ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Επιμέλεια: Χρηματόπουλος Παναγιώτης

1) Πρέπει ο μαθητής να κάνει με ευχέρεια πράξεις σε αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μιγαδικούς αριθμούς.
2) Πρέπει ο μαθητής να καταλάβει ότι ο αριθμός $z=\alpha+\beta i$ είναι μιγαδικός αριθμός σε κανονική μορφή μόνο όταν γνωρίζει ότι οι αριθμοί α και β είναι πραγματικοί οπότε ο συζυγής αυτού είναι $\bar{z}=\alpha-\beta i$ και το μέτρο αυτού είναι $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.Επομένως οι κάτωθι προτάσεις :

   α) Αν $z=\alpha+\beta i$ τότε $\bar{z}=\alpha-\beta i$

   β) Αν $z=\alpha+\beta i$ τότε $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ είναι λανθασμένες , για να είναι σωστές πρέπει να γνωρίζουμε ότι $\alpha , \beta \in R$

3) Από την Θεωρεία γνωρίζουμε ότι αν $z=\alpha+\beta i$ με $\alpha , \beta \in R$ τότε ισχύουν $z+\bar{z}=2\alpha$ και $z-\bar{z}=2\beta i$. Αυτοί οι τύποι μπορούν να χρησιμοποιηθούν και με την μορφή $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ και $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$
4) Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι :

   α) Αν θέλω να δείξω ότι ένας μιγαδικός αριθμός z είναι πραγματικός τότε χρησιμοποιώ έναν από τους παρακάτω τρόπους.
   - Αποδεικνύω ότι $\bar{z}=z$
   - Μετατρέπω τον $z=w+\bar{w}$
   - Θέτω $z=x+yi , x, y\in R$ και μετά από πράξεις καταλήγω $y=0$

   β) Αν θέλω να δείξω ότι ένας μιγαδικός αριθμός z είναι φανταστικός τότε χρησιμοποιώ έναν από τους παρακάτω τρόπους.
   - Αποδεικνύω ότι $\bar{z}=-z$
   - Μετατρέπω τον $z=w-\bar{w}$
   - Θέτω $z=x+yi , x, y\in R$ και μετά από πράξεις καταλήγω $x=0$
5) Κατά την επεξεργασία κάποιων αλγεβρικών παραστάσεων που περιέχουν τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 , z_2 εμφανίζεται η παράσταση $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2$. Θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι αυτή είναι πραγματικός αριθμός διότι $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2=z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}\in R$ ως άθροισμα συζυγών .

   Ισχύει η ισότητα: $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2=2[\mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Re}(z_2)+\mathrm{Im}(z_1)\cdot\mathrm{Im}(z_2)]$ (να δειχθεί)
6) Αντίστοιχα με το (5) η παράσταση $z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1 z_2$ είναι φανταστικός αριθμός διότι $z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1 z_2=z_1\bar{z}_2-\overline{z_1\bar{z}_2}$ ως διαφορά συζυγών.

   Ισχύει η ισότητα : $z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1 z_2=-2[\mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Im}(z_2)-\mathrm{Im}(z_1)\cdot\mathrm{Re}(z_2)]i$ (να δειχθεί)
7) Πρέπει ο μαθητής όταν γνωρίζει τις εικόνες Α και Β των μιγαδικών z_1 , z_2 στο μιγαδικό επίπεδο να μπορεί να βρίσκει τις εικόνες των z_1+z_2 και z_1-z_2 με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.
8) Λύση εξίσωσης με άγνωστο τον μιγαδικό z :

   α) αν η εξίσωση περιέχει μόνο τον z και δυνάμεις αυτού τότε λύνεται κατά τα γνωστά (αν είναι πρώτου βαθμού κάνουμε πράξεις , χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους , αναγωγές και διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου, αν είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα και αν είναι ανωτέρου βαθμού με παραγοντοποίηση) β) αν η εξίσωση εκτός από τον z περιέχει τον $\bar{z}$ ή το $|z|$ τότε αντικαθιστώ $z = x + yi, x\, y \in R$,βρίσκω τους πραγματικούς χ και ψ και μετά τον z. Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να λυθεί και χωρίς αντικατάσταση , χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μέτρου.

9) **Σε θέματα γεωμετρικών τόπων:** Όταν ζητούμε να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο ενός μιγαδικού z βασική προϋπόθεση είναι να γνωρίζουμε την ιδιότητα του . Η ιδιότητα αυτή συνήθως είναι ισότητα που περιέχει τον z σαν μεταβλητή και άλλους σταθερούς γνωστούς αριθμούς. Στα θέματα αυτά προσέχω πρώτα αν η ιδιότητα είναι της μορφής α) $|z - z_0| = \rho > 0$ ή

β) $|z - z_1| = |z - z_2|$ που είναι γνωστοί από την θεωρεία του βιβλίου.

Αν δεν είναι αυτής της μορφής τότε θέτουμε $z = x + yi, x, y \in R$ και το αντικαθιστούμε στην ιδιότητα . Μετά από μια διαδικασία πράξεων καταλήγουμε σε μία από τις παρακάτω ισότητες.

1) $x = \alpha \in R$ (κατακόρυφη ευθεία)
2) $y = \beta \in R$ (οριζόντια ευθεία)
3) $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (πλάγια ευθεία)
4) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ (κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ)
5) $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}}{2}$
6) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (έλλειψη)
7) $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (υπερβολή)

10) Όταν έχω δεδομένο ότι $|z| = \alpha > 0$ τότε κάνουμε την εξής επεξεργασία:

$|z|^2 = \alpha^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \alpha^2 \Rightarrow \bar{z} = \frac{\alpha^2}{z}$. Ειδικότερα αν $\alpha = 1$ τότε $\bar{z} = \frac{1}{z}$

11) Η τριγωνική ανισότητα $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$ χρησιμοποιείτε συνήθως όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια ανισότητα (συνήθως διπλή)

Τα παραπάνω αποτελούν βασικές γνώσεις στους μιγαδικούς αριθμούς και σε συνδυασμό με την απόκτηση κάποιας εμπειρίας στη λύση ασκήσεων , δίνουν στο μαθητή την δυνατότητα , να μπορεί να λύνει ασκήσεις στα πλαίσια των απαιτήσεων για τις γενικές εξετάσεις .