Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης**,

Ημερομηνία: **2 Ιουνίου 2014**

**Απαντήσεις Θεμάτων**

**Θέμα Α**

**Α1.** Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **251**

**Α2.** Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **273**

**Α3.** Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **259**

**Α4. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Σωστό, δ. Σωστό, ε. Λάθος**

**Θέμα B**

**Β1.** Θέτουμε: 𝑧 = 𝑥 + 𝑦𝑖 τότε θα έχουμε:

2|𝑧|2 + (𝑧 + 𝑧̅)𝑖 − 4 − 2𝑖 = 0

⇔ 2(𝑥2 + 𝑦2) + 2𝑥𝑦𝑖 − 4 − 2𝑖 = 0

⇔ 𝑥2 + 𝑦2 + 𝑥𝑖 − 2 − 𝑖 = 0

⇔ 𝑥2 + 𝑦2 + 𝑥𝑖 = 2 + 𝑖 

Επομένως, οι λύσεις είναι οι μιγαδικοί: 𝑧1 = 1 + 𝑖, 𝑧2 = 1 − 𝑖.

**Β2.** Έχουμε: 

**Β3.** Είναι :

|𝑢 + 𝑤| = |4𝑧1 − 𝑧2 − 𝑖|

⇔ |𝑢 − 3𝑖| = |4 + 4𝑖 − 1 + 𝑖 − 𝑖|

⇔ |𝑢 − 3𝑖| = |3 + 4𝑖|

⇔ |𝑢 − (0 + 3𝑖)| = 5

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών 𝑢 είναι ο κύκλος κέντρου 𝛫(0,3) και ακτίνας 𝜌 = 5 .

**Θέμα Γ**

**Γ1.** Η ℎ είναι παραγωγίσιμη στο ℝ 

για κάθε 𝑥 ∈ ℝ επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ άρα και συνάρτηση 1 − 1

Η h′ είναι παραγωγίσιμη στο ℝ 𝜅𝛼𝜄 𝜂  για κάθε 𝑥 ∈ ℝ.

Επομένως η ℎ είναι κοίλη στο ℝ.

**Γ2.**

Έχουμε: 

Επειδή η ℎ είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ ισοδύναμα προκύπτει:

2ℎ′(𝑥) < 1 ⇔ ℎ′(𝑥) < ℎ′(0) ⇔ 𝑥 > 0

διότι η ℎ′ είναι γνησίως φθίνουσα, αφού η ℎ είναι κοίλη στο ℝ.

**Γ3.**

Είναι  Θέτω , εφαρμόζοντας τον κανόνα 𝐷𝑙′𝐻.

Άρα το ζητούμενο όριο είναι το: 

Επομένως η οριζόντια ασύμπτωτη της 𝐶ℎ στο +∞ είναι η ευθεία 𝑦 = 0 .

Για την πλάγια ασύμπτωτη (𝜀): 𝑦 = 𝜆𝑥 + 𝛽 έχουμε:

Άρα 𝜆 = 1 , εφαρμόζοντας τον κανόνα 𝐷𝐿𝐻 .

Επίσης 

Θέτουμε 𝑢 = 𝑒x ,  , οπότε το όριο γίνεται: 

άρα 𝛽 = 0 . Τελικά η ευθεία με εξίσωση 𝑦 = 𝜆𝑥 + 𝛽 ⇔ 𝑦 = 𝑥 είναι η πλάγια ασύμπτωτη της 𝐶ℎ στο −∞.

**Γ4.** Βρίσκουμε τα σημεία τομής της 𝜑(𝑥) με τον άξονα 𝑥’𝑥. Είναι:

𝜑(𝑥) = 0 ⇔ ℎ(𝑥) + 𝑙𝑛2 = 0 ⇔ ℎ(𝑥) = −ln2 ⇔ ℎ(𝑥) = ℎ(0) ⇔ 𝑥 = 0 αφού η ℎ 𝜀ίναι 1 − 1.



και επειδή  έχουμε: 









 𝜏. 𝜇.

**Θέμα Δ**

**Δ1.** Είναι  χρησιμοποιώντας κανόνα 𝐷. 𝑙′𝐻.

Επομένως η 𝑓 είναι συνεχής στο 𝑥 = 0.

Η 𝑓 είναι παραγωγίσιμη στο ℝ∗ με: 

Θεωρούμε τη συνάρτηση: 𝑔(𝑥) = 𝑥𝑒x− 𝑒x + 1, 𝑥 ∈ ℝ.

Η 𝑔 είναι παραγωγίσιμη στο ℝ με: 𝑔′(𝑥) = 𝑥𝑒x

Θέτουμε: 𝑔′(𝑥) = 0 ⟺ 𝑥 = 0 και 𝑔′(𝑥) > 0 ⟺ 𝑥𝑒x > 0 ⟺ 𝑥 > 0. Έτσι κατασκευάζουμε τον πίνακα: 

Για κάθε 𝑥 ∈ ℝ ισχύει: 𝑔(𝑥) ≥ 𝑔(0) ⟺ 𝑔(𝑥) ≥ 0 με τη ισότητα να ισχύει για 𝑥 = 0.

Συνεπώς: 𝑓′(𝑥) > 0 για κάθε 𝑥 ≠ 0 και αφού 𝑓 είναι συνεχής στο 𝑥 = 0,

η 𝑓 είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ.

**Δ2α.** Έστω η συνάρτηση , 𝑥 ∈ ℝ

Η ℎ είναι παραγωγίσιμη με ℎ′(𝑥) = 𝑓(𝑥) > 0, 𝑥 ∈ ℝ.

Πράγματι, για 𝑥 > 0 είναι: 𝑒x − 1 > 0 οπότε: 𝑓(𝑥) > 0,

για 𝑥 < 0 είναι: 𝑒x − 1 < 0 οπότε: 𝑓(𝑥) > 0 και αφού 𝑓(0) = 1 > 0 ισχύει: 𝑓(𝑥) > 0 για κάθε 𝑥 ∈ ℝ.

Επομένως, η ℎ είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ.

Επίσης, για το 𝑓′(0) έχουμε: 

χρησιμοποιώντας κανόνα Dl’H.

Η εξίσωση γίνεται: ℎ(2𝑓′(𝑥)) = 0 ⇔ ℎ(2𝑓′(𝑥)) = ℎ(1) ⇔ 2𝑓′(𝑥) = 1 ⇔ 

⇔ 𝑓′(𝑥) = 𝑓′(0) ⇔ 𝑥 = 0, αφού η ℎ και η 𝑓′ είναι «1-1».

**β.** Για την τεταγμένη 𝑦(𝑡) του σημείου 𝛭 ισχύει: 

Δηλαδή: 𝑦(𝑡) = 𝑓(𝑥(𝑡)) και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως σύνθεση

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με: 

Ζητούνται τα σημεία για τα οποία: 𝑦′(𝑡) =

*,* αφού 𝑓′ έχει την ιδιότητα 1-1.

Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το 𝛭(0,1).

**Δ3**. 𝑔(𝑥) = (𝑒x − 1 + 1 − 𝑒)2(𝑥 − 2)2 , 𝑥 > 0 .

𝑔(𝑥) = (𝑒x − 𝑒)2(𝑥 − 2)2 , 𝑥 > 0 .

Η 𝑔 είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με

𝑔′(𝑥) = 2(𝑒x − 𝑒)𝑒x (𝑥 − 2)2 + (𝑒x − 𝑒)22(𝑥 − 2)

𝑔′(𝑥) = 2(𝑒x − 𝑒)(𝑥 − 2)[𝑒x (𝑥 − 2) + 𝑒x − 𝑒]

𝑔′(𝑥) = 2(𝑒x − 𝑒)(𝑥 − 2)(𝑥𝑒x − 𝑒x − 𝑒).

Θεωρούμε τη συνάρτηση 𝛫(𝑥) = 𝑥𝑒x − 𝑒x − 𝑒, με 𝑥 > 0

Η 𝛫 είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞):

𝛫′(𝑥) = 𝑒x + 𝑥𝑒x − 𝑒x = 𝑥𝑒x > 0 , για κάθε 𝑥 θετικό

άρα η 𝛫(𝑥)είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞) .

Παρατηρούμε ότι: 

Επειδή 𝛫 συνεχής στο [1,2] , από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον 𝜌 ∈ (1,2)

τέτοιο ώστε 𝛫(𝜌) = 0 και η 𝛫(𝑥) γνησίως μονότονη επομένως ⇔ 𝑓′(𝑥) = 𝑓′(0)

η εξίσωση 𝛫(𝑥) = 0 έχει μοναδική ρίζα την 𝑥 = 𝜌.

Για 1 < 𝑥 < 𝜌 ισχύει: 𝛫(𝑥) < 𝛫(𝜌) ⇔ 𝐾(𝑥) < 0

Για 𝜌 < 𝑥 < 2 ισχύει: 𝛫(𝑥) > 𝛫(𝜌) ⇔ 𝐾(𝑥) > 0

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:



Ο πίνακας μεταβολών της 𝑔 είναι:



Η 𝑔 είναι γνησίως αύξουσα στα [1, 𝜌] και [2, +∞) και γνησίως φθίνουσα στα (0,1] και [𝜌, 2].

Η 𝑔 παρουσιάζει για 𝑥 = 1 και 𝑥 = 2 τοπικό ελάχιστο τα 𝑔(1) και 𝑔(2) αντίστοιχα.

Η 𝑔 παρουσιάζει για 𝑥 = 𝜌 τοπικό μέγιστο το 𝑔(𝜌).

*Επιμέλεια: Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Μάριος Παπαδιαμαντής,*

*Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Ηρώ Μαρκάκη*