Τυπολόγιο Μαθηματικών

Φροντιστήρια ΓΙΑ ΑΝΩΤΑΤΕΣ ΣΧΟΛΕΣ GROUP

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ - ΔΥΝΑΜΕΙΣ

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ $\qquad$ $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ $\qquad$ $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ $\qquad$ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ $\qquad$ $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

1.Για κάθε φυσικό ν : $x^\nu-\alpha^\nu=(x-\alpha)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\alpha+\ldots+x\,\alpha^{\nu-2}+\alpha^{\nu-1})$

2.Για κάθε περιττό φυσικό ν: $x^\nu+\alpha^\nu=(x+\alpha)(x^{\nu-1}-x^{\nu-2}\alpha+\ldots+\alpha^{\nu-1})$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ Euler

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]=$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)$$

Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ **ή** $\alpha=\beta=\gamma$ **τότε ισχύει :** $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ : $\alpha^\nu=\underbrace{\alpha\,\alpha\ldots\alpha}_{\nu\text{ φορες}}$, $\alpha^0=1$, $\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^\nu}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$\alpha^\kappa\alpha^\lambda=\alpha^{\kappa+\lambda}$ $\qquad$ $\alpha^\kappa\beta^\kappa=(\alpha\beta)^\kappa$ $\qquad$ $(\alpha^\kappa)^\lambda=\alpha^{\kappa\lambda}$

$\dfrac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda}=\alpha^{\kappa-\lambda}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa=\dfrac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$ $\qquad$ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0$ **και** $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ : $(\alpha>\beta$ **και** $\beta>\gamma) \Rightarrow \alpha>\gamma$

$(\alpha\geq\beta$ **και** $\beta\geq\alpha) \Rightarrow \alpha=\beta$

α,β **ομόσημοι** $\Leftrightarrow (\alpha\beta>0\ ,\ \alpha/\beta>0)$

α,β **ετερόσημοι** $\Leftrightarrow (\alpha\beta<0\ ,\ \alpha/\beta<0)$

$$\boxed{\alpha^2 \geq 0 \quad \text{για κάθε } \alpha \in R}$$

ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

$(\alpha > \beta \;\; \text{και} \;\; \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

$(\alpha > \beta > 0 \;\; \text{και} \;\; \gamma > \delta > 0) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

$(\alpha > \beta \;\; \text{και} \;\; \gamma > 0) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

$(\alpha > \beta \;\; \text{και} \;\; \gamma < 0) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

Δεν αφαιρούμε και δεν διαιρούμε τις ανισότητες κατά μέλη

$$(\alpha > \beta \;\; \text{και} \;\; \alpha \cdot \beta > 0) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta} \;,\; (\alpha > \beta \;\; \text{και} \;\; \alpha \cdot \beta < 0) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

$$\alpha, \beta > 0 \,,\, \nu \in N^* \;:\; \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$$

ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: $|x| = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;,\; |-x| = |x| \;,\; |\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \;,\; \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \;\; \beta \neq 0$

$\sqrt{x^2} = |x| \;,\; |x|^{2\nu} = x^{2\nu} \;,\; |x|^\nu = |x^\nu|$

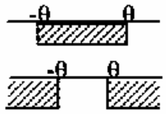
$|x| = \alpha \Leftrightarrow (x = \alpha \;\; \text{ή} \;\; x = -\alpha) \;,\; \alpha \geq 0$

$|x| = |\alpha| \Leftrightarrow (x = \alpha \;\; \text{ή} \;\; x = -\alpha)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ

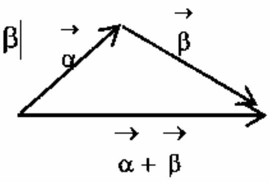
για κάθε $\alpha \in R$ **ισχύει :** $|\alpha| \geq 0$ **και** $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$

Αν $\theta > 0$ **τότε :** $\begin{cases} |x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta \\ |x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \text{ ή } x > \theta \end{cases}$



Τριγωνική ιδιότητα : $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

γενικά $|x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_\nu|$



Απόσταση **δύο αριθμών** $\alpha, \beta \in R$ **είναι :** $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^\nu = \alpha \qquad x, \alpha \geq 0}$$

$\sqrt[\nu]{\alpha}\,\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$ $\qquad \alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta}$ $\qquad \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu\kappa]{\alpha^{\mu\kappa}}$ $\qquad (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha$

$\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ $\qquad \sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha}$ $\qquad (\sqrt[\nu]{\alpha})^\mu = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, $\nu \in N^*$

$$x^\nu = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[\nu]{\alpha} \text{ η } x = -\sqrt[\nu]{\alpha} \quad (\alpha \geq 0) \quad \nu = \text{αρτιος} \\ x = \sqrt[\nu]{\alpha} \quad (\alpha \geq 0) \quad \nu = \text{περιττος} \\ x = -\sqrt[\nu]{-\alpha} \quad (\alpha < 0) \quad \nu = \text{περιττος} \end{cases}$$

Τυπολόγιο Μαθηματικών Φροντιστήρια ΓΙΑ ΑΝΩΤΑΤΕΣ ΣΧΟΛΕΣ GROUP

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$

1. Αν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες $\rho_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
2. Αν $\Delta=0$ έχει μια πραγματική ρίζα διπλή την: $\rho=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$
3. Αν $\Delta<0$ έχει μη πραγματικές ρίζες $\rho_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$

ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ : $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha\neq 0$

1. Αν $\Delta>0 \Rightarrow \rho_1\neq\rho_2\in R$

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
f(x)		ομόσημο α		ετερόσημο α		ομόσημο α	

2. Αν $\Delta=0 \Rightarrow \rho_1=\rho_2=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ (διπλή ρίζα)

x	$-\infty$		$-\beta/2\alpha$		$+\infty$
f(x)		ομόσημο α		ομόσημο α	

3. Αν $\Delta<0$ δεν έχει ρίζες

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		ομόσημο α	

ΤΥΠΟΙ VIETA *(Άθροισμα και Γινόμενο ριζών)*

$S=\rho_1+\rho_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, $P=\rho_1\cdot\rho_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ οπότε $\boxed{x^2-Sx+P=0}$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

- $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ αν $\Delta>0$
- $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho)^2$ αν $\Delta=0$

<u>*ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2×2*</u>

Εστω $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ με $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \neq 0$ και $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$

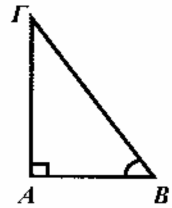
- Αν $D \neq 0$ εχει μοναδικη λυση : $x = \dfrac{D_x}{D}$, $\psi = \dfrac{D_\psi}{D}$
- Αν $D = 0$ και $\left(D_x \neq 0 \text{ η } D_\psi \neq 0\right)$ αδυνατο
- Αν $D = D_x = D_\psi = 0$ απειρες λυσεις

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

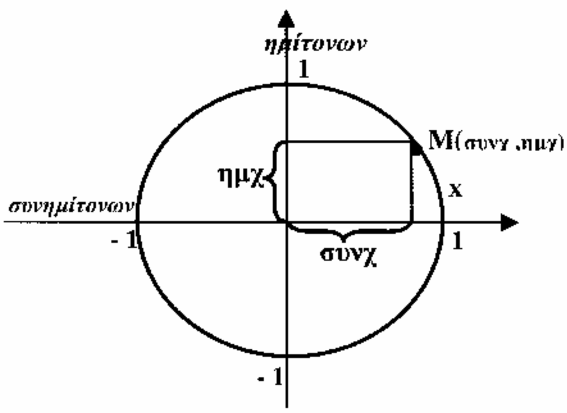
<u>*Ορθογώνιο τρίγωνο*</u>

$$\eta\mu\, B = \frac{\text{απεναντι καθετη}}{\text{υποτεινουσα}} = \frac{(A\Gamma)}{(B\Gamma)} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{προσκειμενη καθετη}}{\text{υποτεινουσα}} = \frac{(AB)}{(B\Gamma)}$$

$$\varepsilon\varphi B = \frac{(A\Gamma)}{(AB)} \quad , \quad \sigma\varphi B = \frac{(AB)}{(A\Gamma)}$$



<u>*Τριγωνομετρικός κύκλος*</u>



$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$

$-1 \leq \sigma\upsilon\nu\, x \leq 1$

$\eta\mu x = 0 \iff x = k\pi , \qquad k \in Z$

$\sigma\upsilon\nu x = 0 \iff x = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$\varepsilon\varphi x = 1 \iff x = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{4}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

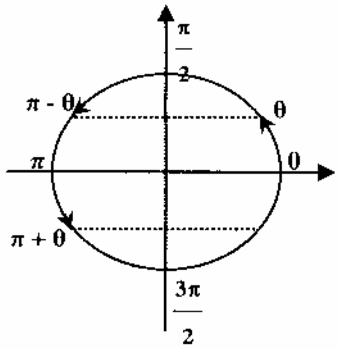
1. $\eta\mu\, x = \eta\mu\, \theta \iff [\, x = 2\kappa\pi + \theta \quad \eta \quad x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta)\,]$

2. $\sigma\upsilon\nu\, x = \sigma\upsilon\nu\, \theta \iff x = 2\kappa\pi \pm \theta$

3. $\varepsilon\varphi\, x = \varepsilon\varphi\, \theta \iff x = \kappa\pi + \theta$

4. $\sigma\varphi\, x = \sigma\varphi\, \theta \iff x = \kappa\pi + \theta \;, \kappa \in Z$

$\eta\mu(-x) = -\eta\mu\, x$	$\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu\, x$
$\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu\, x$	$\sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu\, x$
$\varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x$	$\varepsilon\varphi(\pi + x) = \varepsilon\varphi\, x$
$\eta\mu(\pi/2 - x) = \sigma\upsilon\nu\, x$	$\eta\mu(\pi/2 + x) = \sigma\upsilon\nu x$
$\sigma\upsilon\nu(\pi/2 - x) = \eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu(\pi/2 + x) = -\eta\mu x$
$\varepsilon\varphi(\pi/2 - x) = \sigma\varphi\, x$	$\varepsilon\varphi(\pi/2 + x) = -\sigma\varphi\, x$
$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu\, x$	$\varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi\, x$
$\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu\, x$	$\sigma\varphi(\pi - x) = -\sigma\varphi\, x$



ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$	$\eta\mu(\alpha \pm \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \pm \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$
$\varepsilon\phi x = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$	$\sigma\upsilon\nu(\alpha \pm \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \mp \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$
$\sigma\phi x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$	$\varepsilon\phi(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\varepsilon\phi\alpha \pm \varepsilon\phi\beta}{1 \mp \varepsilon\phi\alpha \cdot \varepsilon\phi\beta}$ $\quad$ $\sigma\phi(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta \mp 1}{\sigma\phi\beta \pm \sigma\phi\alpha}$
$\varepsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1$	$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$ $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$
$1 + \varepsilon\phi^2 x = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\varepsilon\phi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\phi\alpha}{1 - \varepsilon\phi^2\alpha}$
$1 + \sigma\phi^2 x = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$	$\eta\mu 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\phi\alpha}{1 + \varepsilon\phi^2\alpha} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \dfrac{1 - \varepsilon\phi^2\alpha}{1 + \varepsilon\phi^2\alpha}$

$1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$	$\eta\mu A \pm \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A\pm B}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A\mp B}{2}$
$1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\eta\mu^2\alpha$	$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$
$2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)$	$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\cdot\eta\mu\frac{B-A}{2}$
$2\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$	$2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΤΟΞΩΝ

x	0	π / 6	π / 4	π / 3	π / 2	π	3π / 2
ημ x	0	1 / 2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	- 1
συν x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1 / 2	0	- 1	0
εφ x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		0	
σφ x		$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0		0

ΝΟΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΩΝ - ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει : $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}=2R$ **(R:ακτίνα περιγ/ νου)**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει : $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

Καλό Ταξίδι στα γλυκά
σου παραμύθια,
δίχως το ψέμα θα'ταν
μαύρη η αλήθεια...

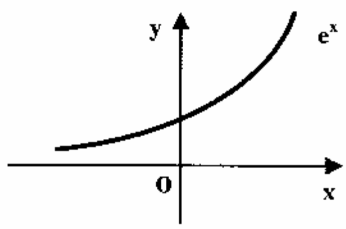
ΠΡΟΟΔΟΣ

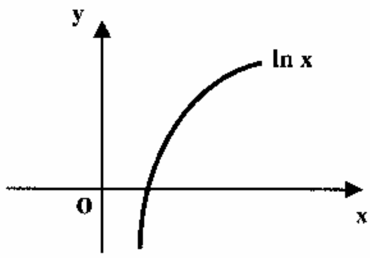
	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
ΟΡΙΣΜΟΣ	$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega \ , \ \forall \nu \in N^*$	$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda \ , \ \forall \nu \in N^*$ $\alpha_1 \ , \ \lambda \neq 0$
ΣΥΝΘΗΚΗ	$2\beta = \alpha + \gamma$ β : αριθμητικός μέσος	$\beta = \sqrt{\alpha \cdot \gamma}$ β : γεωμετρικός μέσος
ν – οστός όρος	$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$	$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu - 1}$
ΑΘΡΟΙΣΜΑ	$\Sigma_\nu = \frac{\nu}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_\nu\right)$	$\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1\left(\lambda^\nu - 1\right)}{\lambda - 1} \ , \ \lambda \neq 1$
ΑΘΡΟΙΣΜΑ	$\Sigma_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right]$	$\Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu \lambda - \alpha_1}{\lambda - 1} \ , \ \lambda \neq 1$ $\Sigma_\nu = \nu \cdot \alpha_1 \ , \ \lambda = 1$
ΑΘΡΟΙΣΜΑ	$\Sigma_\nu = 1 + 2 + \ldots \nu = \frac{\nu(\nu + 1)}{2}$	$\Sigma_\infty = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda} \ , \ \lvert\lambda\rvert < 1$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

- $(x - \rho)$ παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) \Leftrightarrow P(\rho) = 0$
- Η διαίρεση του $P(x)$ με το $(x - \rho)$ δίνει $\upsilon = P(\rho)$

ΕΚΘΕΤΙΚΗ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ





$$\boxed{\ln\theta = x \iff e^x = \theta \quad (\theta>0)}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$\alpha^y = x \iff y = \log_\alpha x$	$\ln 1 = 0 \quad , \quad \ln e = 1$
$\alpha^{\log_\alpha x} = x \overset{\alpha=e}{\Rightarrow} e^{\ln x} = x$	αν $\alpha>1$ τότε : $x>1 \iff \log_\alpha x > 0$ $0<x<1 \iff \log_\alpha x < 0$
$\alpha^x = e^{x\ln\alpha} \quad , \quad x^x = e^{x\ln x}$	
$\log_\alpha 1 = 0 \quad , \quad \log_\alpha \alpha = 1$	αν $0<\alpha<1$ τότε : $x>1 \iff \log_\alpha x < 0$ $0<x<1 \iff \log_\alpha x > 0$
$\log_\alpha(x_1 \cdot x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$	
$\log_\alpha \frac{x_1}{x_2} = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$	$\log_\beta x = \frac{\log_\alpha x}{\log_\alpha \beta}$ και
$\log_\alpha x^\kappa = \kappa \log_\alpha x \quad , \quad \kappa \in R$	για $\alpha = e$ ισχύει : $\log_\beta x = \frac{\ln x}{\ln\beta}$
$\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \iff x_1 = x_2$	$\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \iff x_1 = x_2$

ΝΟΜΟΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ : $Q(t) = Q_0 e^{ct}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

$\left\|\,\|\vec{\alpha}\|-\|\vec{\beta}\|\,\right\| \le \|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\| \le \|\vec{\alpha}\|+\|\vec{\beta}\|$	$1\,\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$	$\lambda(\mu\,\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\,\vec{\alpha}$
$\vec{\alpha}+\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}=-\vec{\alpha}$	$\lambda\,\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow (\lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0})$	
$\lambda(\vec{\alpha}\pm\vec{\beta})=\lambda\,\vec{\alpha}\pm\lambda\,\vec{\beta}$	$(\lambda\,\vec{\alpha}=\lambda\,\vec{\beta}$ και $\lambda\neq 0) \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\vec{\beta}$	
$(\lambda\pm\mu)\,\vec{\alpha}=\lambda\,\vec{\alpha}\pm\mu\,\vec{\alpha}$	$(\lambda\,\vec{\alpha}=\mu\,\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}) \Rightarrow \lambda=\mu$	

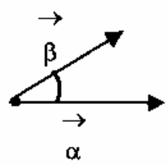
- **Αν** $\vec{\alpha}=(x\,,\,y)$ **τότε το** ***μέτρο*** **του είναι :** $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$
- **Αν** $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ **η** ***απόσταση*** $(AB)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
- **Αν** $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ **τότε** $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1\,,\,y_2-y_1)$
- **Αν** $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ **το** ***μέσο*** **είναι** $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\,\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

- $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\,\vec{\beta}\,,\quad \lambda\in R\,,\ \vec{\beta}\neq\vec{0}$
- $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

$$\boxed{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,\text{συν}\,(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})}$$



ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ

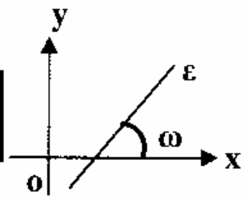
Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$

Στο εσωτερικό γινόμενο δεν εφαρμόζουμε την προσεταιριστική ιδιότητα και την ιδιότητα διαγραφής.

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$	$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$
$(\lambda\,\vec{\alpha})\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,(\lambda\,\vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha}\,\vec{\beta})$ $\lambda \in R$	$\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} = \lvert\vec{\alpha}\rvert^2$
$\vec{\alpha}\,(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$	$\vec{\alpha}\cdot\vec{\nu} = \vec{\alpha}\ \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\,\vec{\nu} = \vec{\nu}\ \pi\rho o\beta_{\vec{\nu}}\,\vec{\alpha}$

ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

- **Η κλίση της ευθείας ε είναι** $\boxed{\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega}$

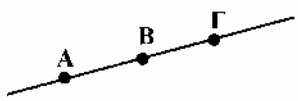


- **Η ευθεία που περνά από το $A(x_o, y_o)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ : $y - y_o = \lambda(x - x_o)$**

- **Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $\lvert A\rvert + \lvert B\rvert \neq 0$ παριστάνει ευθεία**

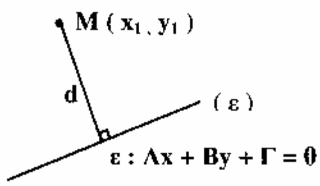
- **Τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι συνευθειακά** αν και μόνο αν: $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma}$

$$\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



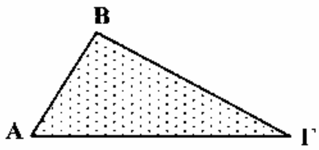
- **Απόσταση σημείου $M(x_1, y_1)$ από την ευθεία : $Ax + By + \Gamma = 0$**

είναι $d = \dfrac{\lvert Ax_1 + By_1 + \Gamma\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$



► Εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$

είναι : $(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right|$

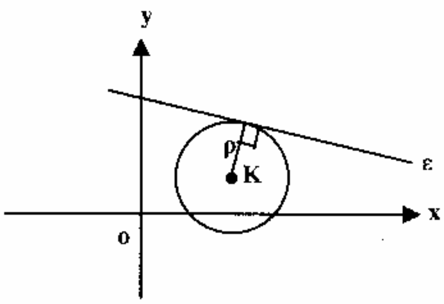


$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

ΚΥΚΛΟΣ

► Εξίσωση κύκλου που έχει κέντρο Κ (α , β) και ακτίνα ρ :
$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$



► Εξίσωση κύκλου με κέντρο Ο (0 , 0) και ακτίνα ρ : $x^2 + y^2 = \rho^2$

Εξίσωση εφαπτόμενης στο $A(x_1, y_1)$: $x x_1 + y y_1 = \rho^2$

► Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο κέντρου $K\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$ και ακτίνας $\rho = \dfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$ αν και μόνο αν : $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

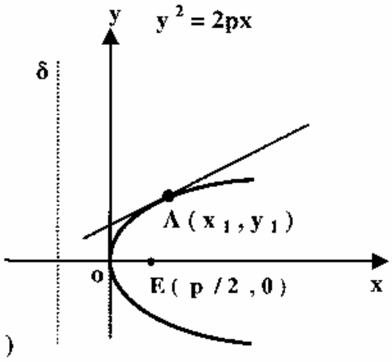
ΠΑΡΑΒΟΛΗ

- Εξίσωση παραβολής $y^2 = 2px$
  $(p > 0)$

  Εστία : $E(p/2, 0)$

  Διευθετούσα δ : $x = -\dfrac{p}{2}$

  Εξίσωση εφαπτόμενης στο $A(x_1, y_1)$
  $yy_1 = p(x + x_1)$

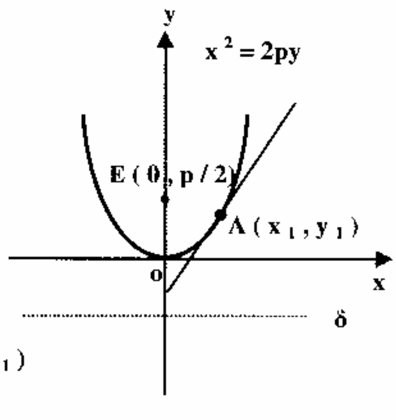


- Εξίσωση παραβολής $x^2 = 2py$
  $(p > 0)$

  Εστία : $E(0, p/2)$

  Διευθετούσα δ : $y = -\dfrac{p}{2}$

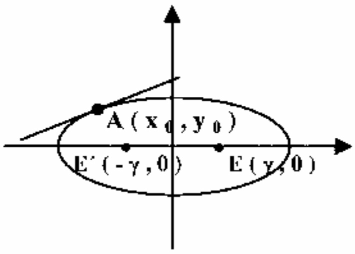
  Εξίσωση εφαπτόμενης στο $A(x_1, y_1)$
  $xx_1 = p(y + y_1)$



Ο έρωτας η δουλειά και η γνώση είναι οι πηγές της ζωής μας, θα μπορούσαν και να την κυβερνούν.

ΕΛΛΕΙΨΗ

- Εξίσωση : $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{\psi^2}{\beta^2}=1$



Εστίες : Ε΄ (- γ , 0) και Ε (γ , 0)

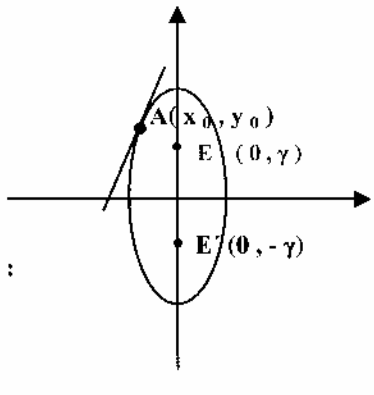
Εξίσωση εφαπτόμενης στο Α (x_0 , y_0) :

$$\frac{xx_0}{\alpha^2}+\frac{\psi\psi_0}{\beta^2}=1$$

$$\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$$

Εκκεντρότητα : $\varepsilon=\dfrac{\gamma}{\alpha}<1$

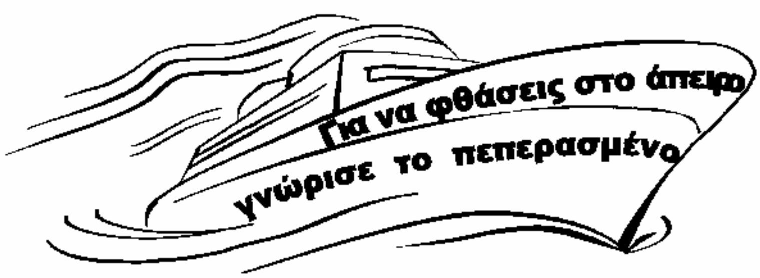
- Εξίσωση : $\dfrac{x^2}{\beta^2}+\dfrac{\psi^2}{\alpha^2}=1$



Εστίες : Ε΄ (0, - γ) και Ε (0 , γ)

Εξίσωση εφαπτόμενης στο Α (x_0 , y_0) :

$$\frac{xx_0}{\beta^2}+\frac{\psi\psi_0}{\alpha^2}=1$$



ΥΠΕΡΒΟΛΗ

▶ Εξίσωση: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$

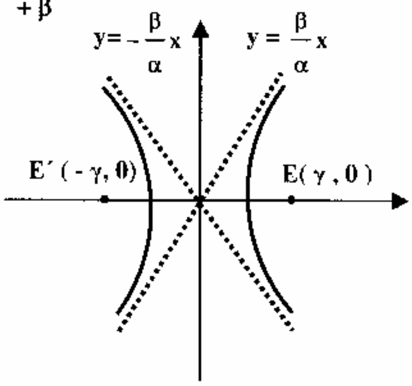
Εστίες: $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$

Ασύμπτωτες: $y = \frac{\beta}{\alpha}x$, $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$

Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$

Εξίσωση εφαπτόμενης στο (x_0, y_0) :

$$\frac{xx_0}{\alpha^2} - \frac{\psi\psi_0}{\beta^2} = 1$$



▶ Εξίσωση : $\frac{\psi^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$

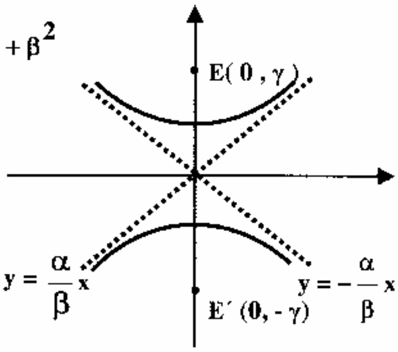
Εστίες : $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$

Ασύμπτωτες : $y = \frac{\alpha}{\beta}x$, $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$

Εκκεντρότητα : $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$

Εξίσωση εφαπτόμενης στο (x_0, y_0) :

$$\frac{\psi\psi_0}{\alpha^2} - \frac{xx_0}{\beta^2} = 1$$



Ισοσκελής λέγεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$ ή $y^2 - x^2 = \alpha^2$ (αν $\alpha = \beta$)

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Έστω P_ν ένας ισχυρισμός που αναφέρεται στους θετικούς ακέραιους.
Αν i) ο ισχυρισμός είναι αληθής για τον ακέραιο 1, δηλαδή ο $P(1)$ είναι αληθής και
ii) η αλήθεια του $P(\nu)$ συνεπάγεται την αλήθεια του $P(\nu+1)$ για κάθε ν τότε ο ισχυρισμός $P(\nu)$ αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους ν.

$$1 + 2 + 3 + \dots\dots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2} \quad \forall \text{ φυσικο } \nu$$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ BERNOULLI
Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, με $-1 < \alpha \neq 0$:
$(1+\alpha)^\nu > 1 + \nu\alpha$, ν θετικός ακέραιος με $\nu \geq 2$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1
Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί κ και υ , τέτοιοι ώστε $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < \beta$

ΓΕΝΙΚΑ

Αν α και β ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ και υ, τέτοιοι ώστε $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, 0 $0 \leq \upsilon < |\beta|$

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ
Έστω α, β δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α και θα γράφουμε β / α , όταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια, δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ , τέτοιος ώστε $\alpha = \kappa\beta$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω α , β , γ ακέραιοι. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

- Αν α / β και β / α , τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$
- Αν α / β και β / γ , τότε α / γ
- Αν α / β , τότε $\alpha / \lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ
- Αν α / β και α / γ , τότε $\alpha / (\beta + \gamma)$
- Αν α / β και $\beta \neq 0$, τότε $|\alpha| \leq |\beta|$

Από τις προηγούμενες ιδιότητες του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ότι :

Αν α / β και α / γ , τότε $\alpha / (\kappa\beta + \lambda\gamma)$ για όλους τους ακέραιους κ και λ

ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ

Ορίζουμε *μέγιστο κοινό διαιρέτη* (Μ . Κ . Δ .) δύο ακέραιων α , β και συμβολίζουμε (α, β) το μεγαλύτερο από τους θετικούς κοινούς διαιρέτες τους.

Ισχύουν οι τύποι : $(\alpha, \beta) = (|\alpha|, |\beta|)$, $(\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon)$ **όπου υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το β με $\alpha , \beta \in N$.**

Αν δ είναι ο Μ . Κ . Δ . των α και β , τότε υπάρχουν ακέραιοι κ και λ, τέτοιοι ώστε $\delta = \kappa\alpha + \lambda\beta$

$(\alpha, \beta) = 1 \Leftrightarrow$ υπάρχουν ακέραιοι κ , λ ώστε $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ

Ορίζουμε *ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο* των ακεραίων α , β και συμβολίζουμε $[\alpha, \beta]$ το μικρότερο από τα θετικά κοινά πολλαπλάσια των α , β .

Ισχύουν οι τύποι : $[\alpha,\beta] = [|\alpha|, |\beta|]$, $(\alpha,\beta)[\alpha,\beta] = \alpha \cdot \beta$ **$\alpha , \beta \in N$.**

Ποια άλλη αλήθεια ,
πιο απροσμέτρητη λεηλασία ,
υπάρχει της απρόσιτης αιωνιότητας
απ΄το τραγούδι

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

- Η f λέγεται *γνησίως αύξουσα* στο A αν για οποιαδήποτε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ενώ *γνησίως φθίνουσα* όταν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- **Μια f λέγεται 1 – 1 αν για οποιαδήποτε** $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ή $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

- **Για τις *αντίστροφες συναρτήσεις* ισχύει :** $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x}$$

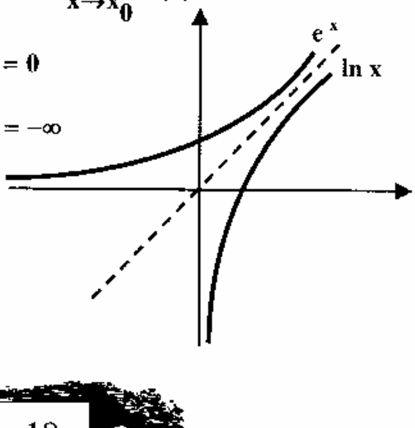
- **<u>Κριτήριο Παρεμβολής</u>**
  Αν κοντά στο x_0 έχουμε $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$
  και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

- **Για κάθε $x \in R$ ισχύει: $|\eta\mu x| \leq |x|$, (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$)**

- **Ισχύει :** $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1}$

- **Η f είναι συνεχής στο x_0 όταν** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$



ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$ όταν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός το όριο του λόγου μεταβολής της f στο x_0 οπότε έχουμε: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

- Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο χ_0 μιας παραγωγίσιμης f είναι : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$\lambda_\varepsilon = f'(x_0)$$

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α τότε είναι και συνεχής στο α .

- Η παράγωγος της σύνθεσης $f \circ g$ γίνεται με το τύπο $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ η με το κανόνα αλυσίδας έχουμε ότι $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}$ είναι $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx}$

- Ρυθμός μεταβολής του μεγέθους α ως προς το β είναι η παράγωγος του α ως προς το β δηλαδή $\alpha'(\beta) = \dfrac{d\alpha}{d\beta}$

- Κανόνας De l' Hospital $\left(\dfrac{0}{0} \text{ η } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

- Η y =λx+κ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f αν $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (\lambda x + k)] = 0$

$$\lambda = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$k = \lim_{x \to \infty} [f(x) - \lambda x]$$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ - ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

$(x)' = 1$ και $(c)' = 0$	$\int c\,dx = cx + c_1$
$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ $\left((f(x))^{\alpha}\right)' = \alpha\left(f(x)\right)^{\alpha-1} \cdot f'(x)$	$\int x^{\kappa}\,dx = \dfrac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1} + c$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sqrt{f(x)})' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$	$\int \kappa\left[f(x)\right]^{\kappa-1} f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]^{\kappa} + c$
$(\eta\mu\, x)' = \sigma\upsilon\nu\, x$ $(\eta\mu\, f(x))' = \sigma\upsilon\nu\, f(x) \cdot f'(x)$	$\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + c$ $\int \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)\,dx = \sqrt{f(x)} + c$
$(\sigma\upsilon\nu\, x)' = -\eta\mu\, x$ $(\sigma\upsilon\nu\, f(x))' = -\eta\mu\, f(x) \cdot f'(x)$	$\int \sigma\upsilon\nu\, x\,dx = \eta\mu\, x + c$ $\int \sigma\upsilon\nu\, f(x) \cdot f'(x)\,dx = \eta\mu\, f(x) + c$
$(\varepsilon\varphi\, x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$ $(\varepsilon\varphi\, f(x))' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \cdot f'(x)$	$\int \eta\mu\, x\,dx = -\sigma\upsilon\nu\, x + c$ $\int \eta\mu\, f(x) \cdot f'(x)\,dx = -\sigma\upsilon\nu\, f(x) + c$
$(\sigma\varphi\, x)' = \dfrac{-1}{\eta\mu^2 x}$ $(\sigma\varphi\, f(x))' = \dfrac{-1}{\eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x)$	$\int \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \varepsilon\varphi\, x + c$ $\int \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \varepsilon\varphi\, f(x) + c$

$(e^x)' = e^x$ $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}\,dx = -\sigma\phi\, x + c$ $\int \frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x)\,dx = -\sigma\phi\, f(x) + c$
$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$ $(\alpha^{f(x)})' = \alpha^{f(x)} \ln\alpha \cdot f'(x)$	$\int e^x\,dx = e^x + c$ $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$	$\int \alpha^x \ln\alpha\,dx = \alpha^x + c$ $\int \alpha^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln\alpha\,dx = \alpha^{f(x)} + c$
$(\log_\alpha x)' = \frac{1}{x\ln\alpha}$ $(\log_\alpha f(x))' = \frac{1}{f(x)\ln\alpha} \cdot f'(x)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$ $\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f$$

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

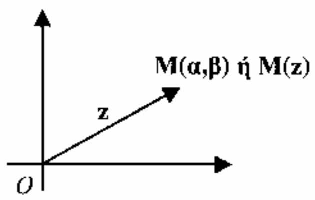
$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$$

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

Το σύνολο C μιγαδικών αριθμών είναι υπερσύνολο του R στο οποίο:

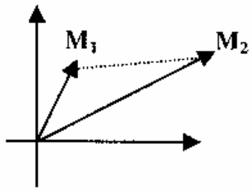
1. Επεκτείνονται οι πράξεις πρόσθεσης και πολ/σμού.
2. Υπάρχει ένα στοιχείο i ώστε $i^2 = -1$
3. Κάθε στοιχείο του z γράφεται μοναδικά $z = \alpha + \beta i \quad \alpha, \beta \in R$



$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow (\alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta)$$

$$|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

► Το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους : $|z_1 - z_2| = d(M_1, M_2)$



Γενικά η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$ παριστάνει κύκλο.

Αν $z = \alpha + \beta i \quad \alpha, \beta \in R$ *, τότε ισχύουν :*

1. $Z + \overline{Z} = 2\alpha$
2. $Z\overline{Z} = \alpha^2 + \beta^2$
3. $Z - \overline{Z} = 2\beta i$
4. $|Z|^2 = Z\overline{Z}$
5. $\left(\overline{\overline{Z}}\right) = Z$
6. $|Z| = |\overline{Z}| = |-Z| = |\overline{-Z}|$
7. $\begin{cases} \overline{Z} = Z \Leftrightarrow Z \in R \\ \overline{Z} = -Z \Leftrightarrow Z \in I \end{cases}$

Για τους Z_1 , Z_2 ...... $Z\nu \in \mathbb{C}$ ισχύουν :

1. $\overline{Z_1 + Z_2 + ... Z_\nu} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2} + ... + \overline{Z_\nu}$

2. $|Z_1 Z_2 ..... Z_\nu| = |Z_1||Z_2|.....|Z_\nu|$

3. $||Z_1| - |Z_2|| \le |Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$

4. $\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)} = \dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$

5. $\overline{Z_1 \cdot Z_2 .... Z_\nu} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2} .... \overline{Z_\nu}$

6. $\overline{(Z^\nu)} = \overline{(Z)}^\nu$

Αν $z = \alpha + \beta i$ και $\sigma\upsilon\nu\,\theta = \dfrac{\alpha}{\rho}$, $\eta\mu\,\theta = \dfrac{\beta}{\rho}$, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

τότε $z = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\,\theta + i\,\eta\mu\,\theta)$

$$Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 - \theta_2 = 2\kappa\pi \end{cases} \quad \kappa \in Z$$

Αν $Z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\,\theta_1 + i\,\eta\mu\,\theta_1)$ και $Z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\,\theta_2 + i\,\eta\mu\,\theta_2)$ τότε :

1. $Z_1 \cdot Z_2 = \rho_1 \rho_2 \left[\sigma\upsilon\nu\,(\theta_1 + \theta_2) + i\,\eta\mu\,(\theta_1 + \theta_2)\right]$

2. $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\left[\sigma\upsilon\nu\,(\theta_1 - \theta_2) + i\,\eta\mu\,(\theta_1 - \theta_2)\right]$

3. $Z_1^\nu = \rho_1^\nu \left[\sigma\upsilon\nu\,(\nu\theta_1) + i\,\eta\mu\,(\nu\theta_1)\right]$ (**Θεώρημα De Moivre**)

<u>*ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΟΥ i*</u>

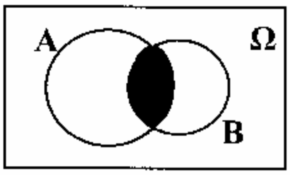
$i^{4\nu} = 1$, $i^{4\nu+1} = i$, $i^{4\nu+2} = -1$, $i^{4\nu+3} = -i$

$Z^\nu = \alpha \Rightarrow Z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\dfrac{\phi + 2\kappa\pi}{\nu} + i\,\eta\mu\dfrac{\phi + 2\kappa\pi}{\nu}\right]$, όπου

$\rho = |\alpha|$, φ ένα όρισμα του α και $\kappa = 0, 1, 2, 3 ...., \nu - 1$

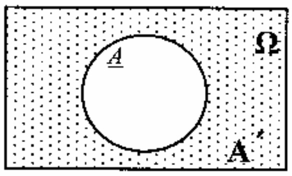
ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ : $A \cap B$
Ενδεχόμενο Α και Β
Το **$A \cap B$** *πραγματοποιείται όταν*
πραγματοποιούνται συγχρόνως το Α και το Β



ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ : $A \cup B$
Ενδεχόμενο Α ή Β
Το **$A \cup B$** *πραγματοποιείται όταν*
πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α , Β

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ : A'
Ενδεχόμενο όχι Α ή αντίθετο ή
Συμπληρωματικό του Α .
Το Α΄ πραγματοποιείται όταν δεν
πραγματοποιείται το Α .



ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ : $A - B$ η $A \cap B'$
Διαφορά του Β από το Α
Πραγματοποιείται το Α και όχι το Β

► **Αν $A \cap B = \varnothing$ τοτε Α , Β ασυμβιβαστα**

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων .

Σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε ένα πραγματικό

αριθμό που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ έτσι ώστε να ισχύουν : $0 \le P(\omega_i) \le 1$ και $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_\nu) = 1$.

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Ως πιθανότητα ενός μη κενού ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\kappa\}$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \ldots + P(\alpha_\kappa)$ το οποίο συμβολίζουμε με $P(A)$. Ακόμη ορίζουμε : $P(\varnothing) = 0$

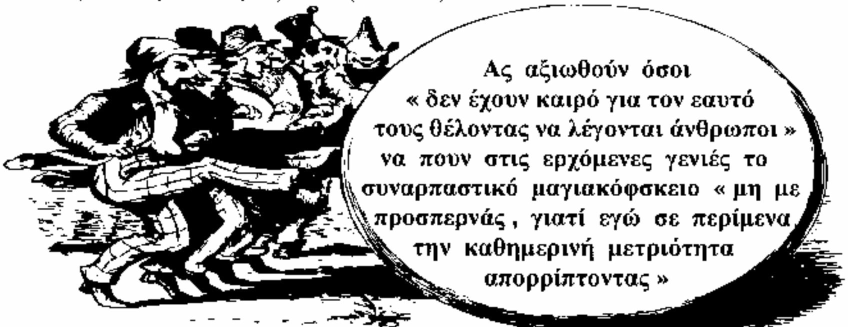
Προφανώς $P(\Omega) = 1$

ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{πλήθος ευνοικών περιπτώσεων του } A}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων του πειραματος}}$$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

- Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε :
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ
- Αν A , A' συμπληρωματικά ($A \cup A' = \Omega$) τότε
  $P(A') = 1 - P(A)$
- Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \le P(B)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σχετική Συχνότητα : $f_i = \dfrac{v_i}{v}$, $0 \le f_i \le 1$, $f_1 + f_2 + ... + f_k = 1$

Αθροιστική Συχνότητα : $N_i = v_1 + v_2 + ... + v_i = N_{i-1} + v_i$

Αθροιστική Σχετική Συχνότητα : $F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i = F_{i-1} + f_i$

$\alpha_i = v_i \dfrac{360^\circ}{v} = 360^\circ f_i$, α_i τόξο τμήματος σε κυκλικό διάγραμμα

Μέση Τιμή : $\bar{x} = \dfrac{1}{v} \sum\limits_{i=1}^{\kappa} v_i x_i$, v_i η συχνότητα του x_i

Σταθμικός Μέσος : $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{v} w_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{v} w_i}$, w_i ο συντελεστής βαρύτητας του x_i

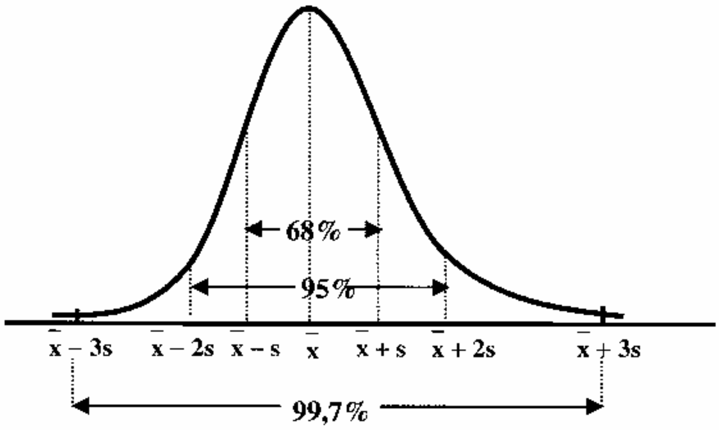
Διακύμανση : $S^2 = \dfrac{1}{v} \sum\limits_{i=1}^{\kappa} v_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2$ ή

$$S^2 = \frac{1}{v}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2 - \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i \right)^2 \right)$$

Τυπική Απόκλιση : $S = \sqrt{S^2}$

Συντελεστής Μεταβολής : $CV = \dfrac{S}{|\bar{x}|}$, αν $CV \le 10\ \%$ τότε ομοιογενές

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ



i) Αν $y = \alpha x$ τότε $\bar{y} = \alpha \bar{x}$ και $S_y = |\alpha| S_x$

ii) Αν $y = x + \beta$ τότε $\bar{y} = \bar{x} + \beta$ και $S_y = S_x$

Γραμμική Παλινδρόμηση του y πάνω στο x :

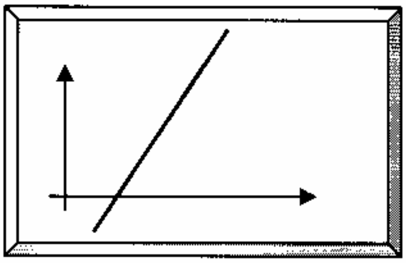
$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$, όπου $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$ και $\hat{\beta} = \dfrac{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \sum_{i=1}^{\nu} x_i \sum_{i=1}^{\nu} y_i}{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}$

Η ευθεία $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$ *διέρχεται από το σημείο* $(\bar{x}, \bar{y})$

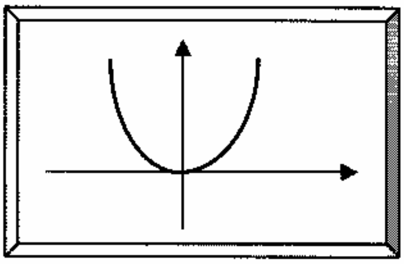
Το $\hat{\beta}$ είναι η μεταβολή του $\hat{y}$ όταν το x αυξηθεί κατά 1 μονάδα.

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

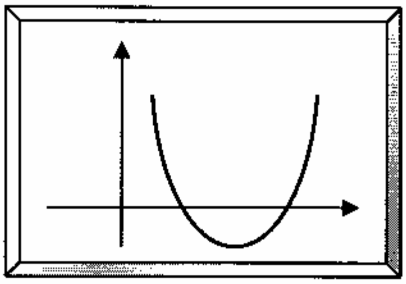
Ευθεία $f(x) = \alpha x+\beta$



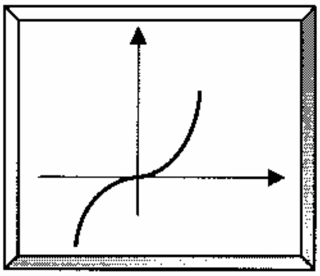
Παραβολή $f(x) = \alpha x^2$



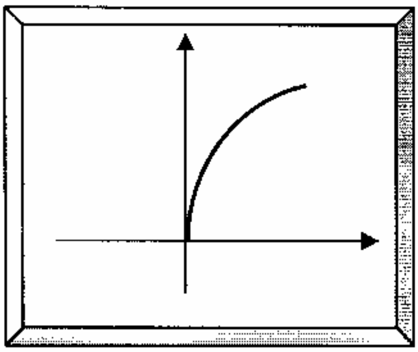
Παραβολή $f(x) = \alpha x^2 +\beta x+\gamma$
(Τριώνυμο)



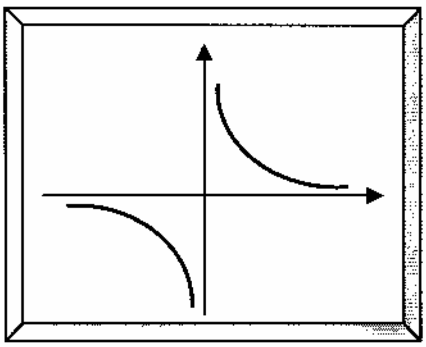
$f(x) = \alpha x^3$



$f(x) = \sqrt{x}$

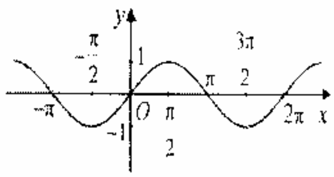


$f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$ *(Υπερβολή)*

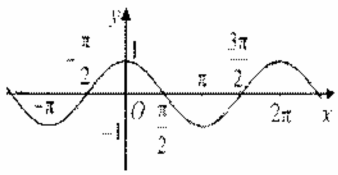


Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$f(\chi) = \eta\mu\chi$

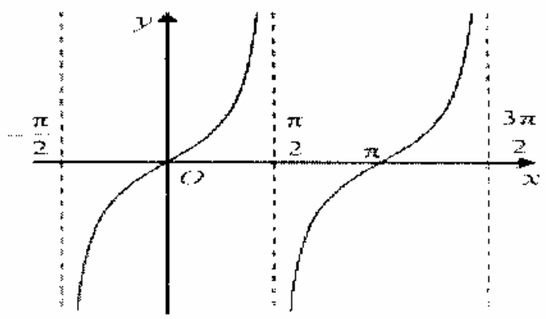


$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$



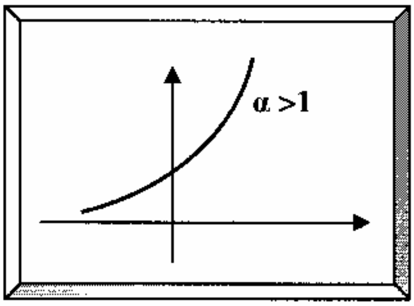
$$\mathbf{A = R \quad \kappa\alpha\iota \quad f(A) = [-1,1]}$$

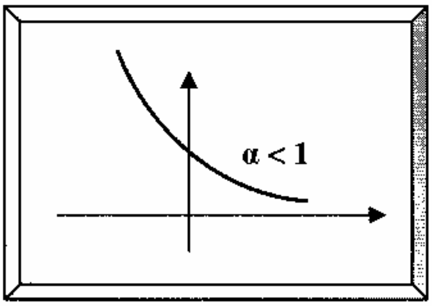
$f(x) = \varepsilon\varphi x$



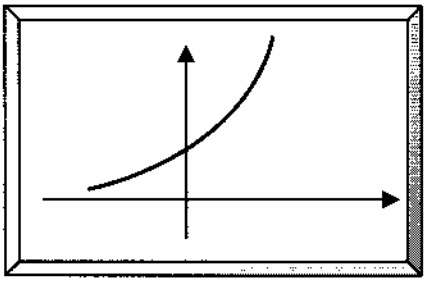
$$\mathbf{A = R - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\} \quad \kappa\alpha\iota \quad f(A) = R}$$

Εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$

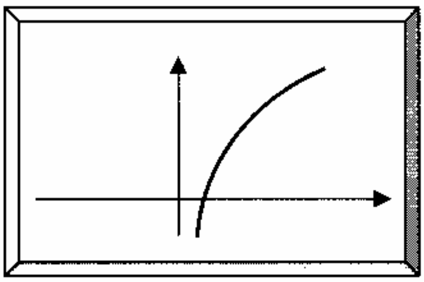




$f(x) = e^x$



$f(x) = lnx$



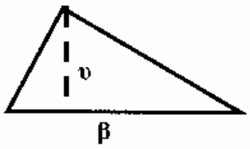
$A=R$ και $f(A) = (0, +\infty)$

$A=(0, +\infty)$ και $f(A) = R$

*Ο χρόνος έγινε για να κυλάει
οι έρωτες για να τελειώνουν
η ζωή για να πηγαίνει στο διάολο
κι εγώ για να διασχίζω το "Άπειρο"
με το μεγάλο διασκελισμό ενός
μαθηματικού υπολογισμού*

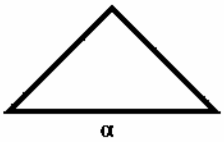
ΤΥΠΟΙ
Εμβαδόν - Όγκος

- **Τρίγωνο**



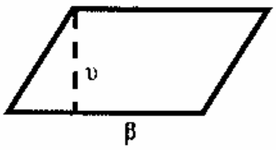
$$E = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon$$

- **Ισόπλευρο τρίγωνο**



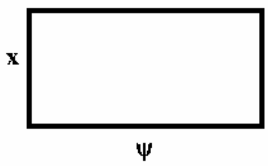
$$E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

- **Παραλ/μο**



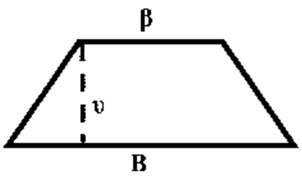
$$E = \beta \cdot \upsilon$$

- **Ορθογώνιο**



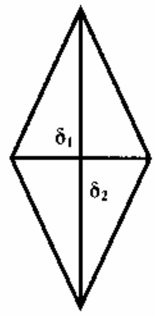
$$E = x \cdot \psi$$

- **Τραπέζιο**



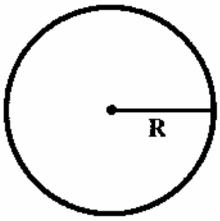
$$E = \frac{B+\beta}{2} \cdot \upsilon$$

- **Ρόμβος**



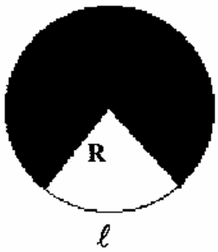
$$E = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2$$

- **Κύκλος**



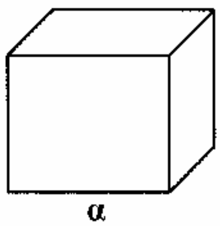
$$E = \pi R^2$$
$$L = 2\pi R$$

- **Κυκλικός τομέας**



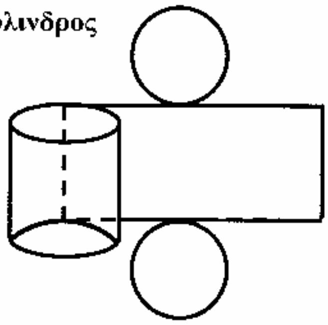
$$E = \frac{1}{2}\ell \cdot R$$
$$\ell = R \cdot \theta \quad \theta(\text{rad})$$
$$E = \frac{\pi R^2 \theta}{360^\circ} \quad \theta(\text{μοιρες})$$

- **Κύβος**



$$E = 6\alpha^2$$
$$V = \alpha^3$$

Κύλινδρος

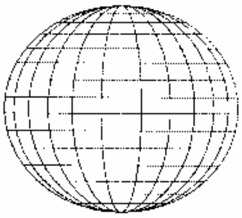


$E_\pi = 2\pi\rho \cdot \upsilon$ (παραπλευρη επιφανεια)

$E_{o\lambda} = 2E_\beta + E_\pi = 2\pi\rho^2 + 2\pi\rho \cdot \upsilon$

$V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon$

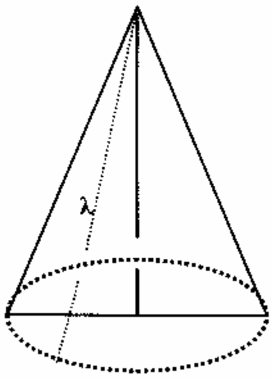
Σφαίρα



$E = 4\pi\rho^2$

$V = \frac{4}{3}\pi\rho^3$

Κώνος



$E_\pi = \pi\rho\lambda$, λ γενετειρα του κωνου

$E_{o\lambda} = \pi\rho^2 + \pi\rho\lambda$

$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 \cdot \upsilon$