

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΡΟΛΟΥ ΤΟΥ ΑΝΟΙΧΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γιώργος Κόσσυβας

Τα τελευταία χρόνια παρατηρούμε να αναπτύσσεται σε πολλές χώρες ολοένα και εντονότερο ερευνητικό ενδιαφέρον για τα ανοιχτά προβλήματα. Όμως ποια θα πρέπει να είναι η θέση του προβλήματος στο πλαίσιο των σχολικών γνώσεων;

Τα ανοιχτά προβλήματα που επεξεργάστηκαν οι ερευνητές μαθηματικοί κατά τις διάφορες ιστορικές εποχές συνδέονται με το πολιτισμικό και κοινωνικο-οικονομικό πλαίσιο της εποχής τους, το οποίο μπορεί να διαφέρει από αυτό που βιώνουν οι μαθητές. Θα μεταφέρουμε αυτούσια τα προβλήματα τα οποία απασχόλησαν τους ερευνητές και θα τα μετατρέψουμε σε διδακτικό περιεχόμενο; Όλα τα προβλήματα είναι ίδια; Τι είναι ανοιχτό πρόβλημα και ποιες είναι οι δυνατότητές του; Πώς μπορεί να γίνεται η έρευνα του ανοιχτού προβλήματος στις συνθήκες της σχολικής τάξης και ποιες δυσκολίες παρουσιάζονται; Αυτά είναι ορισμένα από τα ερωτήματα θα οποία θα επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε στην παρούσα εργασία μας.

1. Κατηγοριοποίηση των προβλημάτων

Για να μπορέσουμε να καταλάβουμε καλύτερα το ρόλο των προβλημάτων θα επιχειρήσουμε να τα ταξινομήσουμε με κριτήριο τους επιδιωκόμενους μαθησιακούς στόχους. Η κατηγοριοποίηση βοηθάει τον εκπαιδευτικό να εντοπίσει τις κατηγορίες προβλημάτων από τις οποίες αναδύονται ιδιαίτερα γνωρίσματα και να επιλέξει τις πιο πρόσφορες παιδαγωγικές δραστηριότητες. Διακρίνουμε τις παρακάτω κατηγορίες:

- Προβλήματα που προορίζονται να εμπλέξουν τα παιδιά στην **κατασκευή ή ανακάλυψη νέων γνώσεων ή εννοιών (καταστάσεις-προβλήματα)**. Οι προτεινόμενες καταστάσεις μπορεί να είναι ζωντανές (πραγματικές τις οποίες θέτει η πραγματικότητα της τάξης και το περιβάλλον των παιδιών), ή να είναι τεχνητές, κατασκευασμένες από τον εκπαιδευτικό, οι οποίες όμως λειτουργούν σε ένα πρόσφορο παιδαγωγικό πλαίσιο. Τα διαθέσιμα μέσα αποσκοπούν να δώσουν νόημα στην κατάσταση και τα παιδιά καλούνται να πάρουν ενεργό μέρος, να ανακαλέσουν στη μνήμη τους γνώσεις και τεχνικές που ήδη έχουν αποκτήσει, να μεταφράσουν τη λεκτική διατύπωση με μαθηματικούς όρους, να βρουν ή να δημιουργήσουν το υπονοούμενο εργαλείο για να επιλύσουν το πρόβλημα. Η νέα γνώση την οποία θα πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές παίρνει νόημα όταν είναι το πιο κατάλληλο και αποτελεσματικό εργαλείο για την επίλυση του προβλήματος¹. Η κατάσταση θα πρέπει να είναι αρκετά πλούσια ώστε οι πρώτες προσπάθειες να μη καταλήγουν άμεσα στη λύση και να δίνουν τη δυνατότητα να γίνουν επαναλαμβανόμενες εικασίες, δοκιμές και επαληθεύσεις πριν από τη φάση της διατύπωσης και της απόδειξης. Ο μαθητής θα πρέπει να μπορεί να εμπλέκεται σε μια δραστηριότητα κατά τρόπο αυτόνομο, να μπορεί να ξεκινήσει μόνος, να εξετάζει τις δυνατές απαντήσεις, να δίνει νόημα στη δική του εμπλοκή. Ακόμα η κατάσταση θα πρέπει να δίνει δυνατότητες αυτοδιόρθωσης, δηλαδή να επιτρέπει στο μαθητή να αποφασίσει εάν η λύση που βρίσκει είναι σωστή ή όχι. Μπορεί τέλος μέσα από το διάλογο που αναμένεται να καρποφορήσει να συνειδητοποιήσει τις ανεπάρκειες των προηγούμενων γνώσεων.

- **Προβλήματα ή ασκήσεις εφαρμογής**. Τα παιδιά καλούνται να επαναλάβουν αποκτημένες γνώσεις με στόχο την εμπέδωση, τη συστηματική κατάκτηση και ίσως την καλύτερη κατανόηση των γνώσεων αυτών. Τις περισσότερες φορές στην κατηγορία αυτή εντάσσονται τεχνικές εκμάθησης αλγορίθμων, καθώς και εξάσκηση σε υπολογιστικές δεξιότητες. Στις περιπτώσεις αυτές η γνώση λειτουργεί ως αντικείμενο μελέτης που η σκοπιμότητα της μπορεί να μην είναι άμεσα ορατή από τα παιδιά. Όταν τα παιδιά δεν βλέπουν ότι αυτές οι δραστηριότητες αποτελούν εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων, υπάρχει ένα πρόβλημα συνοχής. Τα παιδιά μπορεί να επιδεικνύουν μεγάλες ικανότητες απομνημόνευσης όμως αυτή η δραστηριότητα παραμένει άδεια από σημασία.

- Προβλήματα που αποσκοπούν στην επέκταση του πεδίου χρησιμοποίησης μιας διδαγμένης έννοιας (**προβλήματα μεταφοράς**). Τα παιδιά θα πρέπει ξεκινήσουν από την αναγνώριση του

τύπου του προβλήματος που τίθεται, στη συνέχεια να ανακαλέσουν κατάλληλες γνώσεις οι οποίες συνδέονται με τις σχέσεις που περιγράφονται στην εκφώνηση και να επανεπενδύσουν τις γνώσεις αυτές στο συγκεκριμένο πλαίσιο. Η επίλυση προβλημάτων μεταφοράς είναι δύσκολη υπόθεση για τα παιδιά². Συνήθως τα αντιμετωπίζουν ως εξολοκλήρου νέα προβλήματα και προσπαθούν να ανακατασκευάσουν την απαραίτητη γνώση εστιάζοντας την προσοχή τους σε επιφανειακές ενδείξεις και όχι σε βαθιές ενδείξεις οι οποίες θα τους επέτρεπαν να αναγνωρίσουν μια διαδικασία επίλυσης την οποία ήδη έχουν συναντήσει μέσα σε κάποιο άλλο πλαίσιο.

-Προβλήματα πιο πολύπλοκα στα οποία τα παιδιά θα πρέπει να συνδυάσουν πολλές κατηγορίες γνώσεων (**προβλήματα σύνθεσης ή ολοκλήρωσης**). Τα σύνθετα προβλήματα δεν έχουν γενικούς κανόνες επίλυσης. Η ικανότητα του λύτη βελτιώνεται με την απόκτηση εμπειρίας και με τη συνεχή τριβή και εξοικείωση με τα προβλήματα αυτού του είδους.

-**Προβλήματα μοντελοποίησης**, τα οποία αποσκοπούν στη μαθηματικοποίηση μιας συγκεκριμένης κατάστασης, ή ενός πραγματικού προβλήματος. Τις περισσότερες φορές η μοντελοποίηση αποσκοπεί στην επίλυση προβλημάτων της οικονομίας, της τεχνολογίας ή της ζωής των ενηλίκων τα οποία προτείνονται ως έτοιμο μοντέλο και δεν αποτελούν προβληματικές καταστάσεις για τα παιδιά. Αν τα προβλήματα αυτά είναι δύσκολα και ξένα προς τις εμπειρίες και τα ενδιαφέροντα των παιδιών, είναι δύσκολο να τα αισθανθούν ως δικά τους προβλήματα και να εμπλακούν στην επίλυσή τους. Τότε απλώς τα κοιτάζουν αδιάφορα και τα προσπερνούν.

-Προβλήματα που αποσκοπούν στην αποκάλυψη του βαθμού και του τρόπου κατάκτησης των γνώσεων (**προβλήματα παιδαγωγικής αξιολόγησης**). Αυτά εντάσσονται σχεδόν εξολοκλήρου στη δεύτερη κατηγορία.

-Προβλήματα που προορίζονται να θέσουν το μαθητή σε κατάσταση έρευνας και αναπτύξουν στο παιδί ικανότητες μεθοδολογίας (**ανοιχτά προβλήματα**).

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ο παραπάνω κατάλογος είναι μόνο ενδεικτικός γιατί είναι αδύνατο να κατηγοριοποιηθούν όλα τα προβλήματα. Επίσης ένα πρόβλημα ανάλογα με τη χρονική στιγμή που προτείνεται και τις προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών μπορεί να ενταχθεί σε περισσότερες από μια κατηγορίες, που σημαίνει ότι τα όρια ταξινόμησης είναι ασαφή.

2. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά ενός ανοιχτού προβλήματος

Ο εισαγωγή του όρου “ανοιχτό πρόβλημα” ξεκίνησε από μια ομάδα του IREM de Lyon η οποία μελέτησε προβλήματα που απευθύνονται σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου και αποσκοπούν στην καλλιέργεια ερευνητικής στάσης και ικανοτήτων επιστημονικής μεθοδολογίας. Μια επιστημονική έρευνα αναπτύσσει σύνθετες μεθοδολογικές ικανότητες όπως είναι η διατύπωση των υποθέσεων εργασίας, η προετοιμασία του πειραματικού ή ερευνητικού σχεδίου, η επιλογή του δείγματος, η κατασκευή των εργαλείων αξιολόγησης και η ανάλυση και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Ορισμένες από αυτές τις ικανότητες εμφανίζονται αμυδρά σε κάθε ανοιχτό πρόβλημα.

Σύμφωνα με την ομάδα του IREM de Lyon το ανοιχτό πρόβλημα έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά³:

1. Η εκφώνηση του προβλήματος συνήθως είναι σύντομη και διατυπώνεται σε καθημερινή ή σε μαθηματική γλώσσα. Η απλή και σύντομη εκφώνηση ευνοεί τη γρήγορη ανάγνωση και κατανόηση και δημιουργεί διευκολυντικές προϋποθέσεις ως προς το φορτίο το οποίο θα διατηρηθεί στη μνήμη⁴ και ως προς το χειρισμό των δεδομένων. Επιπλέον μπορεί να δώσει την εντύπωση ότι το πρόβλημα είναι εύκολο και να μολιάσει τα παιδιά με την επιθυμία καταπιεστούν μ' αυτό.

2. Η εκφώνηση είναι ανοιχτή⁵ και δεν “προδίδει” άμεσα τη λύση ούτε το μαθηματικό εργαλείο που θα χρησιμοποιηθεί (δεν υπάρχουν ερωτήσεις του τύπου “να αποδείξετε ότι” ούτε ενδιάμεσες ερωτήσεις). Σε καμία περίπτωση αυτή η λύση δεν θα πρέπει να περιορίζεται στην απλή χρήση ή στην άμεση εφαρμογή συμπερασμάτων ή κανόνων που παρουσιάστηκαν στα τελευταία μαθήματα, γιατί τότε θα αποτελεί πρόβλημα άμεσης εφαρμογής και όχι ανοιχτό πρόβλημα. Θα πρέπει δηλαδή να καλύπτει ένα ευρύ φάσμα ιδεών από απλούς εμπειρικούς συλλογισμούς ως σύνθετους παραγωγικούς συλλογισμούς που δεν απαιτούν κάποιες ειδικές γνώσεις⁶. Ο μαθητής επιδεικνύοντας φαντασία και ευρηματικότητα καλείται να ακολουθήσει έναν επιστημονικό δρόμο: ξεκινά ψάχνοντας και κάνοντας δοκιμές για να δημιουργήσει μια πρόταση λύσης (ανί-

χνευση μιας εικασίας), επαληθεύει ή διαψεύδει την εικασία του ξαναδοκιμάζοντας (επαλήθευση) και στο τέλος μετά την ανακάλυψη της λύσης (ή των λύσεων) αποδεικνύει την ισχύ της υπόθεσης (απόδειξη). Το ανοιχτό πρόβλημα μπορεί να οδηγήσει σε πολλά και διαφορετικά αποτελέσματα ή να έχει μια λύση η οποία να επιδέχεται πολλαπλές προσεγγίσεις λύσεων (τρόπους επίλυσης). Αυτό όμως που έχει πρωταρχική σημασία είναι ότι από τον τρόπο με τον οποίο τίθεται η εκφώνηση του ανοιχτού προβλήματος δεν προκύπτει άμεσα η μέθοδος και η λύση. Ακόμα με κατάλληλη επιλογή των δεδομένων μπορεί το πρόβλημα να υποβάλλει περισσότερες στρατηγικές επίλυσης και να συμπαρασύρει τους πιο αδύνατους μαθητές να το επιλύσουν με απλούς τρόπους.

3. Το ανοιχτό πρόβλημα θα πρέπει να βασίζεται σε έννοιες με τις οποίες τα παιδιά είναι αρκετά εξοικειωμένα. Αυτό είναι απαραίτητο ώστε τα παιδιά, μέσα στο πλαίσιο των συνηθισμένων περιορισμών του σχολικού ωραρίου, να μπορούν να υπολογίζουν αποτελέσματα ή να παράγουν ιδέες μέσα σε λογικό χρονικό διάστημα. Μπορεί το πρόβλημα να είναι ανοιχτό, όμως ο χρόνος έρευνας δυστυχώς παραμένει κλειστός. Μέσα σ' αυτές τις συνθήκες τα παιδιά θα πρέπει να μπορούν να κατακτήσουν εύκολα την κατάσταση και να πάρουν μέρος σε δοκιμές, εικασίες, δρόμους συνανίχνευσης, σχέδια επίλυσης και αντιπαραδείγματα τα οποία στοχεύουν στην ανακάλυψη και δημιουργία της λύσης ή των λύσεων του ανοιχτού προβλήματος.

Δραστηριότητες ανοιχτών προβλημάτων έχουν προταθεί σε νέα αναλυτικά προγράμματα προσχολικής αγωγής⁷ και πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης⁸ στη Γαλλία καθώς και σε έρευνες ακόμα και στο χώρο της ειδικής αγωγής⁹ στην ίδια χώρα. Ανάλογο ενδιαφέρον αναπτύσσεται στην Ελβετία¹⁰.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στη χώρα μας τα ανοιχτά προβλήματα έχουν πολύ περιορισμένη θέση στα διδακτικά εγχειρίδια που προορίζονται για τους μαθητές. Δίνεται προτεραιότητα σε προβλήματα της καθημερινής ζωής και ασκήσεις εμπέδωσης και όχι σε ασυνήθιστα προβλήματα τα οποία εμπεριέχουν τόσο δυσκολίες κατανόησης οι οποίες σχετίζονται με τον ειδικό χαρακτήρα τους όσο και δυσκολίες χειρισμού τους στην τάξη. Γι αυτό και οι εκπαιδευτικοί συνήθως αποφεύγουν να καταγίνονται με τέτοια προβλήματα. Όμως θα άξιζε τον κόπο να ζωογονηθεί το ενδιαφέρον για αυτά τα προβλήματα.

3. Γιατί να θέτουμε ανοιχτά προβλήματα στην τάξη

Από την παραπάνω κατηγοριοποίηση ξεχωρίζει ο πρωτότυπος χαρακτήρας του ανοιχτού προβλήματος. Όλοι οι άλλοι τύποι προβλημάτων επικεντρώνονται στην απόκτηση και την επεξεργασία μαθηματικών εννοιών. Κατά την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων το παιδί επαναβιώνει οικείες προβληματικές καταστάσεις με ασυνήθιστο τρόπο και αναπτύσσει μια συμπεριφορά έρευνας και ικανότητες μεθοδολογικού χαρακτήρα: ανιχνεύει το παιδί εναλλακτικούς τρόπους λύσης, διατυπώνει αληθοφανείς εικασίες και υποθέσεις, δοκιμάζει ένα σύνολο δυνατών ιδεών, αποδεικνύει την ισχύ τους, ανάγει το αρχικό πρόβλημα σε ανάλογα βοηθητικά προβλήματα, επιχειρηματολογεί, αιτιολογεί, ελέγχει... Πιο αναλυτικά το ανοιχτό πρόβλημα, εφόσον ληφθεί μέριμνα για την κατάλληλη διαχείριση της τάξης από τον εκπαιδευτικό, παρουσιάζει τις παρακάτω δυνατότητες:

1. Το ανοιχτό πρόβλημα παραπέμπει σε μια διαφορετική φιλοσοφία για το τι είναι τα μαθηματικά και σε μια εναλλακτική πρόταση για τη διδασκαλία τους. Τα παιδιά, καθώς καταγίνονται με ανοιχτά προβλήματα, αρχίζουν να **αμφισβητούν τον ωφελμιστικό προσανατολισμό των μαθηματικών** προς τις πρακτικές εφαρμογές να προτιμούν ανοιχτά προβλήματα όχι μόνο επειδή είναι χρήσιμα εργαλεία σε όλους τους τομείς της κοινωνικής ζωής, αλλά ακόμα επειδή ανακαλύπτουν σ' αυτά μια ξεχωριστή ομορφιά και τους βοηθούν να σκέπτονται και όχι να παπαγαλίζουν. Και είναι ολοφάνερο ότι ζούμε σε μια εποχή, στην οποία η εκπραγματίωση των πάντων έχει οδηγήσει στον εξοστρακισμό της αισθητικής, στη συρρίκνωση της κριτικής σκέψης και στη χειραγώγηση του ανθρώπινου πνεύματος.

2. Το ανοιχτό πρόβλημα δεν παθητικοποιεί τη σκέψη του μαθητή, επειδή ενεργοποιεί όλο το νοητικό του δυναμικό. Ακόμα αναπτύσσει το είδος εκείνο της σκέψης το οποίο στην Ψυχολογία αποκαλείται **δημιουργική σκέψη**. Στην επιστημονική έκρηξη της εποχής μας το σχολείο αναλώνεται άσκοπα να προσφέρει όλο και περισσότερες γνώσεις, ωθώντας τους μαθητές σε μια ατέρμονη αποστήθιση και αφήνοντας μόνο μια φευγαλέα γεύση της ουσίας, ενώ συστηματικά παραμένει εχθρικό στην ανάπτυξη της προσωπικής πρωτοβουλίας, της εφευρετικότητας και της δημιουργικότητας του μαθητή¹¹. Η καλλιέργεια της δημιουργικής σκέψης στοχεύει στην ανάπτυξη του μαθητή της ικανότητας να λύνει προβλήματα και να μαθαίνει "πώς να μαθαίνει". Με την πρα-

κτική των ανοιχτών προβλημάτων οι μαθητές παίρνουν αποφάσεις και κατασκευάζουν μόνοι τους τα μαθηματικά εργαλεία που χρειάζονται και ακόμα εθίζονται αντί να αναπαραγάγουν έτοιμες γνώσεις, να παίρνουν ενεργό μέρος στην πρωτότυπη ανακάλυψη και την αυτόνομη παραγωγή της γνώσης.

3. Οι ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις ξεχωρίζουν από άλλες τυπικές μαθηματικές δραστηριότητες και βοηθούν ώστε η διδασκαλία να γίνει βιωματική και επικοινωνιακή¹². Τα παιδιά βιώνουν οικείες και γνώριμες καταστάσεις της πραγματικής ζωής με μη οικείο τρόπο, **ξαναβιώνουν ασυνήθιστα το συνηθισμένο**, διαρρηγνύουν το τείχος της αβάσταχτης καθημερινής ρουτίνας και αφυπνίζονται. Έτσι μπορούν να “αποστασιοποιηθούν” από τη σχολική ρουτίνα τους, όπως στο μπρεχτικό θέατρο ο θεατής βοηθιέται να παρακολουθεί “καθημερινά γεγονότα με κριτικό και ερευνητικό μάτι”. Η ασυνήθιστη επαναβίωση του συνηθισμένου είναι μια άσκηση της ελευθερίας και της δημιουργικότητας, μια ενεργός υπέρβαση της μονότονης πραγματικότητας που απελευθερώνει τις κριτικές τους δυνατότητες και συμβάλλει στη βαθύτερη κατανόηση.

4. Το ανοιχτό πρόβλημα επιτρέπει να προτείνουμε μια δραστηριότητα η οποία μάλλον είναι πρωτόφαντη στα μάτια του παιδιού και γι αυτό είναι **συγκρίσιμη με αυτή του μαθηματικού**, ο οποίος βρέθηκε κάποτε αντιμέτωπος με την επίλυση ανάλογων προβλημάτων τα οποία δεν είχε μάθει να λύνει. Ανάλογη σύγκριση μπορεί να γίνει και στις καταστάσεις-προβλήματα με τη διαφορά όμως ότι με αφορμή ένα ειδικό πρόβλημα γίνεται η επεξεργασία μιας γνώσης γενικότερης εμβέλειας, η οποία θα πρέπει να επισημοποιηθεί, να αναγνωριστεί κοινωνικά και να κατακτηθεί από όλους τους μαθητές¹³. Δεν έχει σημασία αν το θέμα που πραγματεύονται τα παιδιά έχει ήδη ερευνηθεί από ειδικούς επιστήμονες, σημασία έχει ότι οι ίδιοι οι μαθητές χρησιμοποιώντας τα αυθεντικά μέσα που διαθέτουν γίνονται ερευνητές προβλημάτων. Μπορούμε να διαπιστώσουμε μια αναλογία ανάμεσα στην πρόοδο της επιστήμης και στη μαθησιακή πρόοδο του παιδιού: όπως οι νέες επιστημονικές γνώσεις αντιτίθενται σ’ αυτές που έχουν γίνει στείρες και τις εκτοπίζουν, κατ’ ανάλογο τρόπο το παιδί που μαθαίνει θα πρέπει με τη βοήθεια του δασκάλου να διακρίνει τις αντιφάσεις και τα λάθη του, να κάνει εννοιολογικές υπερβάσεις και να ξεπερνά μαθησιακά εμπόδια¹⁴.

5. Το ανοιχτό πρόβλημα αναπτύσσει στο μαθητή μια **ερευνητική στάση, μια συμπεριφορά ερευνητή**¹⁵ και επιτρέπει να δώσουμε έμφαση πάνω σε **ειδικούς στόχους μεθοδολογικού χαρακτήρα**. Το παιδί μπορεί να υποψιάζεται προσεγγίσεις λύσεων, να διερευνά διάφορες πτυχές, να ψαχουλεύει και να δοκιμάζει ποικίλους χειρισμούς των δεδομένων ενώ δεν έχει κάποιο έτοιμο εργαλείο, να παίρνει αποφάσεις, να οργανώνει μεθόδους, να κτίζει υποθέσεις και να εμπλέκεται στην επαλήθευσή τους, να εφαρμόζει μια πρωτότυπη λύση και να επαληθεύει την αποτελεσματικότητά της, να παίρνει μέρος σε καταστάσεις αντιπαράστασης και επικοινωνίας με τους συμμαθητές του, να διατυπώσει επιχειρήματα υπέρ της μιας ή της άλλης λύσης, να αποδεικνύει μια εικασία, να αλλάζει μέθοδο επιδεικνύοντας ευελιξία, να γίνεται υπεύθυνος στην εργασία του... Ο μαθητής συμπεριφέρεται ως ενεργητικός λύτης που κάνει αναδρομές ξαναδιαβάζοντας πιο προσεκτικά το πρόβλημα, ανακαλύπτει βαθύτερες δομές και κανονικότητες, εξερευνά νέες ιδέες και νέα παράγωγα προβλήματα που γεννιούνται¹⁶, με δυο λόγια γίνεται ένας μικρός ερευνητής.

6. Το ανοιχτό πρόβλημα δίνει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να **διαπιστώσει και να αναδείξει τις διαφορές ανάμεσα στους μαθητές** (εννοείται όχι για να τους ταξινομήσει και να τους ιεραρχήσει, αλλά για να κατανοήσει τις ιδιαιτερότητές τους). Εάν η εκφώνηση είναι ίδια για όλους τους μαθητές, οι χρησιμοποιούμενες στρατηγικές μπορεί να ποικίλουν, τα λάθη που διαπράττουν τα παιδιά μπορεί να διαφέρουν, οι διδαγμένες γνώσεις που χρησιμοποιεί κάθε μαθητής μπορεί να ποικίλουν και να αξιοποιούνται με σωστό ή λανθασμένο τρόπο και οι λύσεις μπορεί να είναι διαφορετικές και περισσότερο ή λιγότερο σύντομες και κομψές. Αυτή η ποικιλία είναι πολύ ενδιαφέρουσα και επιτρέπει την αντιπαράθεση ιδεών και μεθόδων και τη συνανίχνευση λύσεων.

7. Το ανοιχτό πρόβλημα επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να κάνει γνωστές τις προσδοκίες του σχετικά με την επίλυση προβλημάτων. Ο μαθητής αντιλαμβάνεται πολύ σύντομα ότι για να λύσει τέτοια προβλήματα είναι αναποτελεσματικό να εφαρμόσει άμεσα τις διδαγμένες γνώσεις του ή να αναζητήσει στην εκφώνηση “λέξεις-κλειδιά” για να μυριστεί τη λύση. Αντίθετα θα πρέπει να ψάξει μόνος του και να πάρει πρωτοβουλίες.

8. Τέλος η ενασχόληση του εκπαιδευτικού με ανοιχτά προβλήματα στην τάξη, έστω και ευκαιριακή (5-6 ανοιχτά προβλήματα το χρόνο), αναδεικνύει την αυθόρμητη συμπεριφορά των παι-

διών και φέρνει στο φως πολύτιμες πληροφορίες πάνω στη **συνηθισμένη πρακτική στην τάξη και το ρόλο που διαδραματίζει το “διδασκτικό συμβόλαιο”**¹⁷. Ο δάσκαλος των μαθηματικών “σπάζοντας” με το ανοιχτό πρόβλημα το “διδασκτικό συμβόλαιο” ανοίγει νέες μαθησιακές δυνατότητες και δίνοντας περισσότερη έμφαση στο μαθητή και όχι στην ύλη βλέπει να αχνοφέγγει ένα ερευνητικό κλίμα στις ομάδες των παιδιών. Ακόμα αν είναι ανοιχτός στις εκπλήξεις μπορεί να κατανοήσει ορισμένες αθέατες πλευρές της διδασκαλίας του, να δει με κριτικό μάτι τον εαυτό του και βελτιώσει την πρακτική του¹⁸.

4. Η παιδαγωγική διαχείριση μιας τάξης ανοιχτού προβλήματος

Ο ορισμός του ανοιχτού προβλήματος όπως τον εκθέσαμε παραπάνω αφορά μόνο το μαθηματικό περιεχόμενο και τον τρόπο με τον οποίο διατυπώνεται η εκφώνηση. Αν περιοριστούμε μόνο σ' αυτά τα χαρακτηριστικά του ανοιχτού προβλήματος κινδυνεύουμε να παραγνωρίσουμε το σημαντικό ρόλο του χειρισμού του ανοιχτού προβλήματος στην τάξη. Είναι πάρα πολύ εύκολο ένα ανοιχτό πρόβλημα, αν χρησιμοποιήσουμε τη μεθοδολογία της συνηθισμένης διδασκαλίας, να μεταπέσει σε κλειστό. Το κύριο μέλημα του δασκάλου των μαθηματικών θα πρέπει να είναι να επαγρυπνά για να κρατήσει ανοιχτή την προβληματική κατάσταση, διατηρώντας ένα σταθερό κλίμα ανοιχτής έρευνας. Μόνο μέσα σ' ένα τέτοιο κλίμα μπορούν δειλά-δειλά να αχνοχαράζουν οι κρυμμένες δημιουργικές ικανότητες των παιδιών. Είναι πάρα πολύ δύσκολο να υιοθετήσει μια στάση που δεν κλείνει την κατάσταση, επειδή αυτή έρχεται σε ρήξη με τη συνηθισμένη πρακτική και μπορεί να δημιουργήσει απρόβλεπτες και ανεξέλεγκτες καταστάσεις: τα παιδιά μπορεί να εκδηλώσουν έκπληξη, αμηχανία και ανασφάλεια και ο εκπαιδευτικός να περιπέσει σε κατάσταση σύγχυσης και ταραχής και να αισθάνεται ανέτοιμος να βοηθήσει στο ξεπέρασμα της κρίσης. Αυτές οι δυσκολίες παρατηρούνται σε κάθε παιδαγωγική καινοτομία και μπορούν να ξεπεραστούν αν ο εκπαιδευτικός είναι ανοιχτός στις εκπλήξεις, στο ξάφνιασμα και στην “περιπέτεια. Ακόμα με την ανάπτυξη εμπειρίας, με τον ενθουσιασμό, με το μεράκι, με την εμπιστοσύνη στις δυνατότητες των μαθητών και την κατάλληλη προετοιμασία του πειραματισμού. Πριν ο εκπαιδευτικός θέσει ανοιχτά προβλήματα τα οποία θα ερευνήσουν οι μαθητές θα πρέπει πρώτα να έχουν αποτελέσει αντικείμενο έρευνας από τον ίδιο.

Η οργάνωση της τάξης σε μικρές ομάδες (με τέσσερα παιδιά περίπου η καθεμιά)¹⁹ παρά τις δυσκολίες και τις αδυναμίες που παρουσιάζει προσφέρει σημαντικά πλεονεκτήματα στην επίλυση των ανοιχτών προβλημάτων. Η συγκρότηση των ομάδων μπορεί να γίνεται αυθόρμητα (ανάλογα με τις συμπάθειες των παιδιών) ή να είναι μεθοδευμένη από τον εκπαιδευτικό. Η παρέμβαση του διδάσκοντος μπορεί να συμβάλλει στο σχηματισμό κατά το δυνατόν ομάδων μη ετερογενών και να αποκλείσει την εμφάνιση ομάδων που είναι “απορριπτόμενες” από τις άλλες ή τη υποχρεωτική συνεύρεση σε μια ομάδα μαθητών που δεν επιθυμούν να είναι μαζί. Κάθε ομάδα μπορεί να επιλέξει το συντονιστή της και απαιτείται η ομάδα να έχει εξασκηθεί αρκετά σε αυτό τον τρόπο εργασίας. Στις ομάδες συλλογικής μάθησης οι συμμετέχοντες δεν αισθάνονται αποξενωμένοι και επιδιώκουν συλλογικά την αναζήτηση της λύσης του ανοιχτού προβλήματος. Μέσα από την πλούσια επικοινωνία ανάμεσα στα μέλη της ομάδας και το ειρηνικό ψάξιμο, τη συνέντευξη και την αυτοδιαχείριση της γνώσης, αλλά και μέσα από τις κοινωνιο-γνωστικές συγκρούσεις και τις διαφωνίες βοηθούνται οι συμμετέχοντες να αποδεχτούν ή να απορρίψουν ιδέες, να αποκτήσουν αυτογνωσία σχετικά με τις ικανότητές τους και να επιτύχουν την απόκτηση γνώσεων μέσω της συνεργασίας και της αλληλεγγύης. Στις ομάδες συλλογικής μάθησης οι συμμετέχοντες αυτοπειθαρχημένοι συσκέπτονται, προγραμματίζουν, παίρνουν αποφάσεις, κατανέμουν τον τρόπο εργασίας τους, δημιουργούν και χαίρονται, κάποτε αποτυγχάνουν και απογοητεύονται, όμως ξαναδοκιμάζουν. Τα μέλη της ομάδας αλληλοεμπλουτίζονται αλληλοκατανοούνται, αλληλομοιράζονται επιτυχίες και αποτυχίες, αλληλοε-νισχύονται και κατακτούν οτιδήποτε μαζί.

Ο δάσκαλος των μαθηματικών είναι διευκολυντής και τεχνικός σύμβουλος του έργου της μάθησης των παιδιών, συντονιστής της συζήτησης και εθελοντικά συρρικνώνει τις επιδράσεις του για να ξεπροβάλει η γόνιμη φαντασία των μαθητών. Αυτά δεν σημαίνουν ότι ο δάσκαλος των μαθηματικών είναι ένας απλός θεατής. Η παρέμβαση του εκπαιδευτικού θα πρέπει να είναι διακριτική και να περιορίζεται σε ενθαρρύνσεις, διευκρινίσεις που αφορούν στην κατανόηση της εκφώνησης αλλά όχι να μεροληπτεί και να επικυρώνει ως καλύτερη ή καταλληλότερη τη μια ή την άλλη στρατηγική που αυθόρμητα επέλεξαν τα παιδιά. Περνάει έμμεσα την ιδέα ότι περιμέ-

νει από όλους τους μαθητές, ότι έχει εμπιστοσύνη στις δυνατότητές τους και με τη στάση του προσπαθεί να περιορίσει τους φόβους και τους δισταγμούς, να ενισχύσει την αυτονομία των μαθητών και να δημιουργήσει μια ατμόσφαιρα ελπίδας και αισιοδοξίας. Καλλιεργεί ένα κλίμα ανοιχτής αναζήτησης, αυτενέργειας, πρωτοβουλιών και πειραματισμών. Προσπαθεί να μη σερβίρει ετοιμοπαράδοτες συνταγές οι οποίες υποχρεώνουν το μαθητή να ακολουθήσει άκαμπτους προκατασκευασμένους δρόμους, αλλά επιμένει να αξιοποιούνται οι προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες των παιδιών στο ξεκαθάρισμα των εννοιών και των σχέσεων ανάμεσα στα δεδομένα και στα ζητούμενα.

Αν ο δάσκαλος των μαθηματικών διαπιστώνει ότι υπάρχει αποτυχία, επισημαίνει τις γνώσεις που θα πρέπει τα παιδιά να πάρουν υπόψη τους, επαναφέρει στο προσκήνιο την αντιπαράσταση των δικών τους ιδεών και κάνει ορισμένες έμμεσες νύξεις ώστε να παροτρύνει τα παιδιά να ξαναδοκιμάσουν. Συγκεντρώνει πληροφορίες για τα λάθη που κάνουν τα παιδιά και για τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούν οι ομάδες στις “διενέξεις” τους.

Η εργασία της τάξης κατά την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων μπορεί να διαχωριστεί σε τέσσερις φάσεις. Αυτές είναι: η παρουσίαση και οικειοποίηση της κατάστασης (με έναρξη της ατομικής έρευνας από τα παιδιά), η συλλογική έρευνα, η ανοιχτή συζήτηση των λύσεων στην ολομέλεια της τάξης και δημιουργική σύνθεση παρόμοιων ανοιχτών προβλημάτων από τα παιδιά (ή προτάσεις συμπληρωματικής εργασίας από τον εκπαιδευτικό). Αυτή η πορεία εργασίας έχει προταθεί από τους Roland Chernay²⁰ και Jean Truchet²¹ και δοκιμάζοντάς την σε μαθητές Δημοτικού σχολείου, του Γυμνασίου και του νηπιαγωγείου²² μας έδωσε χαρά και ικανοποίηση. Αν και είναι πολύ λεπτό ζήτημα να προτείνουμε μια πορεία εργασίας επειδή δεν υπάρχουν έτοιμες συνταγές και ακόμα είναι αδύνατο να ισχύουν οι ίδιες συνθήκες σε κάθε πρόβλημα και σε κάθε επίπεδο τάξης θα επισημάνουμε μερικές γενικές οδηγίες οι οποίες δεν αποτελούν μοντέλο προς μίμηση:

4.1. Η φάση της παρουσίασης και οικειοποίησης της κατάστασης

Πριν από την παρουσίαση του ανοιχτού προβλήματος ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές ορισμένες αρχικές οδηγίες σχετικά με τον τρόπο εργασίας της τάξης. Μπορούν για παράδειγμα να δοθούν οι συνοπτικές οδηγίες: “τα πρώτα 5-10 λεπτά θα εργαστείτε ατομικά, στη συνέχεια όλες οι ομάδες οφείλουν να συντάξουν από μια αφίσα στην οποία θα παρουσιάσουν τα αποτελέσματα που βρήκαν, τις παρατηρήσεις τους και τις ιδέες τους, στο τέλος θα ακολουθήσει κοινή συζήτηση στην ολομέλεια πάνω στο περιεχόμενο των διαφορετικών αφισών”. Αυτές οι εντολές είναι χρήσιμο να γραφτούν στον πίνακα για να μη τις ξεχάσουν. Σημειώνουμε ότι η αφίσα την οποία θα συντάξει κάθε ομάδα των παιδιών είναι ένα μεγάλο κομμάτι χαρτί στο οποίο τα παιδιά θα γράψουν τη λύση του προβλήματος. Το μέγεθος των γραμμάτων θα πρέπει να είναι κατάλληλο ώστε να μπορεί να διαβαστεί με ευχέρεια από όλη την τάξη.

Το πρόβλημα δεν είναι απαραίτητο να παρουσιαστεί με μορφή γραπτής εκφώνησης, μπορεί να διατυπώνεται προφορικά, με ένα ανέκδοτο, ένα γρίφο, μια σαζοκεφαλιά ή με ένα σχέδιο.

Καμιά δυσκολία δεν θα πρέπει να υπάρχει στην **κατανόηση της διδακτικής κατάστασης**. Τα ανοιχτά προβλήματα που θα προτείνουμε θα πρέπει να συγκινούν τα παιδιά και να τους αναπτύσσουν εσωτερικά κίνητρα. Ακόμα θα πρέπει να επινοήσουμε ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, που έχουν σημασία για την καθημερινή εμπειρία των παιδιών, που προκαλούν ζωντανό ενδιαφέρον στα παιδιά, που ξυπνούν την περιέργεια και την επιθυμία των παιδιών για μάθηση. Είναι πολύ χρήσιμο πριν από τη συλλογική αναζήτηση της λύσης κάθε μαθητής να έχει σχηματίσει μια δική του ιδέα πάνω στο πρόβλημα και να έχει προετοιμάσει τις προτάσεις του για την ομαδική επίλυση. Αν δεν προηγηθεί ένα **στάδιο ατομικής έρευνας** ορισμένοι γρήγοροι μαθητές μπορεί να παράγουν ιδέες τη στιγμή που άλλοι δεν έχουν κατανοήσει την εκφώνηση.

Η αναζήτηση δεν θα πρέπει να αρχίζει όταν οι όροι και ο ρόλος του προβλήματος δεν έχουν κατανοηθεί από τους μαθητές. Θα πρέπει να διατεθεί επαρκής χρόνος για την κατανόηση της εκφώνησης. Θα πρέπει να δώσουμε όλες τις απαραίτητες οδηγίες για να φωτίσουμε το πρόβλημα (τα δεδομένα, τα ζητούμενα), να εξηγήσουμε άγνωστες λέξεις να περιορίσουμε τις συγχύσεις και τις παρανοήσεις, αλλά καμιά πληροφορία η οποία μπορεί να σκιαγραφήσει τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Επίσης στην καλύτερη κατανόηση του προβλήματος μπορεί να συμβάλει η αναδιήγηση του από κάποιο μαθητή.

4.2. Η φάση της έρευνας ανήκει στους μαθητές.

Αυτό που έχει σημασία για τους μαθητές δεν είναι να μάθουν τη λύση, αλλά να είναι ικανοί να τη βρουν μόνοι τους με την προσωπική τους δραστηριότητα. Η ανταμοιβή για το πρόβλημα που λύνουν δεν είναι η επίλυση του προβλήματος, αλλά το ότι το έλυσαν με δικά του μέσα, είναι η θετική εικόνα που σχηματίζουν για τον εαυτό τους ότι είναι ικανοί να λύνουν προβλήματα, να δημιουργούν μαθηματικά, να μαθαίνουν²³.

Το κοινό έργο στο οποίο θα πρέπει να καταλήξει η εργασία της ομάδας είναι η **σύνταξη μιας συλλογικής αφίσας**. Κάθε ομάδα είναι επιφορτισμένη με το έργο να διατυπώσει γραπτά την πρόταση λύσης και τα μερικά ή ολικά αποτελέσματα, με γράμματα του κατάλληλου μεγέθους ώστε να μπορούν να διαβαστούν από όλη την τάξη.

Ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να μη κλείσει το ανοιχτό πρόβλημα, να διατηρήσει τη δραστηριότητα της έρευνας, να μη καταργήσει την αυτονομία των μαθητών, γι αυτό αυτοσυγκρατείται και προσφέρει τη μικρότερη δυνατή βοήθεια στους μαθητές. Αν τον ρωτούν να απαντήσει αν ένα αποτέλεσμα είναι σωστό ή λάθος τους προτείνει να θέσουν το θέμα για συζήτηση στην ομάδα. Αν τα παιδιά έχουν μπλοκαριστεί και νιώθουν ανασφάλεια, τα ενθαρρύνει να ξαναδοκιμάσουν. Είναι χρήσιμο να κάνουν έναν απολογισμό της έρευνάς τους και να ξαναβλέπουν τη διαδρομή του έργου τους. Η πλήρης εξάλειψη των παρεμβάσεων είναι πολύ δύσκολη υπόθεση. Ακόμα παρατηρεί τον τρόπο εργασίας των ομάδων, όσο αυτό είναι δυνατό και συγκεντρώνει πληροφορίες για τη συζήτηση με όλες τις ομάδες.

4.3. Η φάση της ανοιχτής συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης

Κάθε ομάδα έχει γράψει τη λύση της πάνω σε μια μεγάλη αφίσα και την τοποθετεί δίπλα από το πίνακα, σε θέση που να είναι εύκολη η ανάγνωσή της από όλη την τάξη. Πριν αρχίσει η συζήτηση στην ολομέλεια πάνω στο περιεχόμενο μιας αφίσας, πρώτα μπορεί να γίνει μια ολιγόλεπτη συζήτηση στις ομάδες και μετά η κάθε ομάδα διατυπώνει γραπτά ή προφορικά την άποψη της (αν συμφωνούν, αν διαφωνούν, αν προτείνουν διορθώσεις και γιατί). Ο μαθηματικός γράφει στον πίνακα τα επιχειρήματα που διατυπώνουν οι εκπρόσωποι των άλλων ομάδων ταξινομώντας τα επιχειρήματα που είναι υπέρ με αυτά που είναι κατά. Στη συνέχεια δίνει το λόγο στην ομάδα που έχει συντάξει την αφίσα για να απαντήσει στην κριτική ή να εκφράσει συμπληρωματικές εξηγήσεις. Τέλος ακολουθεί “διαμάχη” στην ολομέλεια της τάξης πάνω στο περιεχόμενο της πρώτης συλλογικής αφίσας. Το κύριο μέλημά μας είναι να εξασφαλίσουμε καλή ποιότητα συζήτησης και να συμβάλουμε ώστε να περάσουν όλες οι εικασίες από το φως της κριτικής, να γίνει αντιπαράσταση διαφορετικών λύσεων και οι μεν λανθασμένες να διαψευστούν με αντιπαραδείγματα, οι δε σωστές να τεκμηριωθούν με πειστικά αποδεικτικά επιχειρήματα.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να επιτρέψει μια πραγματική ανταλλαγή σκέψεων ανάμεσα στους μαθητές και όχι ανάμεσα στους μαθητές και στον ίδιο. Θα πρέπει να γίνει αντιπαράθεση των λύσεων, συζήτηση, υποστήριξη, απόδειξη και όχι γρήγορη επιλογή και εκτενής παρουσίαση μόνο της “καλής και στερεότυπης λύσης”. Στη συζήτηση αυτή μπορεί να γίνει έλεγχος των αποτελεσμάτων και των στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν, να συγκριθούν οι διάφορες λύσεις και να βρεθεί αυτή που είναι πιο πειστική. Αν όλες οι αφίσες είναι σωστές μπορεί ο εκπαιδευτικός να έχει ετοιμάσει ο ίδιος από πριν μια λανθασμένη αφίσα και να την προτείνει για συζήτηση. Τέλος στην ανοιχτή συζήτηση γίνεται αξιολόγηση της συμμετοχικής και μαθησιακής εμπειρίας από τα ίδια τα παιδιά.

4.4. Η φάση της δημιουργικής σύνθεσης παρόμοιων ανοιχτών

Στη φάση αυτή ο δάσκαλος των μαθηματικών ζητά από τα παιδιά να **διατυπώσουν δικά τους ανοιχτά προβλήματα**, παρόμοια με αυτά που έλυσαν. Αυτό επιτρέπει σε ορισμένους μαθητές να επεξεργαστούν μια ιδέα που άκουσαν ή σκέφτηκαν κατά τη διάρκεια του διαλόγου και να την θέτουν ως νέο ανοιχτό πρόβλημα. Αν τα παιδιά δυσκολεύονται στη σύνθεση των δικών τους προβλημάτων ο εκπαιδευτικός μπορεί να προτείνει ο ίδιος νέα ανοιχτά προβλήματα ως ασκήσεις εμπέδωσης και εφαρμογής. Η διάρκεια και η έκταση αυτής της φάσης ρυθμίζονται από την αξιολόγηση των αποκτημένων γνώσεων. Η ίδια κατάσταση μπορεί να προταθεί εκ

νέου στους μαθητές μετά από την κοινή συζήτηση με άλλους αριθμούς ή με παρόμοια διατύπωση.

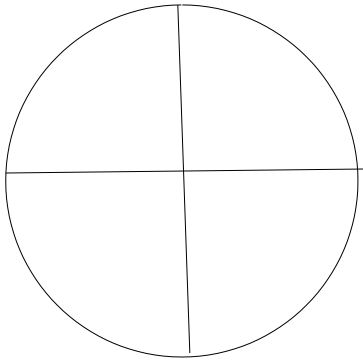
5. Μερικές εκφωνήσεις ανοιχτών προβλημάτων

Τα προβλήματα που προτείνονται στη συνέχεια δεν έχουν δοκιμαστεί όλα στις σχολικές τάξεις. Οι παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι ορισμένα προβλήματα είναι περισσότερο γόνιμα από άλλα. Κάθε πρόβλημα με το οποίο καταγίνονται τα παιδιά αναδεικνύει διαφορετικές διαδικασίες επίλυσης και γενικότερα άλλες όψεις της ερευνητικής δραστηριότητας των παιδιών και διαφορετική ποιότητα διαλόγου. Πριν από τον πειραματισμό ενός προβλήματος είναι πολύ δύσκολο να προβλέψουμε πόσο πλούσιο θα αποδειχθεί στην πράξη.

Οι εκφωνήσεις των παρακάτω προβλημάτων²⁴ θα πρέπει να τροποποιηθούν και να αναμορφωθούν σύμφωνα με τις ειδικές συνθήκες της τάξης στις οποίες θα εφαρμοστούν. Ο τρόπος με τον οποίο τίθεται η εκφώνηση διαδραματίζει πολύ σπουδαίο ρόλο για την έρευνα των μαθητών. Γι αυτό είναι απαραίτητο να προσαρμοστούν από αυτόν που θα τις χρησιμοποιήσει στις συνθήκες της τάξης και στους ιδιαίτερους στόχους του πειραματισμού.

1. Να προσδιορίσετε όλους τους δυνατούς τρόπους για να ανταλλάξετε ένα δεκαχίλιο με χαρτονομίσματα των 500, των 1000 και των 5000 δραχμών.

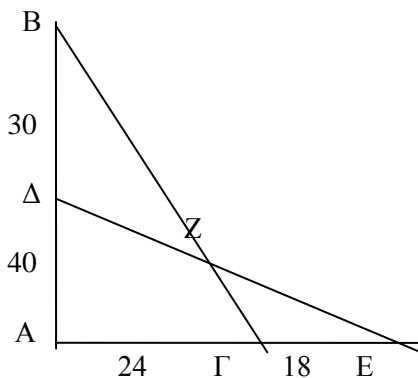
2. Τα μέλη μιας τάξης 23 μαθητών πήραν την απόφαση με τη λήξη του σχολικού έτους να αποχαιρετιστούν με μια χειραψία. Πόσες χειραψίες αντάλλαξαν;



3. Έχουμε έναν κυκλικό δίσκο ο οποίος είναι χωρισμένος σε τέσσερα ίσα κομμάτια και θα πρέπει να τον χρωματίσετε με μπλε, πράσινο ή κόκκινο χρώμα. Να βρείτε όλους τους διαφορετικούς τρόπους χρωματισμού αυτού του κυκλικού δίσκου. Προσοχή κάθε τεταρτοκύκλιο να το χρωματίσετε μόνο με μπλε, πράσινο ή κόκκινο χρώμα.

4. Κάθε μαθητής έχει από ένα κομμάτι σπάγκο μήκους 26 μέτρων και θέλει να κατασκευάσει (ή να σχεδιάσει) ένα ορθογώνιο του οποίου το εμβαδόν να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Ποιες θα είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

5. Τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΓΕΖ έχουν το ίδιο εμβαδόν;

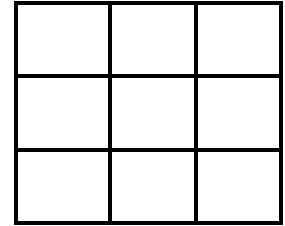


6. Μέσα στον κουμπαρά της τάξης μας υπάρχουν 97 δραχμές σε 32 κέρματα, δίδραχμα και πεντάδραχμα. Πόσα δίδραχμα και πόσα πεντάδραχμα υπάρχουν στον κουμπαρά;

7. Ο αριθμός 19 μπορεί να γραφτεί με πολλούς τρόπους ως άθροισμα ακεραίων. Π.χ. $19=11+3+5$. Να βρείτε ανάμεσα σε αυτά τα αθροίσματα, αυτό του οποίου το γινόμενο των όρων είναι μέγιστο.

8. Χρησιμοποιώντας καθένα από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, και 9 μπορούμε να γράψουμε δύο τετραψήφιους αριθμούς με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα μπορούμε να διαλέξουμε 2435 και 7198 ή ακόμα 9321 και 4758 κλπ. Διαλέξτε τους δύο αριθμούς κατά τέτοιο τρόπο ώστε η διαφορά να είναι η μικρότερη δυνατή. Προσοχή, κάθε ψηφίο θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια μόνο φορά.

9. Ένα τετράγωνο χωρίζεται σε μικρά ίσα τετράγωνα και σχηματίζει πίνακα. Πόσα τετράγωνα υπάρχουν πάνω σε ένα πίνακα 2×2 , σε έναν πίνακα 3×3 , 4×4 και 5×5 ;



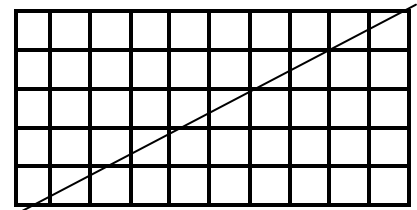
10. Χρησιμοποιώντας τέσσερα τεσσάρια και τα σύμβολα +, -, x, :, $\sqrt{\quad}$, 4! ($4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$), να σχηματίσεις όσο το δυνατόν περισσότερους αριθμούς μπορείς από το 0 ως 100.

11. Έχουμε έναν κύβο ακμής 10 εκατοστών και τον βάφουμε κίτρινο. Τον κόβουμε ανά εκατοστό σε 1000 μικρά κυβάκια. Πόσα θα έχουν 6 κίτρινες έδρες, πόσα 5, 4, 3, 2, 1, καμιά κίτρινη πλευρά;

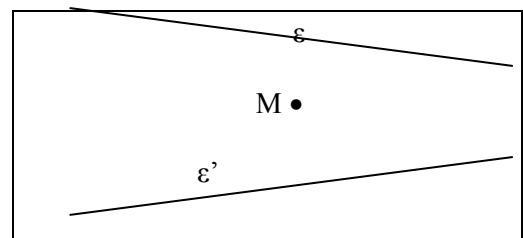
12. Μπορείς να βρεις δύο φυσικούς αριθμούς a και b έτσι ώστε: $\frac{a}{b} = 2,2\bar{8}$... Το ίδιο να κάνεις για τους αριθμούς 3,47..., 6,37..., και 7,137... Μπορείς να βρεις μια γενική μέθοδο για να λύνεις αυτό το είδος προβλημάτων;

13. Διαθέτουμε 6000 δραχμές για αγορά αναψυκτικών. Πόσες λεμονάδες και πόσες πορτοκαλάδες μπορούμε να αγοράσουμε αν κάθε λεμονάδα κοστίζει 300 δραχμές και κάθε πορτοκαλάδα 400 δραχμές. Να βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους.

14. Έχουμε ένα ορθογώνιο διαστάσεων μ και ν χωρισμένο σε τετραγώνια. Μπορούμε να προσδιορίσουμε ως συνάρτηση των μ και ν τον αριθμό των τετραγώνων τα οποία διασχίζει η διαγώνιος ενός ορθογωνίου;



15. Σε ένα φύλλο σχεδίασης έχουμε χαράξει δύο ευθείες ε και ε' και έχουμε σημειώσει ένα σημείο M . Αυτές οι ευθείες τέμνονται στο εξωτερικό του φύλλου σχεδίασης σε ένα σημείο O . Να βρεις μια μέθοδο με την οποία να μπορείς να χαράξεις την ευθεία OM χωρίς να βγεις έξω από το φύλλο σχεδίασης.



16. Σε ένα φύλλο σχεδίασης έχουμε χαράξει δύο ευθείες ε και ε' οι οποίες τέμνονται στο εξωτερικό του φύλλου σχεδίασης σε ένα σημείο O . (το σχήμα είναι ίδιο με το προηγούμενο ανοιχτό πρόβλημα). Να βρεις μια μέθοδο με την οποία να μπορούμε να χαράξουμε τη διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζουν οι ε και ε' χωρίς να βγεις έξω από το φύλλο σχεδίασης.

17. Έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$). Από τυχόν σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε καθέτους στις πλευρές AB και $A\Gamma$, οι οποίες τις τέμνουν στα σημεία K και Λ αντίστοιχα. Πού θα πρέπει να τοποθετήσουμε ένα σημείο Δ πάνω στην υποτείνουσα του τριγώνου $AB\Gamma$ έτσι ώστε το μήκος του $K\Lambda$ να είναι όσο το δυνατό μικρότερο.

18. Δίνεται σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$. Να εξεταστεί αν υπάρχει σημείο M της $B\Gamma$ ώστε το τρίγωνο να χωρίζεται σε δύο ίσα τρίγωνα.

6. Δυσκολίες κατά το χειρισμό των ανοιχτών προβλημάτων στην τάξη

Πολλές δυσκολίες ανακύπτουν κατά το χειρισμό των ανοιχτών προβλημάτων στην αίθουσα διδασκαλίας. Θα αναφέρουμε ορισμένες από αυτές:

Ο διαφορετικός χαρακτήρας του ανοιχτού προβλήματος μπορεί να δημιουργεί ορισμένες ειδικές δυσκολίες. Από την εκφώνηση δεν προκύπτει ούτε η μέθοδος ούτε η λύση. Το ανοιχτό πρόβλημα μπορεί να οδηγεί σε πολλές και διαφορετικές λύσεις οι οποίες είναι όλες σωστές ή να έχει μια λύση η οποία όμως να μπορεί να προσεγγιστεί με πολλούς τρόπους. Αυτές οι ιδιαιτερότητες εμποδίζουν τα παιδιά να βρουν την κατάλληλη πρώτη “φαινή ιδέα” για το ξεκίνημα, να επισημασούν τις αποκτημένες γνώσεις τους, να διατυπώσουν υποθέσεις και να τις επαληθεύσουν κλπ. Ίσως θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι υπάρχει **ένας φόβος μπροστά στην ελευθερία**²⁵, μπροστά στο άγνωστο, στο χάος, στην ανοιχτή θάλασσα, που κάνουν το μαθητή να πελαγώνει. Όμως αυτό είναι και το πλεονέκτημα που ξεχωρίζει τα ανοιχτά προβλήματα από άλλες τυπικές δραστηριότητες.

Το πιο σημαντικό εμπόδιο συνδέεται με το παιδαγωγικό πρόβλημα της **μεταφορισμότητας της γνώσης**. Όταν ένα γνωστό πρόβλημα μεταφέρεται σε ένα διαφορετικό πλαίσιο οι μαθητές αποτυγχάνουν να αναγνωρίσουν τις αναλογίες. Μάλιστα όσο πιο πολλά στοιχεία αλλάζουν, τόσο περισσότερες δυσκολίες δημιουργούνται. Τα ανοιχτά προβλήματα, στα οποία τα πεδία μεταφοράς είναι πολλά, οι συνδυασμοί δεν διακρίνονται με πρώτη ματιά και τα επίπεδα αφαίρεσης αυξάνονται, μπορεί να οδηγήσουν τα παιδιά σε ελλιπή μεταφορισμότητα και ακατάλληλη εσωτερική παράσταση του προβλήματος.

Σημαντικές δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων έχουν να κάνουν με το **“διδασκτικό συμβόλαιο”**. Οι μαθητές από τη συνηθισμένη τριβή και εξοικείωση με τα προβλήματα που μαθαίνουν να λύνουν στο σχολείο έχουν αναπτύξει ορισμένες προσδοκίες:

- κάθε πρόβλημα έχει μια μόνο λύση,
- για να λύσουν ένα πρόβλημα θα πρέπει να κάνουν τις πράξεις με όλους τους αριθμούς ή όλα τα δεδομένα της εκφώνησης,
- θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν τουλάχιστον μια φορά την τελευταία διδαγμένη πράξη ή έννοια,
- οι μαθητές στην εκφώνηση αναζητούν “πάση θυσία” “λέξεις κλειδιά” και κατάλληλες φράσεις που παραπέμπουν σε πράξεις ή γνωστά τυπικά προβλήματα.

Κάνουμε την υπόθεση ότι **η παγίωση των παραπάνω κανόνων του διδασκτικού συμβολαίου, οι οποίοι έχουν ριζώσει με τη δύναμη της συνήθειας, μπορεί να αποτελούν ένα εμπόδιο για το σχηματισμό της κατάλληλης αναπαράστασης του προβλήματος**. Προτείνοντας στους μαθητές ανοιχτά προβλήματα “σπάσουμε” τους κανόνες του διδασκτικού συμβολαίου και τους βοηθήσουμε να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες.

Η επιτυχία του χειρισμού του ανοιχτού προβλήματος στην τάξη απαιτεί πολλούς πειραματισμούς για να μάθει ο εκπαιδευτικός από την εμπειρία του και να συνηθίσει έναν αποδοτικό τρόπο εργασίας. Όμως υπάρχουν οι περιοριστικοί όροι του αναλυτικού προγράμματος. Είναι πολύ δύσκολο να γίνει η έρευνα του ανοιχτού προβλήματος μέσα **στις αόρητες και πειστικές συνθήκες του αναλυτικού προγράμματος**. Στην περίπτωση που γίνεται κάποιος πειραματισμός ο χαρακτήρας του είναι ευκαιριακός, δεν θα έχει την απαιτούμενη διάρκεια, αφού η ύλη τρέχει και θα πρέπει να τρέχουμε ακατάπαυστα για να την προφτάσουμε. Ακόμα η εναλλαγή ανάμεσα στις ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις και στις κλειστές μάλλον έχει ως αποτέλεσμα οι εμπειρίες αυτές να συνθλιβονται. Έτσι η χαρούμενη διάθεση των παιδιών γρήγορα εξατμίζεται.

Όταν η τάξη είναι χωρισμένη σε ομάδες, υπάρχουν δυσκολίες στο χειρισμό και την παρακολούθηση των ομάδων: στην αντίληψη των λαθών, στην παρατήρηση των παιδιών χωρίς να επιδράσουμε στους συλλογισμούς τους, στην ανάλυση των παραστάσεων και των στρατηγικών επίλυσης, στην κατανομή του χρόνου, στο να συνηθίσουν τα παιδιά να συζητούν στις ομάδες και να μάθουν να ακούν τους συμμαθητές τους κλπ.

Ένα άλλο εμπόδιο είναι ότι **πρωταρχική σημασία αποδίδεται στις δραστηριότητες απομνημόνευσης γνώσεων και στις υπολογιστικές τεχνικές** που απαιτούνται από τα κριτήρια αξιολόγησης και τους διάφορους ελέγχους ή τα διαγωνίσματα. Η σημασία που αποδίδεται στην επίλυση των πάσης φύσεως προβλημάτων (όχι μόνο ανοιχτών) έρχεται σε δεύτερη μοίρα.

Επίσης μπορεί να διαπιστωθούν δυσκολίες στην **ικανότητα ελέγχου** κατά τη στιγμή του σχηματισμού της αναπαράστασης του προβλήματος, κατά τη στιγμή της επιλογής των εργαλείων, και κατά την επαλήθευση του αποτελέσματος²⁶.

Τέλος υπάρχουν δυσκολίες των μαθητών στην **ανάγνωση του προβλήματος (κυρίως στους μαθητές που παρουσιάζουν μαθησιακές δυσκολίες)**, στη **μετάφραση του προβλήματος** από τη λεκτική διατύπωση στη συμβολική αναπαράσταση που χρησιμοποιεί τη συμβολική μαθηματική γλώσσα κλπ.

Συνήθως παρατηρούμε ότι σε μια τάξη μόνο 2-3 μαθητές καταφέρνουν να βρουν τη λύση με σύνθετους παραγωγικούς συλλογισμούς και αυτοί μόνο μετά από απαιτητική προσπάθεια και ακατάπαυστη ενθάρρυνση. Οι περισσότεροι δεν καταφέρνουν να λύσουν το ανοιχτό πρόβλημα ή το λύνουν με διαισθητικές, επαγωγικές ή εμπειρικές μεθόδους, οι οποίες δεν έχουν την κομψότητα και την αυστηρότητα της μαθηματικής απόδειξης. Αν θέλουμε να ενεργοποιηθούν όλοι οι μαθητές δεν θα πρέπει να αποθαρρύνουμε τέτοιες προσπάθειες. Τα παιδιά θα μπορέσουν σταδιακά με προοδευτικές κατασκευές και αναδομήσεις των γνώσεών τους να κατανοούν τις λύσεις των συμμαθητών τους και να διατυπώνουν δικά τους αποδεικτικά επιχειρήματα.

Για να περιορίσουμε τις δυσκολίες που συνδέονται με τα ανοιχτά προβλήματα θα πρέπει να καλλιεργήσουμε στα παιδιά ένα **ευχάριστο κλίμα** μέσα στο οποίο η επίλυση ανοιχτών προβλημάτων να είναι χαρά και παιχνίδι. Η επίλυση ενός προβλήματος δεν είναι μόνο “υπόθεση διανοητική”. Η αποφασιστικότητα και το συναίσθημα παίζουν πολύ μεγάλο ρόλο²⁷. Η επιθυμία των μαθητών να κατανοήσουν και να λύσουν το πρόβλημα, η θέλησή τους να το αποτελειώσουν, η περιέργειά τους να το λύσουν με πολλούς τρόπους ή να ακούσουν άλλους τρόπους συνιστούν ορισμένες παρατηρούμενες συμπεριφορές οι οποίες κάνουν την εργασία ευχάριστη και ενδιαφέρουσα. Θα ήταν σοβαρό παιδαγωγικό λάθος αν δημιουργούσαμε στα παιδιά την εντύπωση ότι τα ανοιχτά προβλήματα αποτελούν πολύ δύσκολα προβλήματα με αξεπέραστες παγίδες που μπορούν να λυθούν με κόλπα και ειδικές τεχνικές μόνο από τους λίγους και τους προικισμένους. Για να αποφύγουμε τη δυσάρεστη κατάληξη τα ανοιχτά προβλήματα να είναι για τα παιδιά κουραστικά και ανιαρά θα πρέπει το ξεκίνημα να γίνει με ελκυστικά και ενδιαφέροντα προβλήματα, τα οποία να έχουν άμεση σχέση με τις καθημερινές εμπειρίες και τα βιώματα των παιδιών και ακόμα να είναι δυνατό να επιλυθούν από τα παιδιά.

7. Αντί επιλόγου

Ο κόσμος εξελίσσεται με ασυνήθιστη ταχύτητα και οι γνώσεις της ανθρωπότητας αυξάνονται. Μια σημερινή ανακάλυψη ίσως πολύ σύντομα θα βρίσκεται μόνο στο μουσείο. Το σχολείο διαμορφώνει σήμερα τους ενήλικους του αύριο για επαγγέλματα και εργασίες που δεν γνωρίζουμε ακόμη. Για να δημιουργήσει τις απαραίτητες προϋποθέσεις αυτού του ρευστού και εξελισσόμενου κόσμου θα πρέπει να αναπτύξει σήμερα τις πιο καθολικές ικανότητες: της έρευνας, του διαλόγου, της συλλογικότητας, και της αλληλεγγύης, με δυο λόγια να βοηθήσει το παιδί να μάθει πώς να μαθαίνει. Με την ανάπτυξη αυτών των ικανοτήτων και εμπειριών ο σημερινός μαθητής θα μπορεί να συμμετέχει κριτικά και δημιουργικά στις αλλαγές του σύγχρονου κόσμου. Σε κάθε αλλαγή αυτού του δυναμικού κόσμου, που διαρκώς ξεγλιστρά, ο άνθρωπος βρίσκεται μπροστά σε νέα ανοιχτά προβλήματα και θα πρέπει να ερευνά νηφάλια όλες τις δυνατές λύσεις για να μπορεί να επιλέγει τις καλύτερες. Η ζωντανή σχέση του με τα ανοιχτά προβλήματα στο σχολικό περιβάλλον αποτελεί ένα μικρό γόνιμο πρόπλασμα στο πλαίσιο αυτής της προοπτικής. Αντί να περιμένει να του προσφέρουν άλλοι έτοιμη τη λύση είναι καλύτερα να λύνει τα προβλήματα μόνος του νιώθοντας τη χαρά της ανακάλυψης.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

¹Arcac G., Germain G., Mante M., *Problème ouvert et situation-problème*, IREM Lyon 1991, σελ. 99.

²Βόσκογλου Μ. Το μαθηματικό πρόβλημα σαν παράγοντας για την απόκτηση και τη μεταφορά της γνώσης, *Πρακτικά 9ου πανελληνίου συνεδρίου της ΕΜΕ*, 1993, σελ. 368.

³Arcac G., Germain G., Mante M., *Problème ouvert et situation-problème*, IREM Lyon 1991, σελ. 7-9.

⁴Richard J., *Memoire et resolution de problèmes*, *Revue Française de Pédagogie*, n. 60, 1982, σελ. 23, INRP, Paris.

⁵Είναι δυνατό η διατύπωση του ίδιου προβλήματος να γίνεται με ανοιχτή ή κλειστή εκφώνηση. Αναφέρουμε ένα παράδειγμα: “Θεωρούμε μια ευθεία ϵ και δύο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ϵ . Υπάρχει ένα σημείο Γ της ϵ ώστε η διαδρομή ΑΓΒ να είναι ελάχιστη;” Αυτό το ανοιχτό πρόβλημα μπορεί να μετατραπεί σε κλειστό ως εξής: “Να δείξετε ότι η διαδρομή ΑΓΒ είναι ελάχιστη όταν Γ είναι η τομή της ϵ με την ευθεία που ενώνει το Β με το συμμετρικό του Α ως προς την ϵ ”.

- ⁶**Στράντζαλος Χ.**, Ερευνητικές κατευθύνσεις στη Διδακτική των Μαθηματικών στα πλαίσια μιας συλλογικής προσπάθειας για τη ριζική αναμόρφωση της μαθηματικής μας εκπαίδευσης, *ΕΜΕ Ευκλείδης Γ'* τ. 33-34-35, σελ. 153-165, Αθήνα 1992.
- ⁷**ERMEL.** *Apprentissages numeriques en grande section de maternelle* id. HATIER, 1990 Paris.
- ⁸**ERMEL.** *Apprentissages numeriques CP* id. HATIER, 1991 Paris.
- ⁹**Truchet J.**, Le problème ouvert en classe de Mathématique dans un institut midico-pédagogique, *Grand N* n. 54, 1993-1994, σελ. 71.
- ¹⁰**Bertoni M. et Monod J.**, Evaluation d'activités de recherche, *Math Ecole* 165, nov 1994, Neuchâtel σελ. 10.
- ¹¹**Χρυσοφίδης Κ.**, Βιωματική-επικοινωνιακή διδασκαλία, Gutenberg, Αθήνα 1994 σελ. 66.
- ¹²**Χρυσοφίδης Κ.**, Βιωματική-επικοινωνιακή διδασκαλία, Gutenberg, Αθήνα 1994.
- ¹³**Charnay R.**, Problème ouvert, problème pour chercher, *Grand N* n. 51, 1992-1993, σελ. 79.
- ¹⁴**Βοσνιάδου Σ., Brewer W.**, Θεωρίες αναδιοργάνωσης της γνώσης, στο βιβλίο "κείμενα εξελικτικής Ψυχολογίας, σκέψη", εκδ. Gutenberg, σελ. 140.
- ¹⁵**Truchet J.**, Le problème ouvert en classe de Mathématique dans un institut midico-pédagogique, *Grand N* n. 54, 1993-1994, σελ. 71.
- ¹⁶**Πατρώνης Τ.**, Προς μια ανοιχτή διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, *Διάσταση*, τ. 2, 1988, Θεσσαλονίκη, σελ. 40.
- ¹⁷**Brousseau G.**, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7.2, 1986, éditions la pensée sauvage.
- ¹⁸Είναι ενδιαφέρον να συζητούνται εμπειρίες εκπαιδευτικών πάνω στο χειρισμό του ανοιχτού προβλήματος στην τάξη από ομάδες εκπαιδευτικών στο πλαίσιο της επιμόρφωσής τους. Ο κριτικός στοχασμός των εκπαιδευτικών πάνω στην πρακτική τους μπορεί να αναδείξει μη συνειδητοποιημένες όψεις της καθημερινής συμπεριφοράς τους στην τάξη και να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόησή της και ίσως στην αλλαγή της. Βλ. **Lerman S. (1994)**. *Οι δάσκαλοι ως ερευνητές της μάθησης των παιδιών στα Μαθηματικά*, Erasmus, ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη, **B. Joly (1987)**. Recherche-action: méthodes et stratégies, *Les cahiers d'études du C.U.E.E.P.*, **Henry C.-Kemmis S.** Βήμα το βήμα προς την έρευνα δράσης, οδηγός για τους εκπαιδευτικούς, μετ. Γ. Μπαγάκη-Ε. Λαπαθιώτη στο περιοδικό *Εκπαιδευτική Κοινότητα* τ. 23, Αθήνα 1993, **Γ. Μπαγάκη**, Τι είναι η έρευνα δράσης και ποια η αναγκαιότητά της σήμερα στην εκπαίδευση, *Εκπαιδευτική Κοινότητα* τ. 20, Αθήνα 1993, και **Κοσμίδου Χ. Μαρμαρινός Γ. (1994)**. Ο δάσκαλος και η ενεργός έρευνα, *Σύγχρονη εκπαίδευση* τεύχ. 79.
- ¹⁹**Κανάκης Ι.**, *Η οργάνωση της διδασκαλίας μάθησης με ομάδες εργασίας*, Αθήνα 1987 σελ. 161, **Χρυσοφίδης Κ.** *Βιωματική - Επικοινωνιακή Διδασκαλία*, Εκδ. Gutenberg, Αθήνα 1994, σελ. 68 και 98 και **Ματσαγγούρας Η.** *Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία*, εκδ. Γρηγόρη, Αθήνα 1995, σελ. 47, **Πατρώνης Τ.** Προς μια ανοιχτή διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, *Διάσταση*, τ.2, 1988, Θεσσαλονίκη, σελ. 41.
- ²⁰**Charnay R.**, Problème ouvert, problème pour chercher, *Grand N* n. 51, 1992-1993, σελ. 80.
- ²¹**Truchet J.**, Le problème ouvert en classe de Mathématique dans un institut midico-pédagogique, *Grand N* n. 54, 1993-1994, σελ. 74.
- ²²Παρουσιάσαμε σχετική εισήγηση στο 11ο συνέδριο της ΕΜΕ, βλ. **Κόσσυβας Γ., Μότσιου Ε. (1994)** Πειραματικές προσπάθειες καλλιέργειας "ερευνητικής στάσης" σε μαθητές του Νηπιαγωγείου, του Δημοτικού και του Γυμνασίου μέσα από ανοιχτά προβλήματα.
- ²³**Bkouche R., Charlot B., et Rouche N.**, Faire des mathématiques : le plaisir du sens, *Math Ecole* 158, aout 1993, Neuchâtel σελ. 40.
- ²⁴Ορισμένα από τα προβλήματα που παρουσιάζουμε έχουν δημοσιευθεί με ίδια ή παρόμοια διατύπωση στις παρακάτω πηγές : **Arcac G., Germain G., Mante M.**, *Problème ouvert et situation-problème*, IREM Lyon 1991, **Charnay R.** Problème ouvert, problème pour chercher, *Grand N* n. 51, 1992-1993 **Truchet J.** Le problème ouvert en classe de Mathématique dans un institut midico-pédagogique, *Grand N* n. 54, 1993-1994, **Porcheron J. Guillaume J.** Peut-on résoudre un problème que l'on n'a pas appris à résoudre? στην έκδοση **I.N.R.P.** (1984). Comment font-ils? *Rencontres pédagogiques*, **Bouvier A.** . 30 problèmes, IREM Lyon 1994, **Φίλου Σ.** 1000 προβλήματα πρακτικής αριθμητικής, εκδόσεις Αναστασίακη, Αθήνα 1987, στα περιοδικά της ΕΜΕ Ευκλείδης Α, Β, Γ και στα σχολικά εγχειρίδια του Γυμνασίου.
- ²⁵Σύμφωνα με τον Έριχ Φρόμ ο φόβος αυτός είναι σύμφυτος με την ανθρώπινη υπόσταση. Ο άνθρωπος έχει πραγματώσει την "ελευθερία από", δυσκολεύεται όμως να προχωρήσει στη "ελευθερία για να". Έχει αποδεσμευτεί από την εξάρτηση και την καταπίεση, όμως δεν έχει την απαιτούμενη τόλμη να αναπτύξει δημιουργικές πρωτοβουλίες, βλ. **Fromm E.**, *Ο φόβος μπροστά στην ελευθερία.*, εκδ. Μπουκουμάνη, μετ. Αθήνα 1971.
- ²⁶**Καργιωτάκης Γ.**, Η ικανότητα ελέγχου κατά τη διάρκεια της λύσης του προβλήματος, *Πρακτικά 9ου πανελληνίου συνεδρίου της ΕΜΕ*, 1993, σελ. 439.
- ²⁷**Brecht M.**, La résolution des problèmes, *Math Ecole* 163, Juin 1994, Neuchâtel σελ. 30.