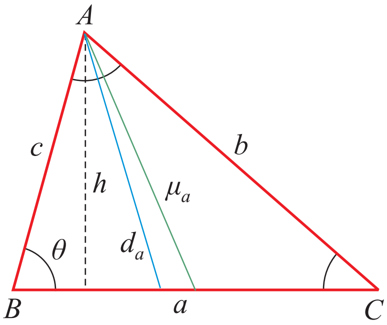
4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

4.1 Σε δύο Διαστάσεις

Τρίγωνο



Σχ. 4-1

Περίμετρος $\Pi = 2s = a + b + c$

'Υψος $h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Διάμεσος $\mu_a{}^2 = \dfrac{1}{2}(b^2 + c^2) - \dfrac{1}{4}a^2$

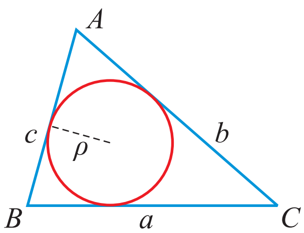
Εσωτερική διχοτόμος $d_a = \dfrac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$

Εξωτερική διχοτόμος $D_a = \dfrac{2\sqrt{bc(s-b)(s-c)}}{|b-c|}$ $[b \neq c]$

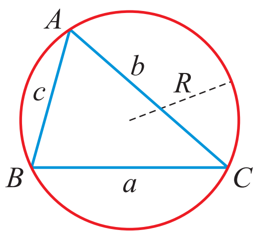
Εμβαδό $E = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}ac\sin\theta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Ακτίνα εγγραμμένου κύκλου $\rho = \dfrac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

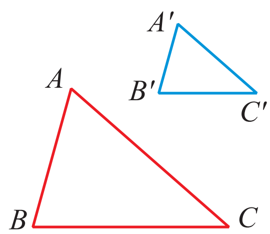
Ακτίνα περιγραμμένου κύκλου $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$



Σχ. 4-2



Σχ. 4-3



Σχ. 4-4

Όμοια τρίγωνα (Σχ. 4-3)

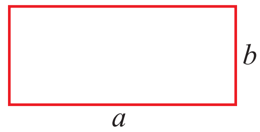
$$A = A' \qquad B = B' \qquad C = C'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Ορθογώνιο

Περίμετρος $\Pi = 2a + 2b$

Εμβαδό $E = ab$

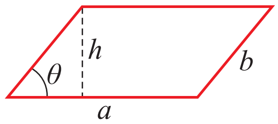


Σχ. 4-5

Παραλληλόγραμμο

Περίμετρος $\Pi = 2a + 2b$

Εμβαδό $E = ah = ab\sin\theta$

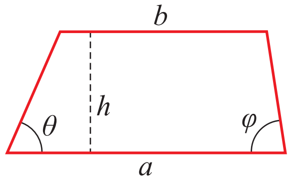


Σχ. 4-6

Τραπεζοειδές

Περίμετρος $\Pi = a + b + h\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\varphi}\right)$

Εμβαδό $E = \tfrac{1}{2}h(a+b)$



Σχ. 4-7

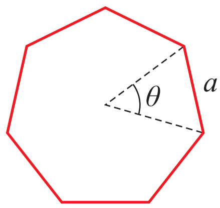
Κανονικό πολύγωνο

Περίμετρος $\Pi = na$

Κεντρική γωνία $\theta = \frac{2\pi}{n}$

Εμβαδό $E = \frac{1}{4}na^2\cot\frac{\pi}{n} = \frac{1}{4}na^2\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$

όπου n το πλήθος των πλευρών και a το μήκος κάθε πλευράς.



Σχ. 4-8

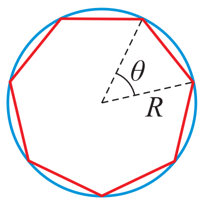
Κανονικό πολύγωνο γραμμένο σε κύκλο

Περίμετρος $\Pi = 2nR\sin\frac{\pi}{n} = 2nR\sin\frac{180°}{n}$

Κεντρική γωνία $\theta = \frac{2\pi}{n}$

Εμβαδό $E = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360°}{n}$

όπου n το πλήθος των πλευρών και R η ακτίνα του περιγραμμένου κύκλου.

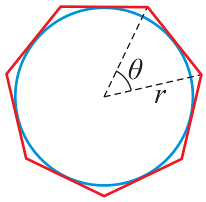


Σχ. 4-9

Κανονικά πολύγωνα γραμμένα σε κύκλο ακτίνας R

Πολύγωνο	Πλευρά	Απόστημα	Εμβαδό
$n = 3$	$\sqrt{3}\,R$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,R$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}\,R^2$
$n = 4$	$\sqrt{2}\,R$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,R$	$2R^2$
$n = 5$	$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,R$	$\frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}\,R$	$\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,R^2$
$n = 6$	R	$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,R$	$(3/2)\sqrt{3}\,R^2$
$n = 8$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}\,R$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\,R$	$2\sqrt{2}\,R^2$
$n = 10$	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,R$	$(5/4)\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,R^2$
$n = 12$	$\sqrt{2-\sqrt{3}}\,R$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\,R$	$3R^2$

Κανονικό πολύγωνο γραμμένο γύρω από κύκλο



Σχ. 4-10

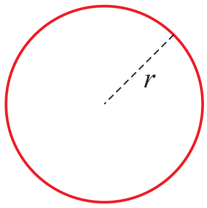
Περίμετρος $\quad \Pi = 2nr\tan\dfrac{\pi}{n} = 2nr\tan\dfrac{180°}{n}$

Κεντρική γωνία $\quad \theta = \dfrac{2\pi}{n}$

Εμβαδό $\quad E = nr^2\tan\dfrac{\pi}{n} = nr^2\tan\dfrac{180°}{n}$

όπου n το πλήθος των πλευρών και r η ακτίνα του κύκλου.

Κύκλος



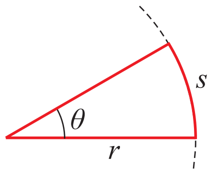
Σχ. 4-11

Περίμετρος $\quad \Pi = 2\pi r$

Εμβαδό $\quad E = \pi r^2$

όπου r η ακτίνα του κύκλου.

Τομέας κύκλου



Σχ. 4-12

Μήκος τόξου $\quad s = r\theta$

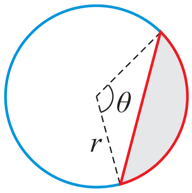
Εμβαδό $\quad E = \frac{1}{2}r^2\theta \quad$ [θ σε ακτίνια]

όπου r η ακτίνα του κύκλου και θ η γωνία του τομέα.

Τμήμα κύκλου

Εμβαδό σκιασμένου τμήματος $E = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$

όπου r η ακτίνα του κύκλου.



Σχ. 4-13

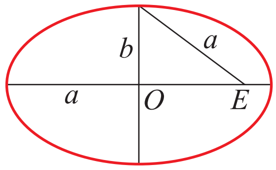
Έλλειψη

Περίμετρος

$$\Pi = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \cong \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

Εμβαδό $E = \pi ab$

όπου $k = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}$. Βλέπε σελ. ??? για αριθμητικούς πίνακες.



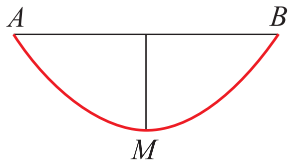
Σχ. 4-14

Τμήμα παραβολής

Μήκος τόξου AMB

$$(AMB) = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+16a^2} + \frac{b^2}{8a}\ln\left(\frac{4a+\sqrt{b^2+16a^2}}{b}\right)$$

Εμβαδό $E = \frac{2}{3}ab$



Σχ. 4-15

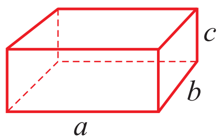
4.2 Σε τρεις Διαστάσεις

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Εμβαδό επιφάνειας $E = 2(ab + ac + bc)$

Όγκος $V = abc$

όπου a, b, c είναι το μήκος, πλάτος και ύψος του παραλληλεπίπεδου αντίστοιχα.



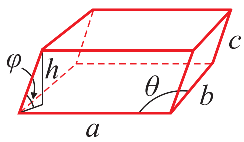
Σχ. 4-16

Πλάγιο παραλληλεπίπεδο

Ύψος $h = c\sin\varphi$

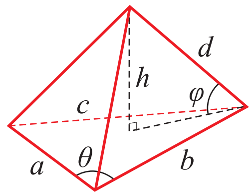
Όγκος $V = Ah = abc\sin\theta\sin\varphi$

όπου A είναι η οριζόντια διατομή του παραλληλεπί-πεδου.



Σχ. 4-17

Πυραμίδα



Σχ. 4-18

Ύψος $h = d\sin\theta$

Όγκος $V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{6}abd\sin\theta\sin\varphi$

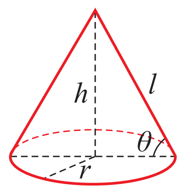
όπου A το εμβαδό της βάσης.

Κανονικά πολύεδρα

Στα 5 κανονικά πολύεδρα του πίνακα είναι a η ακμή, R η ακτίνα της περιγραμμένης σφαίρας, E το εμβαδό της επιφάνειας, V ο όγκος. Η ακτίνα της εγγραμμένης σφαίρας είναι πάντα $\rho = 3V/E$.

Πολύεδρο	Ακτίνα R	Εμβαδό E	Όγκος V
Τετράεδρο (4 ισόπλευρα τρίγωνα)	$\frac{1}{4}\sqrt{6}\,a$	$\sqrt{3}\,a^2$	$(1/12)\sqrt{2}\,a^3$
Κύβος (6 τετράγωνα)	$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$	$6a^2$	a^3
Οκτάεδρο (8 ισόπλευρα τρίγωνα)	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$	$2\sqrt{3}\,a^2$	$\frac{1}{3}\sqrt{2}\,a^3$
Δωδεκάεδρο (12 κανονικά πεντάγωνα)	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\sqrt{3}\,a$	$3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\,a^2$	$\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^3$
Εικοσάεδρο (20 ισόπλευρα τρίγωνα)	$\frac{1}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\,a$	$5\sqrt{3}\,a^2$	$(5/12)(3+\sqrt{5})a^3$

Ορθός κυκλικός κώνος



Σχ. 4-19

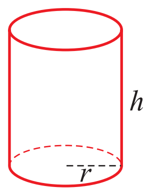
Ύψος $h = l\sin\theta$

Εμβαδό κωνικής επιφάνειας $E = \pi rl = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

Όγκος $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

όπου r η ακτίνα της βάσης και h το ύψος του κώνου.

Ορθός κυκλικός κύλινδρος



Σχ. 4-20

Εμβαδό κυλινδρικής επιφάνειας $E = 2\pi rh$

Όγκος $V = \pi r^2 h$

όπου r η ακτίνα και h το ύψος του κυλίνδρου.

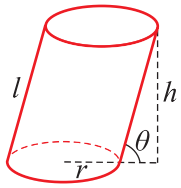
Πλάγιος κυκλικός κύλινδρος

Ύψος $h = l\sin\theta$

Εμβαδό κυλινδρικής επιφάνειας $E = 2\pi r l = \dfrac{2\pi r h}{\sin\theta}$

Όγκος $V = \pi r^2 h = \pi r^2 l \sin\theta$

όπου r η ακτίνα της βάσης, h το ύψος και l η γενέτειρα του κυλίνδρου.



Σχ. 4-21

Ορθός κόλουρος κώνος

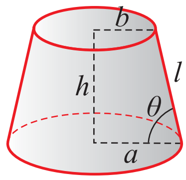
Ύψος $h = l\sin\theta = \sqrt{l^2 - (a-b)^2}$

Εμβαδό κωνικής επιφάνειας

$$E = \pi(a+b)l = \pi(a+b)\sqrt{h^2 + (a-b)^2}$$

Όγκος $V = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$

όπου a, b οι ακτίνες των βάσεων και h το ύψος του κώνου.

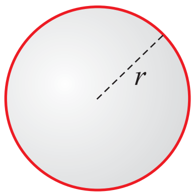


Σχ. 4-22

Σφαίρα

Εμβαδό επιφάνειας $E = 4\pi r^2$

Όγκος $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



Σχ. 4-23

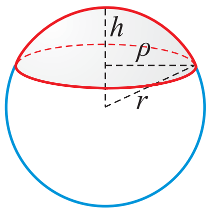
Σφαιρικό τμήμα

Ακτίνα βάσης $\rho = \sqrt{h(2r-h)}$

Εμβαδό σφαιρικής επιφάνειας $E = 2\pi r h$

Όγκος σκιασμένου τμήματος $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

όπου r η ακτίνα της σφαίρας και h το ύψος του τμήματος.

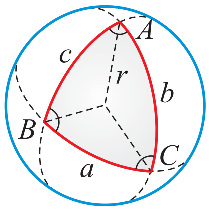


Σχ. 4-24

Σφαιρικό τρίγωνο

Εμβαδό τριγώνου ABC $E = (A + B + C - \pi)r^2$

όπου r η ακτίνα της σφαίρας και A, B, C οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου.



Σχ. 4-25

Ελλειψοειδές

Όγκος $V = \frac{4}{3}\pi abc$

όπου a, b, c οι ημιάξονες του ελλειψοειδούς.

Αν $a = b > c$, τότε

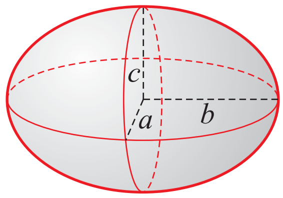
Εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$

Επιφάνεια $E = 2\pi a^2 + \frac{\pi c^2}{\varepsilon} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$

Αν $a = b < c$, τότε

Εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}$

Επιφάνεια $E = 2\pi a^2 + 2\pi \frac{ac}{\varepsilon} \sin^{-1} \varepsilon$



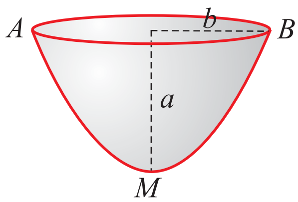
Σχ. 4-26

Παραβολοειδές από περιστροφή

Εμβαδό καμπύλης επιφάνειας

$$E = \frac{\pi b^4}{6a^2}\left[\left(\frac{4a^2}{b^2} + 1\right)^{3/2} - 1\right]$$

Όγκος $V = \frac{1}{2}\pi b^2 a$



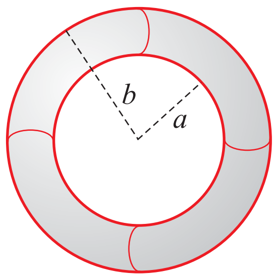
Σχ. 4-27

Τόρος

Εμβαδό επιφάνειας $E = \pi^2(b^2 - a^2)$

Όγκος $V = \frac{1}{4}\pi^2(a + b)(b - a)^2$

όπου a η εσωτερική και b η εξωτερική ακτίνα.



Σχ. 4-28