ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- ΟΡΙΣΜΟΙ
- ΠΡΑΞΕΙΣ
- ΣΥΖΥΓΕΙΣ
- ΜΕΤΡΟ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1

Για να υπολογίσουμε δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη σε παράσταση με i χρησιμοποιούμε γνωστές ταυτότητες και έχουμε υπόψη ότι:

i. $z^{\nu} = z^{\nu-1}z$ με ν ακέραιο θετικό και ν≥2

ii. $z^0 = 1$

iii. $z^{-\nu} = \dfrac{1}{z^{\nu}}$ με ν ακέραιο θετικό και z≠0

iv. Επειδή $i^4 = 1$ έχουμε $i^{\nu} = i^{4\rho+\upsilon} = (i^4)^{\rho} i^{\upsilon} = i^{\upsilon} = \begin{cases} 1\,, & \alpha\nu\ \upsilon = 0 \\ i\,, & \alpha\nu\ \upsilon = 1 \\ -1\,, & \alpha\nu\ \upsilon = 2 \\ -i\,, & \alpha\nu\ \upsilon = 3 \end{cases}$

v. Για να φέρουμε ένα πηλίκο μιγαδικών στη μορφή α+βi πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή.

vi. Σε αφαιρέσεις που υπάρχουν ίσες και μεγάλες δυνάμεις συχνά βγάζουμε κοινό παράγοντα το i π.χ. $(\alpha+\beta i)^{\nu} = i^{\nu}(\dfrac{\alpha}{i}+\beta)^{\nu} = i^{\nu}(\dfrac{\alpha i}{i^2}+\beta)^{\nu} = i^{\nu}(-\alpha i+\beta)^{\nu}$

vii. Παρατηρούμε ότι $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$
$(1-i)^2 = 1^2 - 2i + i^2 = -2i$

Παράδειγμα 1: Αν $z = \dfrac{2i}{i-3}$ να δείξετε ότι $Re(z^2) = -\dfrac{8}{25}$

Παράδειγμα 2: Να δείξετε ότι $[[((1+i)^2 - i)^4 + i]^2 - i]^4 = 1$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2

Για να υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα ενός μιγαδικού α+βi ≠ 0 , βρίσκουμε τον z = x+yi με x,y$\in\mathbb{R}$ ώστε

$z^2 = \alpha+\beta i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = \alpha+\beta i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$ **Λύνουμε μετά το σύστημα.**

Παράδειγμα 1: Να βρείτε την τετραγωνική ρίζα του μιγαδικού 3+4ι [$2 \pm i$]

Παράδειγμα 2: Να βρείτε την τετραγωνική ρίζα του μιγαδικού $w = (-1+i)^3 - 2i^3$

[$\pm(\sqrt{\sqrt{5}+1} + i\sqrt{\sqrt{5}-1}\,)$]

ΜΕΘΟΔΟΣ 3

Για να βρούμε τον συζυγή ενός μιγαδικού z

- **Φέρνουμε το μιγαδικό στη μορφή z = α+βi οπότε ο συζυγής είναι ο $\bar{z} = \alpha - \beta i$ ή**
- **Βρίσκουμε το συζυγή με τη βοήθεια των ιδιοτήτων:**

1. $\overline{z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_\nu} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \dots + \bar{z}_\nu$ με $\nu \geq 2$
2. $\overline{z_1 z_2 z_3 \dots z_\nu} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 \dots \bar{z}_\nu$ με $\nu \geq 2$
3. $\overline{\alpha z} = \alpha \bar{z}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\overline{z^\nu} = (\bar{z})^\nu$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$
6. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$, $z \neq 0$
7. $\overline{(\bar{z})} = z$

Παράδειγμα 1: Να βρείτε το συζυγή του μιγαδικού $z = \frac{2-i}{1-i} + \frac{3-2i}{1+i}$ [$\bar{z} = 2 + 2i$]

Παράδειγμα 2: Να βρείτε το συζυγή του μιγαδικού $z = \frac{(2-i)(5+2i)}{1-4i}$ [$\bar{z} = \frac{16}{17} + \frac{47}{17}i$]

ΜΕΘΟΔΟΣ 4

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι ο μιγαδικός z $\in \mathbb{R}$:

- **τον φέρνουμε στη μορφή α+βi και δείχνουμε ότι Im(z)=β=0 ή**
- **z $\in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ δηλαδή θα δείξουμε ότι ο z είναι ίσος με το συζυγή του.**

Παράδειγμα 1: Αν $z_1 = \frac{4-5i}{8+2i}$ και $z_2 = \frac{4+5i}{8-2i}$ να δείξετε ότι ο $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα 2:Να βρείτε τους z$\in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει $\frac{z-i}{z+i} \in \mathbf{R}, z \neq -i$. [z=yi]

ΜΕΘΟΔΟΣ 5

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι ο μιγαδικός z$\in I$:

- **τον φέρνουμε στη μορφή α+βi και δείχνουμε ότι Re(z) = 0 ή**
- **z $\in I \Leftrightarrow z = -\bar{z}$ δηλαδή θα δείξουμε ότι ο z είναι αντίθετος του συζυγή του.**

Παράδειγμα 1: Να βρείτε το x$\in \mathbb{R}$ ώστε ο z = (x+i)(1-xi) να είναι φανταστικός [x=0]

Παράδειγμα 2: Να βρείτε το α$\in \mathbb{R}$ ώστε ο w = $\frac{\alpha + 2 + \alpha i}{1 + \alpha i}$ να είναι φανταστικός [αδύνατη]

ΜΕΘΟΔΟΣ 6

Για να βρούμε το μέτρο ενός μιγαδικού z

- **Φέρνουμε το μιγαδικό στη μορφή z = α+βi οπότε :** $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

ή

- **Βρίσκουμε το μέτρο με τη βοήθεια των ιδιοτήτων:**

1. $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad |z_1 z_2 \ldots z_\nu| = |z_1||z_2|\ldots|z_\nu|$
3. $|z^\nu| = |z|^\nu$
4. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ με $z \neq 0$
5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ με $z_2 \neq 0$

Παράδειγμα 1: Να υπολογίσετε το μέτρο του αριθμού

$$z = \frac{(1+i)^{200}(6+2i) - (1-i)^{198}(3-i)}{(1+i)^{196}(23-7i) + (1-i)^{194}(10-2i)}$$

[$|z| = 1$]

Παράδειγμα 2: Να υπολογίσετε τα μέτρα των μιγαδικών:

α. $z = \dfrac{(\sqrt{3}+2i)^2}{i(1-2\sqrt{3}i)}$ β. $z = \dfrac{(1+2i)^{14}}{(1-2i)^{12}}$ [α. $\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$ β. 5]

ΜΕΘΟΔΟΣ 7

Για την απόδειξη μιας ισότητας ή ανισότητας που περιέχουν μιγαδικούς :

- **χρησιμοποιούμε τον τύπο** $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ **ή**
- **την βασική ιδιότητα** $|z|^2 = z\bar{z}$

Αν στην σχέση δεν υπάρχουν τετράγωνα μέτρων , υψώνουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη για να τα δημιουργήσουμε.

Παράδειγμα 1: Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$

Παράδειγμα 2:Για τους $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ να δείξετε ότι

α. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

β. $|z_1 - z_2|^2 \leq (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$

Παράδειγμα 3 : Αν ισχύει $|z+16| = 4|z+1|$ να δείξετε ότι $|z| = 4$

ΜΕΘΟΔΟΣ 8

Όταν δίνεται η $\left[\mathbf{f(z)}\right]^{\nu}=\left[\mathbf{g(z)}\right]^{\mu}$ με μ,ν$\in\mathbb{Z}^{*}$,
τότε παίρνουμε τα μέτρα των δύο μελών της σχέσης και χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των μέτρων.

Παράδειγμα 1: Αν ο w επαληθεύει την $(\mathbf{w}+\mathbf{2})^{\nu}=\mathbf{w}^{\nu}$ να δείξετε ότι Re(w) = -1

Παράδειγμα 2: Να δείξετε ότι η εξίσωση $(\mathbf{1}+\mathbf{iz})^{\nu}=\dfrac{\mathbf{1}+\mathbf{i}\sqrt{\mathbf{3}}}{\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{i}}$ $\mathbf{\mu\varepsilon}\ \mathbf{\nu}\in\mathbf{N^*}, \mathbf{z}\in\mathbf{C}$ δεν έχει πραγματική λύση.

[Υποθέτουμε ότι z=ρ$\in\mathbb{R}$. Παίρνουμε μέτρα και ...ρ=0 η οποία οδηγεί σε άτοπο την σχέση]

ΜΕΘΟΔΟΣ 9

Για να βρούμε την μέγιστη ή ελάχιστη τιμή του μέτρου μια ς παράστασης με μιγαδικούς , γράφουμε την παράσταση ως άθροισμα ή διαφορά δύο μιγαδικών ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος και εφαρμόζουμε την σχέση

$$\left||\mathbf{z_1}|-|\mathbf{z_2}|\right|\leq|\mathbf{z_1}\pm\mathbf{z_2}|\leq|\mathbf{z_1}|+|\mathbf{z_2}|$$ **ή**

Χρησιμοποιούμε τη γεωμετρική παράσταση μιγαδικών στο επίπεδο.

Παράδειγμα 1: Αν $z\in\mathbb{C}$ με $|\mathbf{z}|=\mathbf{4}$ να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\mathbf{f(z)}=|\mathbf{z}+\mathbf{8}-\mathbf{6i}|$ και για ποια τιμή του z συμβαίνει αυτό.

[Μέγιστη τιμή η $\mathbf{f(z)}=14$ όταν $z=\dfrac{16}{5}-\dfrac{12}{5}i$]

Παράδειγμα 2: Αν $z\in\mathbb{C}$ με $|\mathbf{z}+\mathbf{6}-\mathbf{3i}|\leq 7$ να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή του αριθμού $|\mathbf{z}-2+3\mathbf{i}|$

[Το Μ(z) είναι σε κυκλικό δίσκο Κ(-6,3) και ρ=7. Ο $|\mathbf{z}-2+3\mathbf{i}|$ είναι η απόσταση ΛΜ όπου Λ(2,-3) $3\leq|\mathbf{z}-2+3\mathbf{i}|\leq 17$]

ΜΕΘΟΔΟΣ 10

Για να παραστήσουμε στο μιγαδικό επίπεδο τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύουν κάποιες σχέσεις με μέτρα τότε χρησιμοποιούμε ότι ο αριθμός $|z_1-z_2|$ είναι ίσος με την απόσταση των σημείων M_1 , M_2 που είναι οι εικόνες των z_1 , z_2 $\in\mathbb{C}$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1: Στο μιγαδικό επίπεδο να παραστήσετε τους μιγαδικούς για τους οποίους ισχύει: 1<$|\mathbf{z}-\mathbf{3}-\mathbf{2i}|$<5[Δακτύλιος με κέντρο Κ91,2) και ακτίνες 1 και 4]

Παράδειγμα 2: Στο μιγαδικό επίπεδο να παραστήσετε τους μιγαδικούς για τους οποίους ισχύει: $|\mathbf{z}-\mathbf{5}|=|\mathbf{z}+\mathbf{5}|+7$ [Υπόδειξη: Ορισμός υπερβολής $\dfrac{x^2}{(\sqrt{\frac{2499}{204}})^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{\frac{2499}{14}})^2}=1$]

ΜΕΘΟΔΟΣ 11

Αν z = x+yi μιγαδικός και θέλουμε να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο στον οποίο κινείται η εικόνα του M(x,y) ώστε ο ω=f(z) να έχει κάποια ιδιότητα τότε χρησιμοποιώντας αυτήν την ιδιότητα κάνουμε πράξεις και ύστερα αντικαθιστούμε το z με x+yi και βρίσκουμε τις σχέσεις μεταξύ x και y που καθορίζουν τον γεωμετρικό τόπο. Μπορούμε επίσης πρώτα να κάνουμε αντικατάσταση του z με x+yi και ύστερα πράξεις.

Παράδειγμα 1: Έστω ο μιγαδικός z = x+yi με x,y0R και y≠0. Αν $\omega=\frac{\overline{z}^2}{z-1}\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι ο γ.τ. των M(x,y) είναι μια υπερβολή της οποίας έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές. [$\frac{(x-\frac{1}{3})^2}{(\frac{1}{3})^2}-\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}=1$]

Παράδειγμα 2: Αν για τον μιγαδικό z = x+yi με x,y0R και y≠0 ισχύει $|z-1|=2|z+1|$ να δείξετε ότι η εικόνα του M(x,y) κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Ανήκει στον παραπάνω κύκλο η εικόνα του μιγαδικού w = $-\frac{5}{3}+\frac{4}{3}i$; [K$(-\frac{5}{3},0)$ και ρ=$\frac{4}{3}$]

ΜΕΘΟΔΟΣ 12

Αν z = x+yi μιγαδικός για τον οποίο ισχύει z = f(α)+g(α)I και θέλουμε να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο στον οποίο κινείται η εικόνα του M(x,y) τότε βρίσκουμε σχέση που συνδέει τα x,y χωρίς την παράμετρο α. Η σχέση βρίσκεται με απαλοιφή του α από τις εξισώσεις x = f(α) , y = g(α). Αν η α είναι γωνία χρησιμοποιούμε τους τύπους ημ^{2}α+συν^{2}α=1 , 1+εφ^{2}α = $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ και άλλες.

Παράδειγμα 1: Δίνεται η εξίσωση z^{2}συν^{2}θ - z ημ2θ+2 - συν^{2}θ = 0. Έστω η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο εκείνης της ρίζας της εξίσωσης της οποίας το φανταστικό μέρος είναι αρνητικό.
Αν $-\frac{\pi}{2}\langle\theta\langle\frac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι το M κινείται σε μια υπερβολή.

[Δ=...=-4συν^{2}θ $z_{1,2}=\varepsilon\phi\theta\pm\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}i$. συνθ>0 ... $z_2=x+yi$ με $x=\varepsilon\phi\theta$ και $y=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}i$
ή x^2=.. y^2=.. ....και επειδή $1+\varepsilon\phi^2\theta=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$ ... $y^2-x^2=1$ δηλ ισοσκελής υπερβολή.]

ΜΕΘΟΔΟΣ 13

Αν οι w = x+yi , z = κ+λi συνδέονται με κάποια σχέση και γνωρίζουμε τη γραμμή c στην οποία κινείται η εικόνα P(κ,λ) του z τότε για να βρούμε τον γ.τ. των εικόνων M(x,y) του w θα βρίσκουμε τα κ,λ συναρτήσει των x,y. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τα κ,λ στην εξίσωση της c και βρίσκουμε σχέση ανάμεσα στα x,y που καθορίζουν τον γ.τ. των M(x,y).

Παράδειγμα 1: Αν οι μιγαδικοί w = x+yi , z = κ+λi συνδέονται με την $w=\frac{z-1}{z+1}$ και η εικόνα του P του z κινείται στον κύκλο με εξίσωση κ^2+λ^2 = 4, να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα M του w.