκθέτη ακέραιο αριθμό ισχύουν τα εξής :

$$\boxed{\alpha^{\nu} = \alpha.\alpha...\alpha \text{ (ν φορές)}}$$

$$\boxed{\alpha^{1} = \alpha}$$

$$\boxed{\alpha^{0} = 1}$$

$$\boxed{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}}$$

$$\boxed{\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^{\nu} = \beta^{\nu}}$$

$$\boxed{\alpha^{\nu}.\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}}$$

$$\boxed{\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\nu-\mu}}$$

$$\boxed{\alpha^{\nu}.\beta^{\nu} = (\alpha\beta)^{\nu}}$$

$$\boxed{\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}}$$

$$\boxed{(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu\mu}}$$

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ένας αριθμός α είναι μεγαλύτερος από έναν άλλον αριθμό β, και συμβολίζεται με $\alpha>\beta$, όταν η διαφορά $\alpha-\beta$ είναι θετικός αριθμός.

Ένας αριθμός α είναι μικρότερος από έναν άλλον αριθμό β, και συμβολίζεται με $\alpha<\beta$, όταν η διαφορά $\beta-\alpha$ είναι θετικός αριθμός.

$$\boxed{\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0}$$

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Από γεωμετρική άποψη, η ανισότητα $\alpha>\beta$ σημαίνει ότι στον άξονα των πραγματικών αριθμών, ο αριθμός α βρίσκεται πιο δεξιά από τον αριθμό β.

Ισχύουν τα εξής :

- $\alpha>0$ και $\beta>0 \Rightarrow \alpha+\beta>0$
- $\alpha<0$ και $\beta<0 \Rightarrow \alpha+\beta<0$
- $\alpha\beta>0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}>0$
- $\alpha\beta<0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}<0$
- $\forall\, \alpha\in R \Rightarrow \alpha^2\geq 0$
- $\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma \Rightarrow \alpha>\gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)
- $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$
- Αν $\gamma>0$: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma>\beta\gamma$
- Αν $\gamma<0$: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma<\beta\gamma$
- Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta \Rightarrow \alpha+\gamma>\beta+\delta$
- Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta>0$ και $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta \Rightarrow \alpha\gamma>\beta\delta$
- $\alpha,\beta>0$ και $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu=\beta^\nu$, $\nu\in N$
- $\alpha,\beta>0$ και $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu>\beta^\nu$, $\nu\in N$
- $\alpha\beta>0$ και $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$
- $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$
- $\alpha^2+\beta^2\geq -2\alpha\beta$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta\\ \alpha^2+\beta^2\geq -2\alpha\beta\end{array}\right\}\ \boxed{\alpha^2+\beta^2\geq 2|\alpha||\beta|}$$

- $\alpha>0 \Rightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$
- $\alpha<0 \Rightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$
- $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0$
- $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq 0$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες που έχουν την ίδια φορά, θα προκύψει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν ισχύει, όμως, το ίδιο αν αφαιρέσουμε ανισότητες της ίδιας φοράς.

Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες που έχουν την ίδια φορά αλλά έχουν και θετικούς όρους, θα προκύψει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν ισχύει, όμως, το ίδιο αν διαιρέσουμε ανισότητες της ίδιας φοράς.

Αν αλλάξουμε τα πρόσημα των όρων σε μια ανισότητα, θα αλλάξει φορά η ανισότητα.

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x, για τους οποίους ισχύει $\alpha \leq x \leq \beta$, αποκαλείται ***κλειστό διάστημα*** από το α μέχρι το β και συμβολίζεται με [α, β]. $[\alpha, \beta] = \{x \in R \,/\, \alpha \leq x \leq \beta\}$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x, για τους οποίους ισχύει $\alpha < x < \beta$, αποκαλείται ***ανοικτό διάστημα*** από το α μέχρι το β και συμβολίζεται με (α, β). $(\alpha, \beta) = \{x \in R \,/\, \alpha < x < \beta\}$

Οι αριθμοί και β αποκαλούνται ***άκρα*** των αντίστοιχων διαστημάτων και κάθε αριθμός που βρίσκεται ανάμεσα στα α και β αποκαλείται ***εσωτερικό σημείο*** αυτών. ΄Ενα κλειστό διάστημα πραγματικών αριθμών περιέχει και τα άκρα του, ενώ ένα ανοικτό διάστημα όχι.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x, για τους οποίους ισχύει $\alpha \leq x < \beta$, αποκαλείται ***ανοικτό δεξιά διάστημα*** από το α μέχρι το β ή ***κλειστό-ανοικτό διάστημα*** και συμβολίζεται με [α, β). $[\alpha, \beta) = \{x \in R \,/\, \alpha \leq x < \beta\}$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x, για τους οποίους ισχύει $\alpha < x \leq \beta$, αποκαλείται ***ανοικτό αριστερά διάστημα*** από το α μέχρι το β ή ***ανοικτό-κλειστό διάστημα*** και συμβολίζεται με (α, β]. $(\alpha, \beta] = \{x \in R \,/\, \alpha < x \leq \beta\}$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι από έναν δεδομένο πραγματικό αριθμό α, δηλ. $\alpha \leq x$, συμβολίζεται με $[\alpha, +\infty)$, ενώ το σύνολο των πραγματικών αριθμών x οι οποίοι είναι μικρότεροι ή ίσοι από έναν δεδομένο πραγματικό αριθμό α, δηλ. $x \leq \alpha$, συμβολίζεται με $(-\infty, \alpha]$. $[\alpha, +\infty) = \{x \in R \,/\, x \geq \alpha\}$ και $(-\infty, \alpha] = \{x \in R \,/\, x \leq \alpha\}$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι από έναν δεδομένο πραγματικό αριθμό α, δηλ. $\alpha < x$, συμβολίζεται με $(\alpha, +\infty)$, ενώ το σύνολο των πραγματικών αριθμών x οι οποίοι είναι μικρότεροι από έναν δεδομένο πραγματικό αριθμό α, δηλ. $x < \alpha$, συμβολίζεται με $(-\infty, \alpha)$. $(\alpha, +\infty) = \{x \in R \,/\, x > \alpha\}$ και $(-\infty, \alpha) = \{x \in R \,/\, x < \alpha\}$

Το ίδιο το σύνολο R μπορούμε να το συμβολίσουμε και ως $(-\infty, +\infty)$.

ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι άρρητοι ή ασύμμετροι αριθμοί εμφανίσθηκαν από την ανάγκη επίλυσης εξισώσεων στις οποίες δεν είναι δυνατόν να βρεθεί σαν λύση ρητός αριθμός. Για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης $x^2=2$, δεν υπάρχει ρητός αριθμός που να την ικανοποιεί.

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης, όπως και κάθε άλλης εξίσωσης της μορφής $x^2=\alpha$, όπου το $\alpha \in R^+$ και το α δεν είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, είναι ένας άρρητος ή ασύμμετρος αριθμός, δηλ. ένας δεκαδικός αριθμός που αποτελείται από άπειρα δεκαδικά ψηφία αλλά δεν είναι δεκαδικός περιοδικός αριθμός, δηλ. δεν υπάρχει μετά την υποδιαστολή ένα τμήμα ψηφίων που να επαναλαμβάνεται συνέχεια και χωρίς να εμφανίζονται άλλα ψηφία.

Ως γνωστόν, η λύση της $x^2=2$ είναι η $x=\sqrt{2}$ = 1,4142..., ένας άρρητος αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία μη επαναλαμβανόμενα.

Το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο ή και το πηλίκο άρρητων αριθμών μπορεί να είναι ρητός αριθμός, όπως $\sqrt{2}.\sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$, αλλά και $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = 3$.

Ακολουθούν μερικές χρήσιμες προτάσεις σχετικά με τις πράξεις ανάμεσα σε ρητούς και άρρητους αριθμούς :

- Το άθροισμα ρητού με άρρητο αριθμό είναι πάντα άρρητος αριθμός.
- Το γινόμενο ρητού με άρρητο αριθμό είναι πάντα άρρητος αριθμός, εκτός από την περίπτωση που ο ρητός αριθμός είναι ίσος με 0.
- Το πηλίκο ρητού με άρρητο αριθμό είναι πάντα άρρητος αριθμός.
- Ο αντίστροφος ενός άρρητου αριθμού είναι πάντα άρρητος αριθμός.
- Η νιοστή ρίζα ενός φυσικού αριθμού, ο οποίος δεν αποτελεί δύναμη με εκθέτη διαιρετό δια ν, είναι άρρητος αριθμός.
- Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι ρητοί και ο αριθμός $\sqrt{\gamma}$ είναι άρρητος, τότε κάθε ακέραια δύναμη της παράστασης $\alpha \pm \beta\sqrt{\gamma}$, θα έχει τη μορφή $\delta \pm \varepsilon\sqrt{\gamma}$, όπου οι αριθμοί δ και ε είναι ρητοί.
- Αν οι αριθμοί α, β, γ, δ είναι ρητοί και οι αριθμοί $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\delta}$ είναι άρρητοι, τότε η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η ισότητα $\alpha+\sqrt{\beta} = \gamma+\sqrt{\delta}$, είναι $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$.

ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αν ο αριθμός $\alpha \in R$ και ο αριθμός $\nu \in N$ και $\nu > 1$, τότε αν υπάρχει ένας άλλος αριθμός $x \in R$, ώστε να ισχύει $x^\nu = \alpha$, τότε θα λέμε ότι ο x είναι μια ***νι-οστή ρίζα*** ή ***ρίζα νιοστής τάξης*** του α.

Ένας πραγματικός αριθμός έχει δύο πραγματικές ρίζες, αν ν άρτιος και $\alpha > 0$, καμία πραγματική ρίζα, αν ν άρτιος και $\alpha < 0$ και μία πραγματική ρίζα στην περίπτωση που ν περιττός.

Την πρωτεύουσα (θετική) νιοστή ρίζα ενός αριθμού α συμβολίζουμε με $\sqrt[\nu]{\alpha}$, όπου το σύμβολο $\sqrt{\ }$ αποκαλείται ***ριζικό***, το ν ***δείκτης της ρίζας*** και το α ***υπόριζο***. ***Συντελεστής*** του ριζικού αποκαλείται ο παράγοντας που βρίσκεται μπροστά του και με τον οποίο πολλαπλασιάζεται το ριζικό.

Ριζικά που έχουν τον ίδιο δείκτη και το ίδιο υπόριζο αποκαλούνται ***όμοια***. Αν $\nu = 2$, τότε αρκεί να γράψουμε $\sqrt{\alpha}$ και όχι $\sqrt[2]{\alpha}$, και εκφράζει την πρωτεύουσα (θετική) τετραγωνική ρίζα του αριθμού $\alpha > 0$.

Ισχύουν συνεπώς τα εξής :

$\boxed{x = \sqrt[\nu]{\alpha} \Leftrightarrow x^\nu = \alpha}$ $\boxed{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha}$ $\boxed{\sqrt[\nu]{0} = 0}$

$\boxed{\begin{array}{c} x^\nu = \alpha^\nu \Leftrightarrow x = \alpha \\ \text{αν ν περιττός} \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{c} x^\nu = \alpha^\nu \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha \\ \text{αν ν άρτιος} \end{array}}$

Στις ιδιότητες των ριζών πραγματικών αριθμών που θα αναφέρουμε αμέσως παρακάτω, θα υποθέσουμε ότι όλες οι υπόριζες παραστάσεις είναι θετικές.

- Αν $\alpha > 0$ και $\nu \in N$ και περιττός, τότε $\sqrt[\nu]{-\alpha} = -\sqrt[\nu]{\alpha}$
- $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$
- $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$
- $\alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta}$
- $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\beta} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta^\nu}}$
- $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha}$
- $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$, $\rho \in N$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu:\rho]{\alpha^{\mu:\rho}}$, $\rho \in N$ και το ρ είναι διαιρέτης των ν και μ.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΡΡΗΤΟ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

Όταν συναντάμε κλάσματα με άρρητες παραστάσεις στον παρονομαστή, θα πρέπει να τα μετατρέπουμε σε ισοδύναμα με ρητές παραστάσεις στον παρονομαστή, καθώς έτσι οι πράξεις γίνονται πολύ απλούστερες.

Διακρίνουμε επτά περιπτώσεις :

Περίπτωση 1^{η}

Κλάσματα της μορφής $\dfrac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta^{\mu}}}$, όπου $\beta>0$, $\nu,\mu\in\mathbb{N}$ και $\nu>\mu$.

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}$.

Περίπτωση 2^{η}

Κλάσματα της μορφής $\dfrac{\alpha}{\beta\pm\sqrt{\gamma}}$, όπου $\gamma>0$.

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση $\beta\mp\sqrt{\gamma}$, που αποκαλείται ***συζυγής*** της παράστασης $\beta\pm\sqrt{\gamma}$.

Περίπτωση 3^{η}

Κλάσματα της μορφής $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}}$, όπου $\beta,\gamma>0$.

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση $\sqrt{\beta}\mp\sqrt{\gamma}$, που αποκαλείται ***συζυγής*** της παράστασης $\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}$.

Περίπτωση 4^{η}

Κλάσματα της μορφής $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}\pm\sqrt{\delta}}$, όπου $\beta,\gamma,\delta>0$.

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση $\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}\mp\sqrt{\delta}$, οπότε καταλήγουμε σε παράσταση της $2^{\eta\varsigma}$ περίπτωσης και συνεχίζουμε κατά τα γνωστά. Στη γενικότερη περίπτωση που ο παρονομαστής έχει πολλά ριζικά $2^{\eta\varsigma}$ τάξης, πολλαπλασιάζουμε συνέχεια με μια συζυγή παράσταση του παρονομαστή μέχρις ότου να καταλήξουμε σε κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

Περίπτωση 5η

Κλάσματα της μορφής $\dfrac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}$, όπου α,β>0 και ν∈N.

Αν το ν είναι περιττός αριθμός, τότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση :

$$\alpha+\beta = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} + \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = (\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta})(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}} - \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}\beta} + \ldots + \sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}})$$

Αν το ν είναι άρτιος αριθμός και ν=2κ, τότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση :

$$\alpha-\beta = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} - \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = (\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}+\sqrt[\nu]{\beta^{\kappa}})(\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}-\sqrt[\nu]{\beta^{\kappa}})$$

Αναλύουμε συνέχεια τις παραστάσεις σαν διαφορά τετραγώνων, μέχρις ότου να καταλήξουμε σε μια παράσταση που να περιέχει τον όρο $(\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta})$.

Περίπτωση 6η

Κλάσματα της μορφής $\dfrac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}$, όπου α,β>0 και ν∈N.

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση :

$$\alpha-\beta = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} - \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = (\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta})(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}} + \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}\beta} + \ldots + \sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}})$$

Περίπτωση 7η

Κλάσματα της μορφής $\dfrac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}\pm\sqrt[\mu]{\beta}}$, όπου α,β>0 και ν,μ∈N.

Βρίσκουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των ν και μ, έστω ρ, μετατρέπουμε τα δύο ριζικά ώστε να έχουν τον ίδιο δείκτη ρ και ύστερα καταλήγουμε σε μια από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΡΗΤΟ ΑΡΙΘΜΟ

Το σύμβολο $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ καλείται δύναμη του πραγματικού αριθμού α με εκθέτη ρητό αριθμό και ορίζεται να παριστάνει τη νιοστή πρωτεύουσα (θετική) ρίζα της μιοστής δύναμης του α, δηλ. την $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$, όταν α>0 και $\frac{\mu}{\nu}$ >0 και την αντίστροφο αυτής, δηλ. την $\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$, όταν α>0 και $\frac{\mu}{\nu}$ <0.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει το πολύ πρακτικό συμπέρασμα ότι μπορούμε να γράψουμε όλες τις ρίζες σαν δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό.

Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ρητό αριθμό είναι παρόμοιες με τις γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο αριθμό :

- $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}$
- $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} . \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\kappa}{\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda+\kappa\nu}{\nu\lambda}}$
- $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\kappa}{\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu\kappa}{\nu\lambda}}$
- $(\alpha.\beta.\gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\beta^{\frac{\mu}{\nu}}.\gamma^{\frac{\mu}{\nu}}$
- $\dfrac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}} = a^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\kappa}{\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda-\kappa\nu}{\nu\lambda}}$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \dfrac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$

Σ' όλες τις περιπτώσεις υποθέτουμε ότι α, $\beta \in R^{+}$ και μ, ν, κ, $\lambda \in N$.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αν έχουμε δύο σύνολα Α και Β, τότε καλείται ***συνάρτηση*** από το σύνολο Α στο σύνολο Β κάθε διαδικασία (ή κανόνας) σύμφωνα με την οποία σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται ένα και μόνο ένα στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο Α λέγεται ***πεδίο ορισμού*** ή ***σύνολο ορισμού*** της συνάρτησης και το σύνολο Β λέγεται ***πεδίο τιμών*** ή ***σύνολο τιμών*** της συνάρτησης. Οι συναρτήσεις συμβολίζονται συνήθως με τα μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, όπως f, g, h κ.ά.

Αν, με μια συνάρτηση f, το στοιχείο x του συνόλου Α απεικονίζεται στο στοιχείο y του συνόλου Β, τότε γράφουμε :

$$y = f(x)$$

Το f(x) λέγεται ***τιμή*** της f στο x, το x αποκαλείται ***ανεξάρτητη μεταβλητή*** και το y ***εξαρτημένη μεταβλητή***. Το y παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x και εξαρτάται από την τιμή του x. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με D_f και το πεδίο τιμών της συμβολίζεται με *f(A)*.

Ισχύει το εξής :

$$f(A) = \{y \,/\, y=f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

Η απεικόνιση μιας συνάρτησης συμβολίζεται ως εξής :

$$f: A \to B$$
$$x \to f(x)$$

Και για παράδειγμα : $f: x \to x^2+2x+1$, όπου $R \to [0, +\infty)$.

Για να μπορέσουμε να ορίσουμε μια συνάρτηση f(x), πρέπει να γνωρίζουμε τα εξής :

- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- Το πεδίο τιμών της συνάρτησης
- Τη σχέση απεικόνισης f(x)

Οι συναρτήσεις που ασχολούμαστε συνήθως είναι ***πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής***, απεικονίζουν δηλαδή ένα υποσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών σ' ένα άλλο υποσύνολο του συνόλου R.

Η πρώτη μας δουλειά στη μελέτη μιας συνάρτησης είναι να προσδιορίσουμε το πεδίο τιμών της, δηλ. εκείνο το υποσύνολο του R στο οποίο η συνάρτηση έχει νόημα.

Ακολουθούν παραδείγματα :

- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\sqrt{x}$ είναι το $[0, +\infty)$.
- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\sqrt{x-5}$ είναι το $[5, +\infty)$.
- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = lnx είναι το $(0, +\infty)$.
- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = x^2-3x+4 είναι το $(-\infty, +\infty)$, δηλ. ολόκληρο το R.
- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\frac{1}{x-4}$ είναι το R – {4}.

Δύο συναρτήσεις, $f_1(x)$ και $f_2(x)$, θα λέμε ότι είναι ***ίσες*** όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και $\forall$ x του πεδίου ορισμού τους ισχύει $f_1(x) = f_2(x)$.

Ανάμεσα σε δύο, ή και περισσότερες, συναρτήσεις $f_1(x)$ και $f_2(x)$, που έχουν κοινά στοιχεία στο πεδίο ορισμού τους, μπορούμε να ορίσουμε τις εξής ***πράξεις*** :

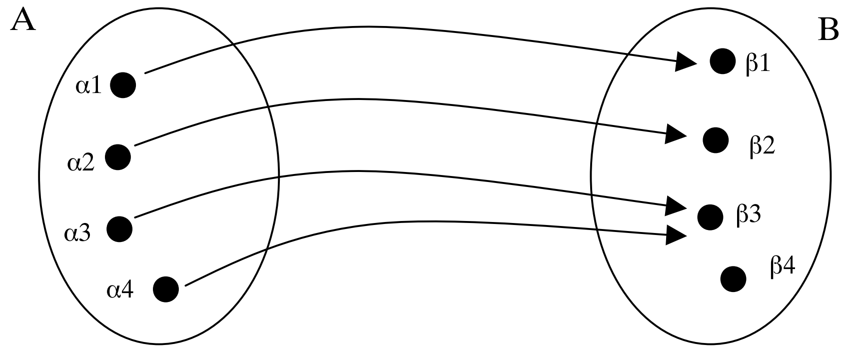
- Άθροισμα : $(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
- Διαφορά : $(f_1-f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x)$
- Γινόμενο : $(f_1f_2)(x) = f_1(x)f_2(x)$
- Πηλίκο : $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

Το πεδίο ορισμού των παραπάνω πράξεων είναι η τομή των πεδίων ορισμού των δύο συναρτήσεων, ενώ για το πεδίο ορισμού του πηλίκου $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x)$, θα πρέπει να εξαιρέσουμε τις τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται η συνάρτηση $f_2(x)$.

ΤΑ ΒΕΛΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

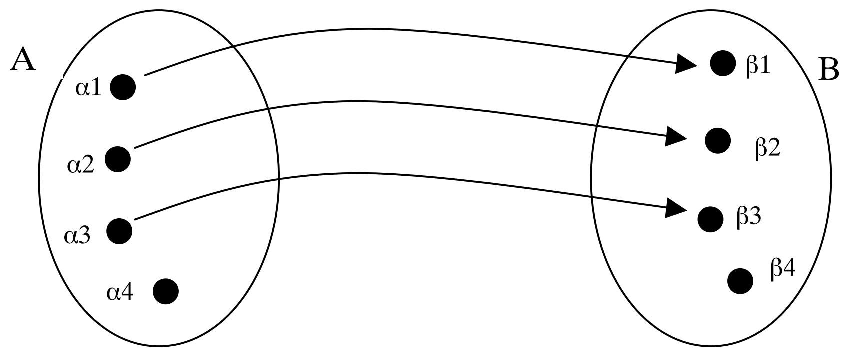
Οι συναρτήσεις απεικονίζονται γραφικά με τα λεγόμενα ***βελοδιαγράμματα***. Στα παρακάτω σχήματα, το Α θα είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το Β το πεδίο τιμών της.

Παράδειγμα 1ο



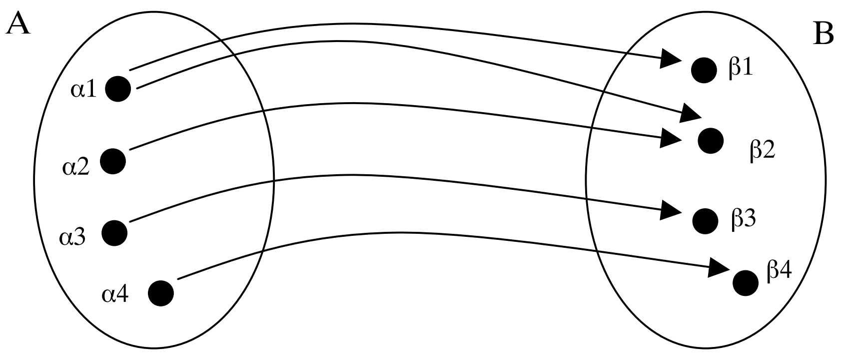
Το παραπάνω σχήμα παριστάνει συνάρτηση, καθώς κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σ' ένα και μόνο ένα στοιχείο του συνόλου Β. Παρατηρούμε, όμως, ότι δύο στοιχεία του συνόλου Α, δηλ. τα α3 και α4, απεικονίζονται στο ίδιο στοιχείο του συνόλου Β, το β3, καθώς και ότι το στοιχείο β4 του συνόλου Β δεν αποτελεί εικόνα κάποιου στοιχείου του συνόλου Α. Οι δύο τελευταίες παρατηρήσεις δεν αποκλείουν μια απεικόνιση από το να θεωρείται συνάρτηση.

Παράδειγμα 2ο



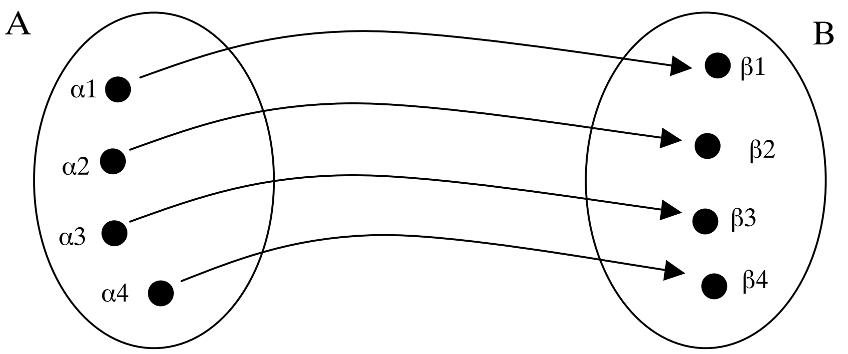
Το παραπάνω σχήμα δεν παριστάνει συνάρτηση, καθώς υπάρχει ένα στοιχείο του συνόλου Α, δηλ. το α4, το οποίο δεν αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του συνόλου Β.

Παράδειγμα 3ο



Το παραπάνω σχήμα δεν παριστάνει συνάρτηση, καθώς το στοιχείο α1 του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου Β, δηλ. τα β1 και β2.

Παράδειγμα 4ο



Το παραπάνω σχήμα παριστάνει συνάρτηση, καθώς κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σ' ένα και μόνο ένα στοιχείο του συνόλου Β. Παρατηρούμε, όμως, ότι δεν υπάρχουν δύο ή περισσότερα στοιχεία του συνόλου Α που να απεικονίζονται στο ίδιο στοιχείο του συνόλου Β. Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται ***«ένα-προς-ένα» (1-1)***. Ακόμη, στην ίδια συνάρτηση απεικονίζονται όλα ανεξαίρετα τα στοιχεία του συνόλου Β. Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται ***«επί»***. Μια συνάρτηση που είναι «ένα-προς-ένα» και «επί» μπορεί να ***αντιστραφεί*** όπως λέμε. Για παράδειγμα, η ***αντίστροφη συνάρτηση*** της $y=e^x$ είναι η $y=\ln x$.

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

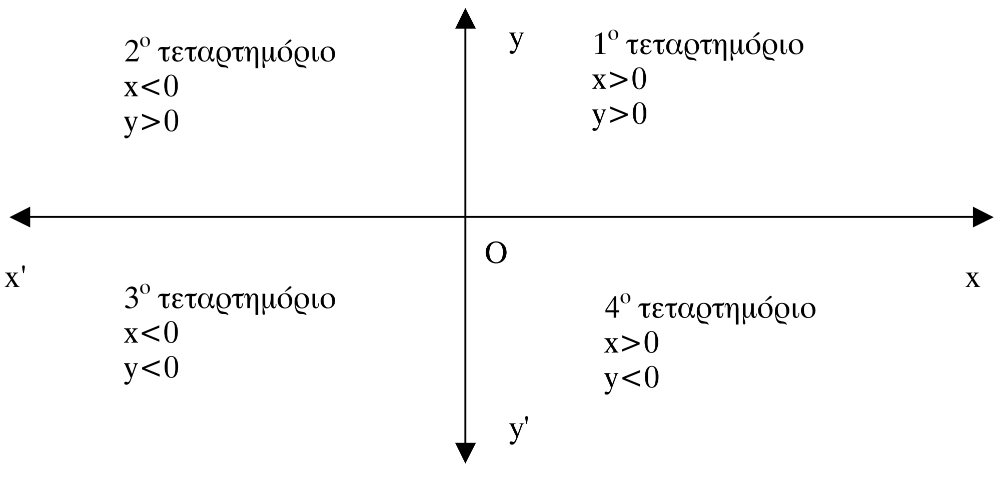
Αν σχεδιάσουμε στο επίπεδο δύο κάθετες ευθείες γραμμές (άξονες) με κοινή αρχή (τομή) ένα σημείο Ο, ονομάσουμε δε τους άξονες αυτούς x'x τον οριζόντιο και y'y τον κατακόρυφο, τότε θα λέμε ότι ο άξονας x'x είναι ο ***άξονας των τετμημένων*** ή ***άξονας των x*** και ο άξονας y'y είναι ο ***άξονας των τεταγμένων*** ή ***άξονας των y***.

Σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου αυτού θα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα και μόνο ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, που θα το συμβολίσουμε με (α, β) ή και με (x, y) και αντίστροφα, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών θα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα και μόνο ένα σημείο Μ του επιπέδου.

Οι αριθμοί x και y αποκαλούνται ***συντεταγμένες*** του σημείου Μ, το οποίο θα συμβολίζεται πλέον ως Μ(x, y), και ειδικότερα το x θα αποκαλείται ***τετμημένη*** ή ***οριζόντια συντεταγμένη***, ενώ το y ***τεταγμένη*** ή ***κατακόρυφη συντεταγμένη*** του σημείου Μ.

Το σύστημα αυτό των αξόνων αποκαλείται ***καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων*** και συμβολίζεται με Oxy και το επίπεδο στο οποίο ορίσθηκε, ***καρτεσιανό επίπεδο***. Το σύστημα αυτό θα αποκαλείται και ***ορθοκανονικό*** όταν οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος, που είναι συνήθως το 1.

Οι δύο αυτοί άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε 4 τμήματα, τα οποία αποκαλούνται ***τεταρτημόρια*** και είναι τα εξής μαζί με τα πρόσημα που έχουν οι συντεταγμένες των σημείων του επιπέδου σε κάθε τεταρτημόριο :



Για δύο σημεία $M(x, y)$ και $M_1(x_1, y_1)$ του καρτεσιανού επιπέδου ισχύουν τα εξής :

- Τα σημεία είναι συμμετρικά ως προς τον οριζόντιο άξονα x εφόσον έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες, δηλ. θα πρέπει να ισχύει : $x_1=x$ και $y_1=-y$.
- Τα σημεία είναι συμμετρικά ως προς τον κατακόρυφο άξονα y εφόσον έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες, δηλ. θα πρέπει να ισχύει : $x_1=-x$ και $y_1=y$.
- Τα σημεία είναι συμμετρικά ως προς την αρχή O των αξόνων εφόσον έχουν αντίθετες και τις τετμημένες και τις τεταγμένες τους, δηλ. θα πρέπει να ισχύει : $x_1=-x$ και $y_1=-y$.
- Τα σημεία είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της $1^{ης}$ και της $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων εφόσον η τετμημένη του ενός είναι ίση με την τεταγμένη του άλλου, δηλ. θα πρέπει να ισχύει : $x_1=y$ και $y_1=x$.
- Η απόσταση των σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο συμβολίζεται με $d(M, M_1)$ και είναι ίση με : $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$.

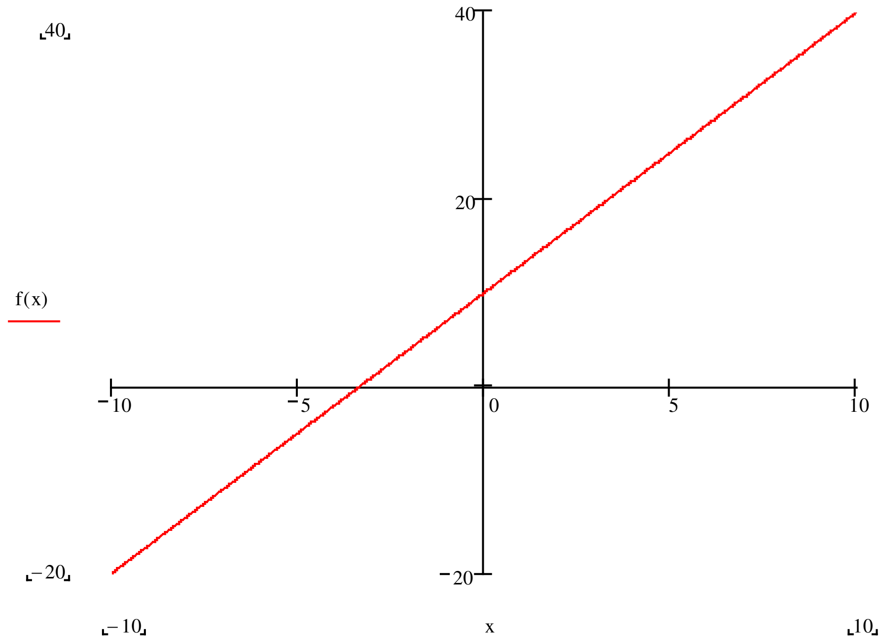
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ – ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για μια συνάρτηση f(x) που απεικονίζει ένα υποσύνολο του R σ' ένα άλλο υποσύνολο του R, θα αποκαλούμε ***γραφική παράσταση*** ή ***καμπύλη*** της f(x) σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy και θα την συμβολίζουμε με *Cf*, το σύνολο των σημείων Μ(x, f(x)) του επιπέδου, γι' όλα τα σημεία x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Η y=f(x) είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

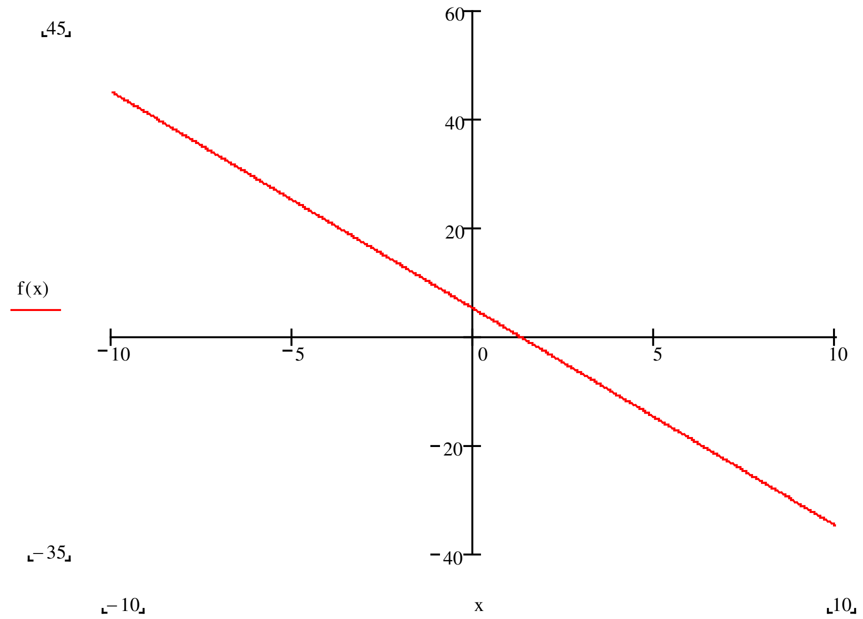
Στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν μπορεί να υπάρχουν σημεία που να έχουν την ίδια τετμημένη και διαφορετικές τεταγμένες. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο το πολύ. Για παράδειγμα, η έλλειψη και ο κύκλος δεν μπορεί να αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=αx+β είναι μια ευθεία γραμμή, με τα εξής χαρακτηριστικά :

- Τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $(-\frac{\beta}{\alpha}, 0)$.
- Τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, β).
- Σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ω για την οποία έχουμε εφω=α.
- Αν α>0, τότε η γωνία ω είναι θετική και μικρότερη από 90^o.
- Αν α<0, τότε η γωνία ω είναι θετική, μεγαλύτερη από 90^o και μικρότερη από 180^o.
- Ο αριθμός α=εφω αποκαλείται ***συντελεστής διεύθυνσης*** της ευθείας y=αx+β.
- Αν β=0, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=αx είναι ευθεία που περνάει από την αρχή Ο των αξόνων.
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x)=\alpha_1x+\beta_1$ και $f_2(x) = \alpha_2x+\beta_2$ είναι ***ευθείες παράλληλες*** όταν και μόνο όταν είναι ίσοι οι συντελεστές διεύθυνσής τους, δηλ. όταν και μόνο όταν $\alpha_1=\alpha_2$.
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x)=\alpha_1x+\beta_1$ και $f_2(x) = \alpha_2x+\beta_2$ είναι ***ευθείες κάθετες*** μεταξύ τους όταν και μόνο όταν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους είναι ίσο με –1, δηλ. όταν και μόνο όταν $\alpha_1.\alpha_2=-1$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=3x+10.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=–4x+5.

Για να μπορέσουμε να κάνουμε τη μελέτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης και να πάρουμε έτσι μια καλή και σαφή ιδέα για το πώς θα είναι αυτή, κάνουμε τα εξής βήματα :

- Καθορίζουμε με σαφήνεια το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Διαπιστώνουμε μήπως τυχόν η συνάρτηση είναι άρτια, οπότε θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y.
- Διαπιστώνουμε μήπως τυχόν η συνάρτηση είναι περιττή, οπότε θα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O της τομής των αξόνων. Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης διέρχεται πάντα από την αρχή O των αξόνων.
- Διαπιστώνουμε μήπως τυχόν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα) ή και απλά μονότονη σε κάποιο ή σε κάποια διαστήματα του πεδίου ορισμού της.
- Διαπιστώνουμε μήπως τυχόν η συνάρτηση παρουσιάζει ολικά ακρότατα (μέγιστο ή ελάχιστο).
- Διαπιστώνουμε μήπως τυχόν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά ακρότατα (μέγιστο ή ελάχιστο).
- Διαπιστώνουμε μήπως καθώς το x πλησιάζει στο 0 από δεξιά ή από αριστερά, οι τιμές της συνάρτησης γίνονται άπειρα θετικές ή αρνητικές, οπότε μιλάμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.
- Διαπιστώνουμε μήπως καθώς το x πλησιάζει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν προς το 0 ή προς κάποιον μη άπειρο αριθμό, οπότε μιλάμε για οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.
- Διαπιστώνουμε μήπως για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1 και x_2 της συνάρτησης ισχύει : $f(x_1)=x_2$ και $f(x_2)=x_1$, οπότε η συνάρτηση θα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία y=x, δηλ. τη διχοτόμο της $1^{ης}$ και της $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.
- Διαπιστώνουμε μήπως η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν ισχύει δηλαδή $f(0)=0$.
- Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης καθώς το x πλησιάζει στο $+\infty$ και στο $-\infty$.
- Διαπιστώνουμε μήπως η συνάρτηση είναι περιοδική.

Μια συνάρτηση f(x) λέγεται ***άρτια*** αν $\forall x$ του πεδίου ορισμού της, ισχύει : $f(-x) = f(x)$. Μια τέτοια συνάρτηση είναι για παράδειγμα η $f(x) = x^2+5$. Μια άρτια συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y και για να τη μελετήσουμε, αρκεί να τη μελετήσουμε μόνο στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Μια συνάρτηση f(x) λέγεται ***περιττή*** αν $\forall x$ του πεδίου ορισμού της, ισχύει : $f(-x) = -f(x)$. Μια τέτοια συνάρτηση είναι για παράδειγμα η $f(x) = x^3$. Μια περιττή συνάρτηση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O της τομής των αξόνων και για να τη μελετήσουμε, αρκεί να τη μελετήσουμε μόνο στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Μια συνάρτηση f(x) λέγεται ***γνησίως αύξουσα*** σ' ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της, όταν για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος αυτού ισχύει : αν $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Μια συνάρτηση f(x) λέγεται ***γνησίως φθίνουσα*** σ' ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της, όταν για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος αυτού ισχύει : αν $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα αποκαλείται ***γνησίως μονότονη***.

Μια συνάρτηση f(x) λέγεται ***αύξουσα*** σ' ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της, όταν για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος αυτού ισχύει : αν $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$.

Μια συνάρτηση f(x) λέγεται ***φθίνουσα*** σ' ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της, όταν για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος αυτού ισχύει : αν $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$.

Μια συνάρτηση που είναι αύξουσα ή φθίνουσα αποκαλείται ***μονότονη***.

Μια συνάρτηση f(x) λέμε ότι παρουσιάζει ***ολικό μέγιστο*** σ' ένα σημείο της x_0, όταν $\forall x$ του πεδίου ορισμού της, ισχύει : $f(x)\leq f(x_0)$. Η τιμή $f(x_0)$ αποκαλείται ολικό μέγιστο της συνάρτησης.

Μια συνάρτηση f(x) λέμε ότι παρουσιάζει ***ολικό ελάχιστο*** σ' ένα σημείο της x_0, όταν $\forall x$ του πεδίου ορισμού της, ισχύει : $f(x)\geq f(x_0)$. Η τιμή $f(x_0)$ αποκαλείται ολικό ελάχιστο της συνάρτησης.

Μια συνάρτηση που παρουσιάζει ολικό μέγιστο ή ολικό ελάχιστο, λέμε ότι παρουσιάζει ***ολικό ακρότατο***.

Μια συνάρτηση f(x) λέμε ότι παρουσιάζει ***τοπικό μέγιστο*** σ' ένα υποσύνολο (περιοχή) του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει ένα σημείο x_0 του υποσυνόλου αυτού, όπου $\forall x$ του υποσυνόλου αυτού, ισχύει : $f(x)\leq f(x_0)$. Η τιμή $f(x_0)$ αποκαλείται τοπικό μέγιστο της συνάρτησης.

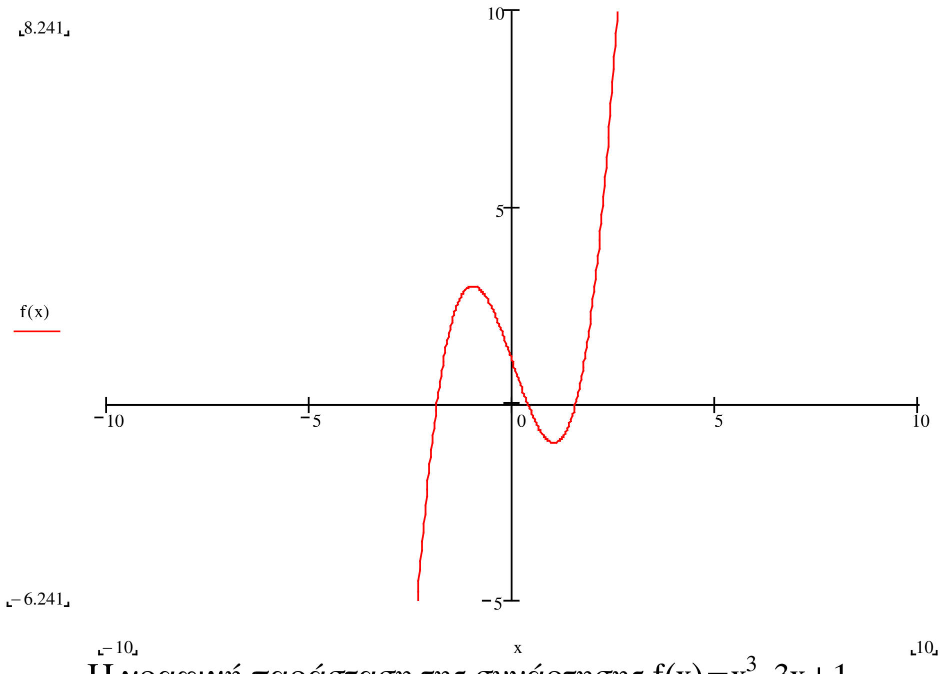
Μια συνάρτηση f(x) λέμε ότι παρουσιάζει ***τοπικό ελάχιστο*** σ' ένα υποσύνολο (περιοχή) του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει ένα σημείο x_0 του υποσυνόλου αυτού, όπου $\forall x$ του υποσυνόλου αυτού, ισχύει : $f(x)\geq f(x_0)$. Η τιμή $f(x_0)$ αποκαλείται τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης.

Μια συνάρτηση που παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο, λέμε ότι παρουσιάζει ***τοπικό ακρότατο***.

Μια συνάρτηση f(x) λέγεται ***περιοδική*** με περίοδο α, αν ισχύει $f(x+\alpha) = f(x)$, όπου το α είναι η μικρότερη δυνατή τιμή που επαληθεύει την παραπάνω σχέση. Περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π είναι οι συναρτήσεις ημx και συνx, ενώ η συνάρτηση εφx είναι περιοδική με περίοδο π.

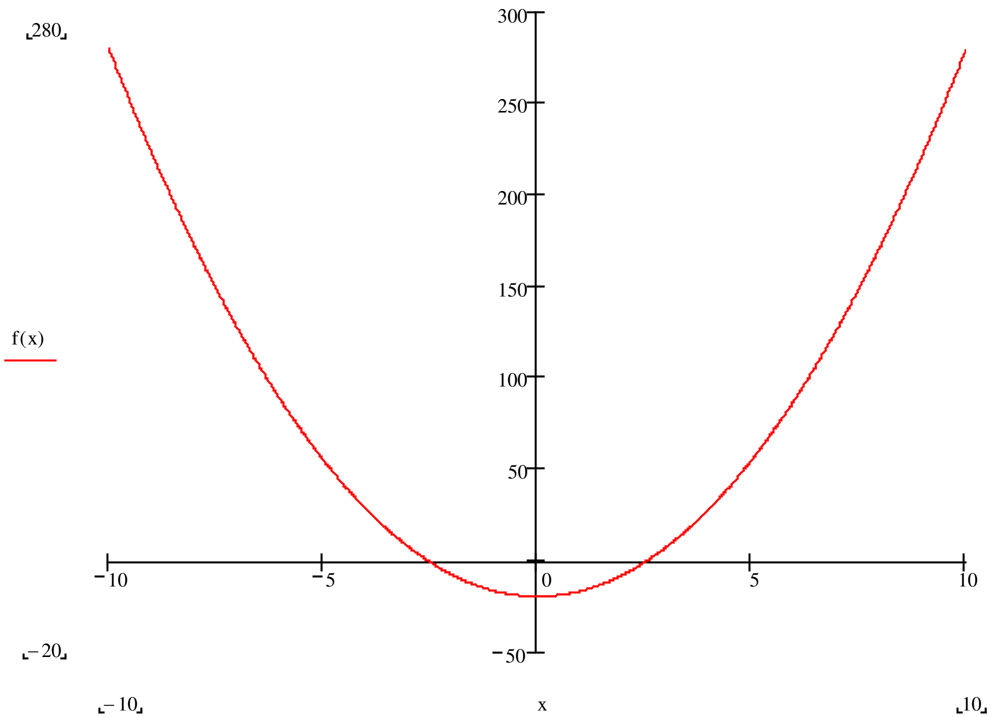
Για τη μελέτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, πολύ χρήσιμες είναι και οι εξής παρατηρήσεις :

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f(x) είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) ως προς τον άξονα x'x.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f(x)|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x (θετικές τιμές) καθώς και από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα x'x των τμημάτων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x'x (αρνητικές τιμές).
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x–α), όπου α>0, αποτελείται από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) κατά α θέσεις προς τα δεξιά.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x+α), όπου α>0, αποτελείται από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) κατά α θέσεις προς τα αριστερά.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)–α, όπου α>0, αποτελείται από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) κατά α θέσεις προς τα κάτω.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)+α, όπου α>0, αποτελείται από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) κατά α θέσεις προς τα πάνω.



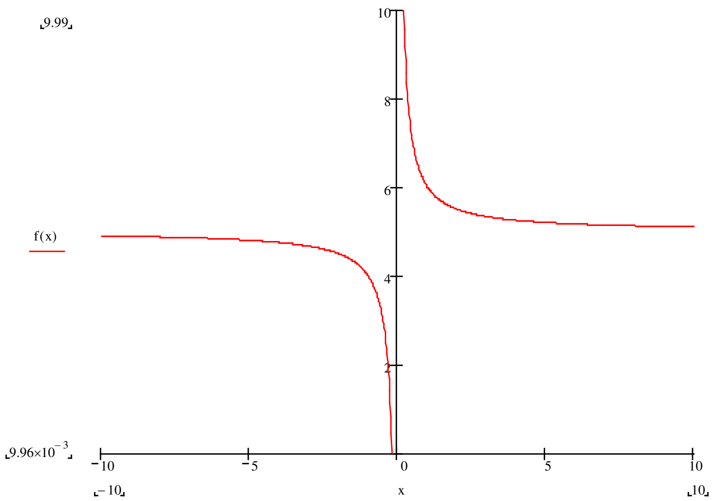
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3–3x+1$.

Η παραπάνω συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού ολόκληρο το R, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$ και ξανά γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με 3 στο σημείο x=–1 και τοπικό ελάχιστο ίσο με –1 στο σημείο x=1. Η γραφική της παράσταση δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων καθώς $f(0)=1\neq 0$ και δεν έχει ασύμπτωτες.



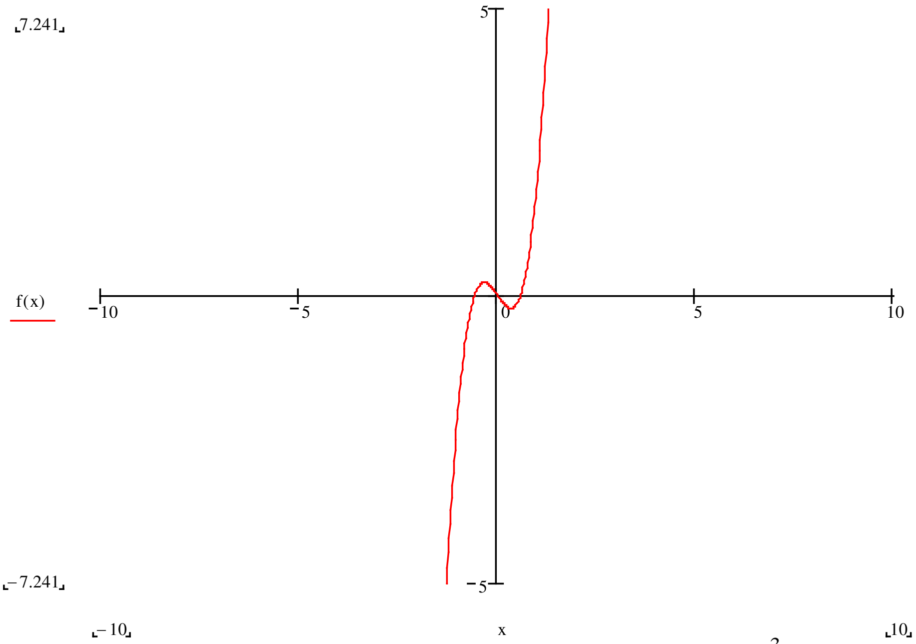
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3x^2-20$.

Η παραπάνω συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού ολόκληρο το R, είναι άρτια και άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ίσο με –20 στο σημείο x=0. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, καθώς $f(0)=-20\neq 0$. Καθώς το x πλησιάζει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, η τιμή της συνάρτησης γίνεται άπειρα θετική, πλησιάζει δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις στο $+\infty$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει ασύμπτωτες.



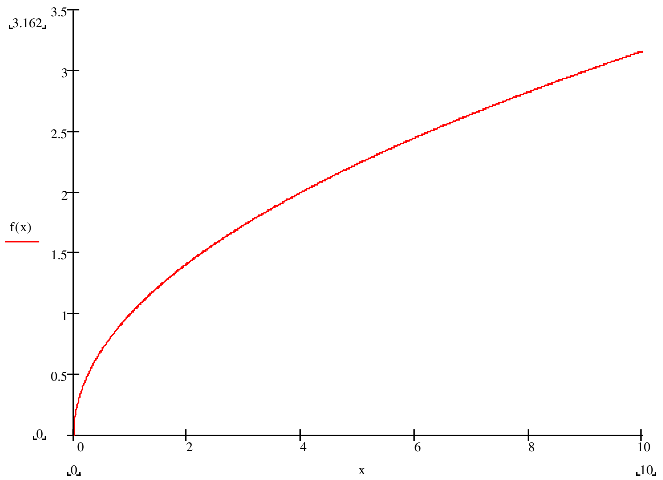
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}+5$.

΄Εχει πεδίο ορισμού το R–{0}, έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y=5 και κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x=0 ή τον άξονα y'y. Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, αλλά όχι σ' ολόκληρο το R.



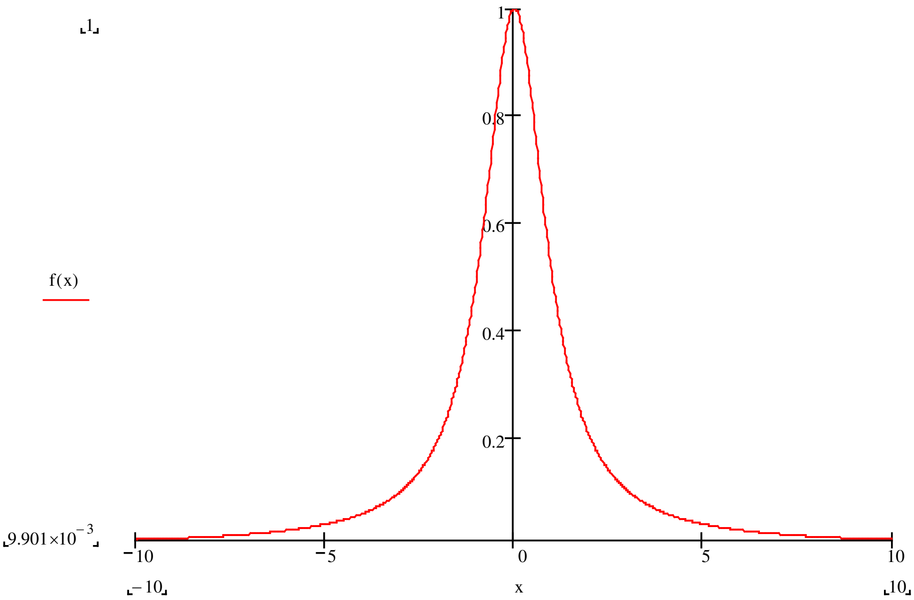
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3x^3-x$.

Η παραπάνω συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού ολόκληρο το R, είναι περιττή και άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ και ξανά γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\frac{1}{3}, +\infty)$, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με $\frac{2}{9}$ στο σημείο $x=-\frac{1}{3}$ και τοπικό ελάχιστο ίσο με $-\frac{2}{9}$ στο σημείο $x=\frac{1}{3}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από την αρχή των αξόνων, καθώς $f(0)=0$. Καθώς το x πλησιάζει στο $+\infty$, η τιμή της συνάρτησης γίνεται άπειρα θετική, πλησιάζει δηλαδή κι αυτή στο $+\infty$, ενώ καθώς το x πλησιάζει στο $-\infty$, η τιμή της συνάρτησης γίνεται άπειρα αρνητική, πλησιάζει δηλαδή κι αυτή στο $-\infty$. Η γραφική της παράσταση δεν έχει ασύμπτωτες.



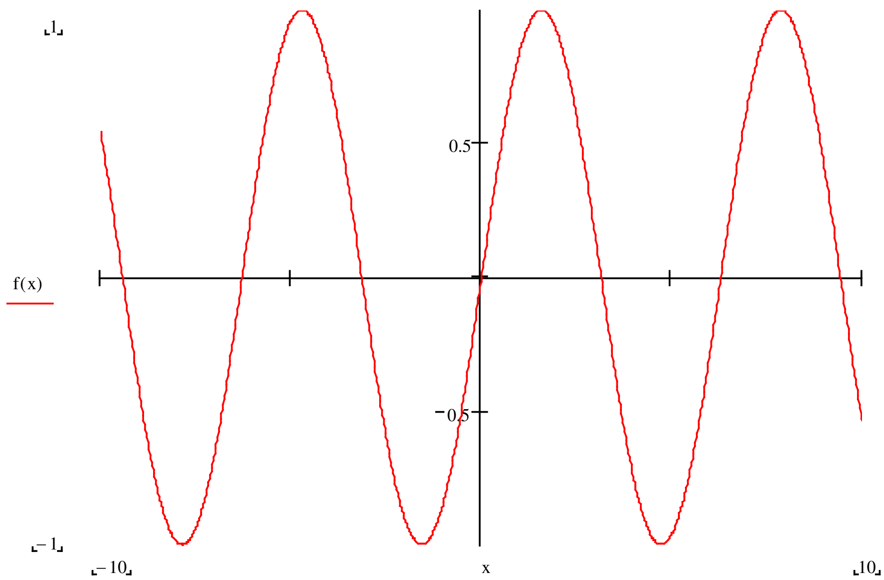
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$.

΄Εχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα.



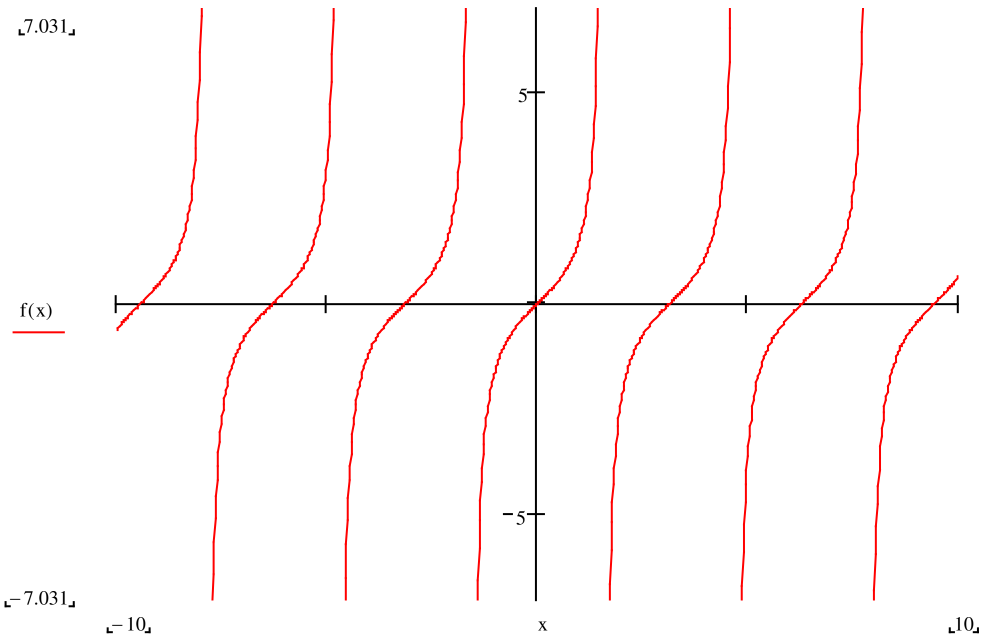
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

΄Εχει πεδίο ορισμού ολόκληρο το R, είναι άρτια και άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \infty)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με 1 στο σημείο x=0. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, καθώς $f(0)=1\neq 0$. Καθώς το x πλησιάζει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, η τιμή της συνάρτησης πλησιάζει και στις δύο περιπτώσεις στο 0, χωρίς ποτέ να το φθάνει. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει συνεπώς οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα x'x. Αυτή η συνάρτηση έχει άνω φράγμα το 1 και κάτω φράγμα το 0.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=ημx.

΄Εχει πεδίο ορισμού ολόκληρο το R, είναι περιττή και άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων. Είναι περιοδική με περίοδο 2π και άρα αρκεί να τη μελετήσουμε μόνο στο διάστημα [0, 2π]. Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]$ και ξανά γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3\frac{\pi}{2}, 2\pi]$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με 1 στο σημείο $x=\frac{\pi}{2}$ και ολικό ελάχιστο ίσο με –1 στο σημείο $x=3\frac{\pi}{2}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από την αρχή των αξόνων, καθώς f(0)=0 και δεν έχει ασύμπτωτες. Αυτή η συνάρτηση έχει άνω φράγμα το 1 και κάτω φράγμα το –1.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=εφx.

΄Εχει πεδίο ορισμού ολόκληρο το R, εκτός από τις τιμές $\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$, όπου $\kappa \in Z$. Είναι περιττή και άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων και είναι περιοδική με περίοδο π και άρα αρκεί να τη μελετήσουμε μόνο στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο. Η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων, καθώς f(0)=0, και οι ευθείες $x=-\frac{\pi}{2}$ και $x=\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $\alpha \in R^+$, να αποδειχθεί ότι $\alpha+1 \geq 2\sqrt{\alpha}$.
2. Αν $\alpha, \beta \in R^+$, να αποδειχθεί ότι $\alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$.
3. Αν $\alpha, \beta \in R^+$, να αποδειχθεί ότι $(\alpha+\beta)(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}) \geq 4$.
4. Αν $\alpha, \beta \in R$ και $0<\alpha<\beta$, να αποδειχθεί ότι $\alpha<\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}<\beta$.
5. Αν $\alpha, \beta \in R$ και $0<\alpha<\beta$, να μπουν στη σειρά οι αριθμοί 1, $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\beta}{\alpha}$ και να αποδειχθεί ότι $\frac{\beta}{\alpha}-1>1-\frac{\alpha}{\beta}$.
6. Αν $\alpha, \beta, x \in R^+$ και $\beta<\alpha$, να αποδειχθεί ότι $\frac{\alpha+x}{\beta+x}<\frac{\alpha}{\beta}$.
7. Να αποδειχθεί ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.
8. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$, να αποδειχθεί ότι $(\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1) \geq 8\alpha\beta\gamma$.
9. Αν $\alpha>2$ και $\beta>2$, να αποδειχθεί ότι $\alpha\beta>\alpha+\beta$.
10. Να μετατραπεί η παρακάτω παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή : $\frac{4}{\sqrt[3]{7}}$.
11. Να μετατραπεί η παρακάτω παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή : $\frac{5}{3+\sqrt{2}}$.
12. Να μετατραπεί η παρακάτω παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή : $\frac{5}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.
13. Να μετατραπεί η παρακάτω παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή : $\frac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{11}}$.
14. Να μετατραπεί η παρακάτω παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή : $\frac{12}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3}}$.
15. Να μετατραπεί η παρακάτω παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή : $\frac{12}{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3}}$.
16. Να μετατραπεί η παρακάτω παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή : $\frac{12}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}$.
17. Να μετατραπεί η παρακάτω παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή : $\frac{12}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{3}}$.

18. Να μετατραπεί η παρακάτω παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή : $\frac{12}{\sqrt{7}-\sqrt[3]{3}}$.
19. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x)= $\sqrt{2-3x}$ (Απ. $(-\infty, \frac{2}{3}]$).
20. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x)= $\frac{2}{x^2-5x+6}$ (Απ. R–{2, 3}).
21. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου Μ(2, 5) ως προς τον άξονα x'x.
22. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου Μ(2, 5) ως προς τον άξονα y'y.
23. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου Μ(2, 5) ως προς την αρχή Ο των αξόνων.
24. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου Μ(2, 5) ως προς τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.
25. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων (4, 8) και (–2, 7) στο καρτεσιανό επίπεδο.
26. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ευθεία y=x+4 με τον άξονα x'x (Απ. 45^o).
27. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ευθεία y= $\frac{\sqrt{3}}{3}$x+10 με τον άξονα x'x (Απ. 30^o).
28. Τι σχέση έχουν οι ευθείες y=3x+5 και y=3x+20 στο καρτεσιανό επίπεδο; (Απ. παράλληλες).
29. Τι σχέση έχουν οι ευθείες y=3x+5 και y= $-\frac{1}{3}$x+20 στο καρτεσιανό επίπεδο; (Απ. κάθετες).
30. Να βρεθεί ο αριθμός λ έτσι ώστε οι ευθείες $y=\lambda^2x+5$ και y=(4λ–3)x+20 να είναι παράλληλες στο καρτεσιανό επίπεδο (Απ. λ=1 και λ=3).
31. Να βρεθεί ο αριθμός λ έτσι ώστε οι ευθείες y=(λ–2)x+5 και y = (λ+2)x+20 να είναι κάθετες στο καρτεσιανό επίπεδο (Απ. λ= $\sqrt{3}$ και λ= $-\sqrt{3}$).
32. Γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=(x-2)^2$.
33. Γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=(x+3)^2$.
34. Γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4$.
35. Γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+8$.
36. Γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=(x-5)^2+7$.