# ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΤΗ «ΒΙΩΜΑΤΙΚΗ-ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ» ΚΑΙ ΛΥΣΗ ΑΦΗΓΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

*Γ. Κόσυβας, Χ. Λεμονίδης*

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*

*Σε αυτό την εργασία παρουσιάζονται και συζητούνται τα αποτελέσματα μιας πειραματικής έρευνας που διενεργήθηκε με εξάχρονα νήπια. Τα ευρήματα τα οποία προέκυψαν από την εν λόγω έρευνα επαληθεύουν την υπόθεση ότι τα νήπια, τα οποία ακολούθησε τη διδακτική προσέγγιση του αριθμού την οποία ονομάζουμε «βιωματική-επικοινωνιακή μέθοδο της ανάλυσης του αριθμού» (Ομάδα έρευνας) απέδειξαν ωριμότερη ικανότητα επίλυσης αφηγηματικών προβλημάτων προσθετικού τύπου από την ομάδα των νηπίων τα οποία δέχθηκαν τη συνηθισμένη διδασκαλία της λογικομαθηματικής προσέγγισης του αριθμού (Ομάδα ελέγχου). Επιπλέον στάθηκαν ικανά να εφαρμόζουν τη γνώση της ανάλυσης, προπάντων με την αναλυτική-συνθετική χρήση των δακτυλικών σχηματισμών, σε πολλές όψεις της έννοιας του αριθμού, δηλαδή ανέπτυξαν ωριμότερη αριθμητική σκέψη από τα παιδιά της Ομάδα ελέγχου. Τέλος τα αποτελέσματα αυτά αντέχουν στον χρόνο, όπως αποδείχθηκε από το τεστ που έγινε όταν τα παιδιά βρίσκονταν στην Α΄ τάξη.*

*ABSTRACT*

*In this project the findings of an experimental research, which was recently carried out on 6-year-old youngsters, are presented and discussed. The findings which came out of this research verify the assumption that the toddlers who where tried in the educational approach of the number which is called "learning through experience-communicative approach of number analysis" (research team) have demonstrated a more mature ability of solving narrative problems of the adding type than those who where tried in the normal teaching of the logical-mathematical approach of the number (Control team). Moreover, the former have been able to use the knowledge of analysis. Especially using the analysis-synthesis use of finger patterns in many aspects of the number concept, that is to say they demonstrated a more mature match way of thinking than that of the children in the control team. All in all, the above results can withstand time as it was proved by the experiment using children as subject in the A΄ class.*

## 1. Θεωρητική εισαγωγή

Η διδασκαλία της έννοιας του φυσικού αριθμού συνιστά ένα διεπιστημονικό θέμα, από τα πλέον πολυσυζητημένα, το οποίο κατά βάση έχει προσελκύσει το ερευνητικό ενδιαφέρον της γνωστικής ψυχολογίας και της διδακτικής των μαθηματικών. Στη διεθνή επιστημονική κοινότητα οι απαρχές του ενδιαφέροντος των ερευνητών για τη διδασκαλία των αριθμητικών εννοιών στην προσχολική ηλικία χρονολογούνται στη δεκαετία του 30. Το ερευνητικό ενδιαφέρον σταδιακά μετακινείται σε πολλές γειτονικές επιστημονικές περιοχές και σηματοδοτεί γόνιμες επιστημονικές διαμάχες όπως για παράδειγμα η περίφημη διένεξη Piaget-Vygotsky για τον εγωκεντρικό λόγο των μικρών παιδιών[1].

[1] Ο Vygotsky υποστήριξε ότι ο εγωκεντρικός λόγος είναι μια μεταβατική μορφή ανάμεσα στον εξωτερικό και στον εσωτερικό λόγο. Επιπλέον παρατήρησε ότι ο Piaget παρέλειψε να τονίσει τη θεμελιώδη σημασία του λόγου στην οργάνωση της δραστηριότητας του παιδιού καθώς και τις επικοινωνιακές λειτουργίες του. Ο Piaget σχολίασε τις κριτικές παρατηρήσεις του Vygotsky μετά την αγγλική έκδοση του βιβλίου "*Σκέψη και Γλώσσα*" (1962). Βλ. Piaget J. Σχόλια πάνω στις κριτικές παρατηρήσεις του Vygotsky, στο: Βαρνάβα-Σκούρα Τ. (1990), *Θέματα γνωστικής ανάπτυξης, μάθησης και αξιολόγησης,* σσ. 47-58, Παπαζήσης, Αθήνα.

Στη σχολική και εξωσχολική ζωή τα νήπια έχουν ευκαιρίες να χρησιμοποιούν τους αριθμούς και να τους σκέπτονται. Από την ηλικία των τεσσάρων-πέντε ετών έχουν πολυάριθμες γνώσεις και ικανότητες: άμεση εκτίμηση του αριθμητικού πλήθους μικρών συλλογών, απαρίθμηση, προσδιορισμός του πλήθους μιας συλλογής με απαρίθμηση, επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης με τα δάκτυλα κλπ. Ελάχιστα όμως γνωρίζουν για την προσθετική ανάλυση και ανασύνθεση των αριθμών. Έχουν στο ενεργητικό τους σημαντικές μαθησιακές επιτυχίες, αλλά έχουν ακόμα αρκετό δρόμο να διανύσουν για να οικειοποιηθούν τον κόσμο των αριθμών και των ποσοτήτων αναπτύσσοντας περαιτέρω την αριθμητική τους σκέψη.

Παρότι είναι κοινός τόπος ότι οι έννοιες των αριθμών είναι το θεμέλιο πάνω στο οποίο θα οικοδομηθούν οι ανώτερες μαθηματικές ικανότητες, δεν υπάρχει ομοφωνία ως προς την αντίστοιχη καλύτερη διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση. Διαφορετικές όψεις μπορεί να τονίζονται σε μια διδακτική προσέγγιση όπως: ανάκληση αθροισμάτων και διαφορών στη μνήμη, αριθμοακολουθία (με τη χρήση αριθμητικών ή γραπτών σημείων) και δραστηριότητα απαρίθμησης, επινόηση αριθμητικών στρατηγικών από τα ίδια τα παιδιά, ποιοτική επεξεργασία των λογικομαθηματικών-μη αριθμητικών εννοιών. Μπορεί να δίνεται έμφαση στη διατακτική, την πληθική, ή τη μετρική σημασία του αριθμού. Τέλος μπορεί να επιτρέπεται ή να απαγορεύεται η χρήση χειροπιαστών αντικειμένων, σχηματισμών δακτύλων, εποπτικού υλικού ή άλλων εκφραστικών και παραστατικών μέσων του πολιτισμού.

Τρεις είναι οι κύριες ερευνητικές προσεγγίσεις που έχουν αναπτυχθεί για τον τρόπο σχηματισμού των αριθμητικών εννοιών στα παιδιά, οι οποίες επηρέασαν τη διδασκαλία κατά τα τελευταία 30 χρόνια. Μάλιστα οι τρεις αυτές προσεγγίσεις εξακολουθούν να έχουν άμεσες επιπτώσεις στον τρόπο εισαγωγής των αριθμητικών εννοιών στο νηπιαγωγείο και στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου.

- Η πρώτη προσέγγιση τονίζει την άμεση απομνημόνευση πράξεων.
- Η δεύτερη προσέγγιση υπογραμμίζει τις λογικομαθηματικές δομές.
- Η τρίτη προσέγγιση δίνει έμφαση στην προφορική αριθμοακολουθία (ή ακολουθία των αριθμολέξεων: «*ένα, δύο, τρία,…*») και τις αριθμητικές διαδικασίες.

Η **πρώτη** βασίζεται στη δημιουργία σωστών συνηθειών μέσα από την επανάληψη. Το θεωρητικό υπόβαθρο της προσέγγισης αυτής βρίσκεται στον συνειρμισμό του Thorndike (Thorndike E.L., 1922). Ο κύριος σκοπός της εν λόγω προσέγγισης είναι η δημιουργία ισχυρών «δεσμών» ανάμεσα στα ερεθίσματα και τις αντιδράσεις. Για παράδειγμα στην αριθμητική αυτοί οι δεσμοί είναι οι συνδέσεις ανάμεσα στους προσθετέους και το άθροισμα ή ανάμεσα στους δύο όρους της αφαίρεσης (τον μειωτέο και τον αφαιρετέο) και στη διαφορά. Παρότι η εν λόγω προσέγγιση δέσποζε στην παραδοσιακή διδασκαλία των αριθμητικών γνώσεων πριν από τη δεκαετία του 50, στις μέρες μας –αν και επικρίνεται για τον μηχανικό και αυτοματοποιημένο χαρακτήρα της μάθησης– βρίσκει έδαφος στις εκπαιδευτικές πρακτικές που αποδίδουν προεξάρχουσα σημασία στην τυποποιημένη εξάσκηση στις υπολογιστικές δεξιότητες μέσα από την προφορική ή γραπτή ασκησιολογία χωρίς αναφορές σε καταστάσεις προβληματισμού και χρήση συγκεκριμένων αντικειμένων και εποπτικών βοηθημάτων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μπηχαβιοριστικού προγράμματος μαθηματικών αποτελεί η κίνηση «επιστροφή στα βασικά».

Η **δεύτερη** προσέγγιση βρίσκεται στο σταυροδρόμι δύο θεωριών: της θεωρίας των συνόλων και της θεωρίας του Piaget για τη γένεση του αριθμού (Piaget J., Szeminska A., 1941). Αυτός ο συνδυασμός γέννησε το μεταρρυθμιστικό κίνημα των «μοντέρνων μαθηματικών». Το κύριο ενδιαφέρον εστιάστηκε στη λογική θεμελίωση των μαθηματικών εννοιών με βάση ενδομαθηματικά κριτήρια. Το εν λόγω κίνημα αποτελεί σημαντικό σταθμό, που συνιστά μια απρόσκλητη διείσδυση του φορμαλισμού από το νηπιαγωγείο και επηρέασε τη διδασκαλία των μαθηματικών σε παγκόσμιο επίπεδο.

Η μεταρρύθμιση αυτή προτείνει μια νέα αντίληψη του αριθμού στο νηπιαγωγείο και στην Α΄ τάξη του δημοτικού σχολείου. Μετά την εισαγωγή της έννοιας του συνόλου, ο φυσικός αριθμός προκύπτει σύμφωνα με τον μαθηματικό ορισμό του ως ο κοινός πληθικός αριθμός (πληθάριθμος) διαφόρων συνόλων, που όπως διαπιστώνεται με την αντιστοιχία ένα προς ένα είναι ισοπληθικά (ή ισοδύναμα). Ακριβέστερα τα σύνολα διαμερίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας με βάση τη σχέση ισοδυναμίας ως προς το πλήθος των στοιχείων που έχουν. Έτσι οι φυσικοί αριθμοί συμβολίζουν την πληθικότητα των κλάσεων ισοδυναμίας (Λεμονίδης Χ., 2000). Έχουμε μια άμεση διδακτική μεταφορά του αξιωματικού ορισμού των φυσικών αριθμών, όπως ορίστηκε στο πλαίσιο της θεωρίας των συνόλων.

Τα ευρήματα του Piaget προέκυψαν από ψυχολογικές έρευνες για τη γένεση της έννοιας του αριθμού στην πορεία ανάπτυξης της παιδικής νοημοσύνης. Στο πλαίσιο της θεωρίας του Piaget οι λογικομαθηματικές δομές είχαν θεμελιώδη σημασία για τη σταδιακή ανάπτυξη της έννοιας των αριθμών και γενικά για την προοδευτική οικοδόμηση της γνώσης (Piaget J., Inhelder B., 1959). Παραταύτα η επιστημολογική και γνωστική προσέγγιση της έννοιας του φυσικού αριθμού στη θεωρία του Piaget έχει άμεση σχέση με την αντίστοιχη αξιωματική θεμελίωση στο πλαίσιο των μαθηματικών. Αυτός ο συνδυασμός ευνόησε την εισαγωγή των «μοντέρνων μαθηματικών» στο νηπιαγωγείο και στο δημοτικό σχολείο (Γ. Κόσυβας 1993).

Πριν από την εισαγωγή της έννοιας του αριθμού στα παιδιά η λογικομαθηματική προσέγγιση εστιάζει την προσοχή της στην ποιοτική επεξεργασία των προαριθμητικών εννοιών. Αυτές είναι: η ταξινόμηση, η σειροθέτηση, η διατήρηση, η αντιστοίχιση ένα προς ένα. Όσο οι μαθητές ασκούνται με διάφορες δραστηριότητες για την απόκτηση των προαριθμητικών ικανοτήτων, δεν πρέπει να απαριθμούν τα αντικείμενα, αφού ο αριθμός των στοιχείων ενός συνόλου (πληθάριθμος) εισάγεται αργότερα, όταν τα παιδιά έχουν εξοικειωθεί με τις προαναφερόμενες δραστηριότητες και την έννοια του συνόλου.

Η χρονική πρόταξη τέτοιου είδους λογικομαθηματικών διαδικασιών και δραστηριοτήτων έχει την προέλευσή της στη θεωρία του Piaget. Προλογίζοντας ο ίδιος ο Piaget το βιβλίο του Beauverd «*Πριν από τον υπολογισμό*», το οποίο αποτελεί μια παιδαγωγική εφαρμογή των ευρημάτων του, γράφει:

> «*Ένα πρώτο σημείο για το οποίο πρέπει να συγχαρούμε τον συγγραφέα αυτών των ωραίων ασκήσεων είναι ότι ήξερε να επιμένει όπως αρμόζει πάνω στις προκαταρκτικές προϋποθέσεις μιας κατάλληλης απόκτησης των μαθηματικών εννοιών. Ολόκληρο το κεφάλαιο Ι αφορά πράγματι την κατασκευή των δομών διατήρησης, τη σημασία των οποίων ένας κάπως βιαστικός παιδαγωγός θα μπορούσε να παραμελήσει, υποθέτοντας ότι το ενδιαφέρον τους είναι μάλλον θεωρητικό και σχετίζεται μόνο με την ψυχολογική ανάλυση.*» (Piaget J., Πρόλογος στο: Beauverd B., 1964)

Έντονη ήταν η κριτική που άσκησε στα πειράματα του Piaget ο Ολλανδός μαθηματικός H. Freudenthal. Υποστήριξε, υπερβάλλοντας, ότι ταυτίζει την επιστημολογία της γεωμετρίας και των μαθηματικών με τις θεωρήσεις των Kline και Bourbaki.

Η **τρίτη** ερευνητική και διδακτική προσέγγιση των αριθμητικών εννοιών αμφισβήτησε έντονα την προηγούμενη, που ήταν η επικρατούσα. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων απέρριψε τις προαριθμητικές δραστηριότητες και κυρίως τη χρονική τους πρόταξη στη διδασκαλία (Λεμονίδης Χ., 1998). Κυοφορήθηκε στις

ΗΠΑ κατά τις δεκαετίες του 1970 και 1980 και συνδέεται κυρίως με τη θεωρία επεξεργασίας πληροφοριών και το ρεύμα του κονστρουκτιβισμού (Klahr D. Wallace J.-G., 1976, − Gelman R., Gallistel G. R. , 1978, − Fuson K.C., 1988, − Fayol M., 1990, − Hughes M., 1986 − Kamii C.-K., 1985 − Steffe L.- P., von Glasersfeld E., Richards J., Cobb P., 1983, − Steffe L.-P., Cobb P. , 1988). Έχει ως αφετηρία την προφορική αριθμοακολουθία. Η απαρίθμηση είναι η βασική δεξιότητα για τον προσδιορισμό του πλήθους των αντικειμένων μιας συλλογής ή του πλήθους των νοητών αριθμήσιμων μονάδων. Οι συμμετέχοντες ερευνητές ανήκουν σε διαφορετικά επιστημονικά πεδία: την γνωστική και την εξελικτική ψυχολογία, τη διδακτική των μαθηματικών, την επιστημολογία και την ιστορία των μαθηματικών. Ανακάλυψαν τις προϋπάρχουσες γνώσεις και τις αδίδακτες ή άτυπες στρατηγικές που φανέρωσαν τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας πριν ακόμα εισαχθούν στην υποχρεωτική εκπαίδευση.

Αρχικά οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι στην προφορική απαγγελία τα αριθμητικά (οι αριθμολέξεις) έχουν μάλλον τη σημασία των τακτικών αριθμητικών. Στη συνέχεια μελέτησαν, μεταξύ άλλων, την πληθικότητα (απόλυτος αριθμός), τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών της λεκτικής αριθμοακολουθίας και τη χρήση της στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων. Σε γενικές γραμμές τα ευρήματα των σύγχρονων ερευνών δείχνουν ότι τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας έχουν περισσότερες δυνατότητες από αυτές που είχε υποτεθεί παλιότερα. Ωστόσο υπάρχουν διαφορετικές διδακτικές, ψυχολογικές και επιστημολογικές οπτικές γωνίες μελέτης της αριθμοακολουθίας και των συνακόλουθων αριθμητικών στρατηγικών, εννοιών και δραστηριοτήτων με τις οποίες αυτή συνδέεται. Οι γνώσεις μας για την προσχολική μαθηματική εκπαίδευση έχουν πολλαπλασιαστεί πάρα πολύ τα τελευταία 30 χρόνια, ως αποτέλεσμα της αύξησης των διεθνών ερευνών και της πλούσιας συνεισφοράς των ερευνητών, οι οποίοι αποσκοπούν στη βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Ενώ ο Piaget συνέβαλε στην κατάρτιση προγραμμάτων δομικής ή λογικομαθηματικής προσέγγισης των αριθμών της δεκαετίας του 70, τα νεότερα προγράμματα πηγάζουν από τις εργασίες ερευνητών της τρίτης προσέγγισης και δεν συμπλέουν όλα με τον κονστρουκτιβισμό του. Μάλιστα τα τελευταία χρόνια φαίνεται να παρατηρείται μια διεθνής στροφή προς αυτή την κατεύθυνση.

> «*Μετά τη σχεδόν ολοσχερή εγκατάλειψη των αριθμητικών δραστηριοτήτων στο νηπιαγωγείο ο αριθμός σιγά σιγά επανέρχεται, αλλά οι εργασίες που γίνονται στις περισσότερες τάξεις, ακόμα και στη μικρή τάξη του νηπιαγωγείου, αποδεικνύουν το ενδιαφέρον που αποδίδεται στην εργασία πάνω στον αριθμό, η οποία ακόμα είναι πλήρως ανανεωμένη σε σχέση με τις πρακτικές που εφαρμόζονταν πριν από το 1970.*» (Dubois C., Fenichel M. Pauvert, 1993)

Ενώ ο συνειρμισμός και ο μπηχαβιορισμός δεν εμπνέουν πλέον τις σύγχρονες έρευνες, τόσο από τα ευρήματα των ερευνητικών τάσεων όσο και από τα αποτελέσματα της αξιολόγησης των αντίστοιχων διδακτικών τάσεων δεν μπορούμε να αποφανθούμε με βεβαιότητα για την υπεροχή της τάσης που υπογραμμίζει τις λογικομαθηματικές έννοιες ή εκείνης που τονίζει την αριθμοακολουθία. Από τις προαναφερόμενες προσεγγίσεις η καθεμιά από μόνη της χαρακτηρίζεται από στενότητα και μονομέρεια. Όλες οι προηγούμενες προσεγγίσεις αγνοούν ένα από τα θεμελιώδη γνωρίσματα του αριθμού: *την ανάλυση του αριθμού*. Παραγνωρίζουν ότι ο αριθμός είναι κάτι περισσότερο από την πληθική, τη διατακτική ή τη μετρική σημασία. Το 7 δεν είναι μόνο ο επόμενος του 6, ούτε μόνο 7 αντιληπτά αντικείμενα ή παραστατικά υποκατάστατά τους, ούτε ακόμα μόνο οι 7 μονάδες που «γεμίζουν» κάποιο μέγεθος. Είναι επίσης το 6+1, το 5+2, το 4+3,… Είναι ακόμα ένα αποτέλεσμα που προκύπτει από την επίλυση ενός αφηγηματικού προβλήματος πρόσθεσης, αφαίρεσης ή ελλείποντος προσθετέου. Η έννοια των αριθμών θα είναι στενή και περιορισμένη χωρίς την ανάλυση και τη σύνθεση των αριθμών και χωρίς αναφορές στην επίλυση προβλημάτων, προσθετικού τύπου, σύγκρισης και μοιρασιάς. **Ο αριθμός είναι κατά βάση μια ενδιαφέρουσα ποικιλία ανάλυσής του σε μικρότερους και ανασύνθεσής του από αυτούς.** Η ανάλυση και ανασύνθεση των αριθμών δίνει ώθηση στη φαντασία, υποκινεί τη διαρκή διερεύνηση, την επινόηση εναλλακτικών ιδεών, τη δημιουργική μαθηματική έκφραση των παιδιών.

Κατά βάση η αντίληψη για την ανάλυση και σύνθεση του αριθμού που προτείνουμε βρίσκει θεωρητική στήριξη στο έργο των Polya και Lacatos (Polya G., 1991, – Lakatos I., 1996) και κυρίως στο έργο των Piaget και Resnick. Η ερμηνεία των αριθμών με όρους μερών και όλου χαρακτηρίσθηκε από την Resnick ως το μεγαλύτερο διανοητικό επίτευγμα των πρώιμων σχολικών χρόνων (Resnick L. -B., 1983). Η αντίληψή μας προβάλλει μια ερμηνεία για τον αριθμό η οποία απορρέει εν μέρει από τον ορισμό του Piaget για τη λειτουργική έννοια του αριθμού (Piaget J., Szeminska A., 1941), χωρίς να συμμερίζεται τον υπερτονισμό των ταξινομήσεων και σειροθετήσεων και την αναγωγή του αριθμού αποκλειστικά σε αυτές τις λογικές έννοιες. Ο ορισμός του Piaget για τον αριθμό προϋποθέτει ότι τα παιδιά έχουν την ικανότητα να προσεγγίζουν τις αναλύσεις ενός δοσμένου αριθμού ακόμα κι αν αυτός ο ορισμός δεν προϋποθέτει ότι τα παιδιά γνωρίζουν ρητά αυτές τις αναλύσεις (Brissiaud R., 1994). Επιπρόσθετα οι Payne and Rathmell (1975) πρότειναν τη χρήση των λέξεων όλον και μέρη για να δώσουν έμφαση σ’ αυτή τη σημαντική σχέση χωρισμού (Payne J. N., Ratmell E. C., 1975).

Διάφοροι ερευνητές έχουν ενδιαφερθεί άμεσα ή έμμεσα για προσεγγίσεις που σχετίζονται με την ανάλυση και σύνθεση των αριθμών. Αναφέρουμε τις παρακάτω εργασίες: Vergnaud (1981), Neuman D.(1987), Marton F. Neuman D. (1990), Brissiaud R., (1989), Hatano G. (1982), Fischer F. E. (1990), Payne J.-N., Huinker D.-M. (1993), Easley J. (1983), Μπούφη Α. (1995α, 1995β), Cobb P., Boufi A., McClain K. Whitenack J. (1997). Στην τελευταία από τις προηγούμενες εργασίες αναφέρεται η πραγματοποίηση μιας σειράς διδακτικών δραστηριοτήτων που περιλαμβάνουν δακτυλικούς σχηματισμούς, γεωμετρικούς σχηματισμούς και ανάλυση και ανασύνθεση συλλογών στην πρώτη τάξη του δημοτικού σχολείου (Cobb P., Boufi A., McClain K., Whitenack J., 1997).

Οι κύριοι λόγοι που θεμελιώνουν τη σημασία της ανάλυσης των αριθμών στη διάρθρωση και εξέλιξη των αριθμητικών γνώσεων των παιδιών είναι: η πολύμορφη και ανοιχτή προσέγγιση, η διευκόλυνση της επινόησης νοητικών στρατηγικών υπολογισμού, η προετοιμασία της αξίας θέσης και η επίλυση προβλημάτων. Θεωρούμε ότι μια κατάλληλη δέσμη διδακτικών δραστηριοτήτων θα μπορούσε να προκαλέσει και να προετοιμάσει ορισμένες από τις προαναφερόμενες ικανότητες. Ενδεικτικές δραστηριότητες του εν λόγω ερευνητικού-διδακτικού σχεδίου (project) είναι οι ακόλουθες: δραστηριότητες διάσπασης, ένωσης και ομαδοποίησης που γίνονται με χρήση των δακτύλων και άλλου κατάλληλου εποπτικού υλικού το οποίο μας παρέχει ο πολιτισμός (μικρές συλλογές, τμήματα του αριθμητηρίου, διαρθρωμένη δεκάδα, ζάρια, πινακίδες ανάλυσης, εκπαιδευτικά παιγνίδια) και οικείες καταστάσεις προβληματισμού πάνω στο εποπτικό υλικό ή σε άλλα εκφραστικά μέσα (απαγγελία της λεκτικής αριθμοακολουθίας, απαρίθμηση, οι αφηγηματικές ιστορίες, τραγούδια και άλλα μέσα πολυαισθητήριας και διαθεματικής προσέγγισης των αριθμών), (Γ. Κόσυβας 2001).

Στο πρόγραμμα των νηπίων η ανάλυση και η σύνθεση είχε κατά βάση εποπτικό χαρακτήρα. Τα βασικά μέσα που χρησιμοποιήθηκαν είναι κληρονομιά του πολιτισμού μας (Vygotsky L., –1928, Schneuwly B. et Bronckart J-P., – 1985, Vygotsky L., 1997). Τα εποπτικά και διδακτικά μέσα αξιοποιήθηκαν στην επίλυση οικείων προβλημάτων, τα οποία πηγάζουν από τον βιωματικό κόσμο των νηπίων. Τα σύμβολα και η αυστηρή ορολογία αποκλείστηκαν γιατί, τα νήπια δεν μπορούν να εκφράσουν τις πλούσιες γνώσεις τους στην τυπική και αφηρημένη γλώσσα των μαθηματικών. Τόσο στη διδασκαλία όσο και στη συγκέντρωση των ερευνητικών δεδομένων δεν περιλάβαμε αφηρημένες ερωτήσεις του τύπου «*δύο και τρία με πόσα είναι ίσο;*» ή «*πέντε πλην τρία πόσο κάνει;*». Είναι πληκτικό και αντιπαιδαγωγικό να ζητούμε από τα νήπια να επαναλαμβάνουν ότι «δύο και τρία κάνουν πέντε». Σύμφωνα με τα ευρήματα πολλών ερευνητών τα πεντάχρονα νήπια συνήθως αδυνατούν να απαντήσουν σε υπολογισμούς οι οποίοι δεν αναφέρονται σε συγκεκριμένα αντικείμενα, ανθρώπους ή γεγονότα (Hughes M., 1986 – Kamii C.-K., 1985). Πρώτιστα τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα, μια δημιουργική δραστηριότητα του παιδιού. Στην προσέγγιση αυτή δεν έχει θέση ο στεγνός τυπικός χειρισμός συμβόλων.

Η διδακτική προσέγγιση που προτείνουμε, την οποία ονομάζουμε «βιωματική-επικοινωνιακή μέθοδο της ανάλυσης του αριθμού», (Χρυσαφίδης Κ., 1994), είναι ένα πεδίο γόνιμης συνάντησης της κριτικής και της βιωματικής παιδαγωγικής με τα μαθηματικά, γι' αυτό θα αναφερόμαστε σε «βιωματικά μαθηματικά», δηλαδή ενδιαφέροντα μαθηματικά που έχουν νόημα για τα ίδια τα παιδιά. Από την προσέγγιση αυτή απουσιάζει η μηχανική απομνημόνευση υπολογισμών, που είναι απογυμνωμένη από σημασία. Πιο συγκεκριμένα η προτεινόμενη προσέγγιση:

- από το ένα μέρος σκιαγραφεί μια ευχάριστη μύηση στις πρώιμες μαθηματικές γνώσεις των νηπίων παρέχοντας ευκαιρίες για την ανάδυση και προοδευτική μετεξέλιξη των άτυπων αριθμητικών εμπειριών που προέρχονται από τα πολιτισμικά βιώματα των παιδιών
- και από τα άλλο μέρος αποδίδει βαρύνουσα σημασία σε ένα από τα μαθηματικά γνωρίσματα του αριθμού, την ανάλυση του αριθμού, χωρίς βέβαια να παραμελούνται τα άλλα.

Αρχίζει με δραστηριότητες που το πλαίσιό τους συνδέεται με τα βιώματα και τα ενδιαφέροντα των παιδιών και σταδιακά επεκτείνεται σε άλλες βιωματικές καταστάσεις προβληματισμού και επικοινωνίας. Η προοδευτική μαθηματικοποίηση στηρίζεται πάνω σε βιωματικά μέσα. Τα νήπια βοηθιούνται προοδευτικά να κατασκευάσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις εμπλουτίζοντας τις προϋπάρχουσες ή προκαλώντας τη γόνιμη μετάπλασή τους.

Η ανάλυση και σύνθεση των αριθμών αποτελεί ένα θεμελιώδες γνώρισμα για την μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών. Εμβαθύνει στην κατανόηση της ίδιας της έννοιας του αριθμού καθώς και των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Για την κατανόηση αυτών των πράξεων είναι πολύ σημαντικό το γεγονός ότι οι αριθμοί μπορούν να χωρίζονται σε μικρότερους ή να ενώνονται σε μεγαλύτερους. Σε κάθε αριθμητική σύνθεση οι αριθμοί που αναλύονται και συντίθενται συγκαθορίζονται μεταξύ τους, έτσι ώστε ένας αριθμός να μπορεί να προκύπτει από τους άλλους με πρόσθεση ή με αφαίρεση. Αυτή η γνώση είναι συνδεδεμένη με το σχήμα μέρους–όλου και διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στην λύση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης (Briars D.-J., Larkin J. H. , 1984 – Riley M. S., Greeno J. G., 1988), αφού κατά βάση ενυπάρχει στο βάθος των εννοιολογικών σχέσεων κάθε προβλήματος.

Μελετήσαμε αφηγηματικά προβλήματα προσθετικού τύπου. Τα νήπια τα οποία έλαβαν μέρος στην έρευνα έλυσαν συνολικά 10 προβλήματα με μορφή ιστορίας. Η αφήγηση ιστοριών και παραμυθιών είναι ένα θαυμάσιο μέσον γλωσσικής επικοινωνίας (Vygotsky L., 1928, Vygotsky L., 1988). Η αφήγηση σφυρηλατεί δεσμούς ανάμεσα στο ασυνήθιστο και το συνηθισμένο. Επιπλέον παρεμβάλλεται μεταξύ του κανονιστικού κόσμου της κουλτούρας και του ιδιοσυγκρασιακού κόσμου των πεποιθήσεων, των επιθυμιών και των ελπίδων (Bruner J., 1997). Η ιστορία, πέρα από το πλαίσιο συμφραζομένων, περιέχει ένα σκηνικό, ένα πρόβλημα στο οποίο ενσωματώνονται οι μαθηματικές έννοιες καθώς και η λύση του (Griffiths R., Clyne M., 1991). Οι ιστορίες δεν έχουν μόνο μεγάλη απήχηση στα παιδιά, αλλά είναι σημαντικές για την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών για τους εξής λόγους: λειτουργούν ως δίοδοι σε έναν φανταστικό κόσμο που έχει βιωματικό νόημα για τα νήπια, εμπεριέχουν μαθηματικούς συλλογισμούς που τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν σε άλλες καταστάσεις, θέτουν άμεσα ή έμμεσα μια κατάσταση προβληματισμού στην οποία εμπλέκονται τα παιδιά και τέλος κεντρίζουν τον ενδιαφέρον των μικρών παιδιών για τις μαθηματικές έννοιες. Έτσι τα μαθηματικά παίρνουν ζωή από τον «πραγματικό» κόσμο και δεν κινδυνεύουν να τυποποιηθούν σε στεγνές λεκτικές διατυπώσεις. Υπενθυμίζουμε ότι για τα νήπια ή έννοια του «πραγματικού» κόσμου περιέχει και το «φανταστικό» στοιχείο, και μάλιστα όχι μόνο για τα παιδιά, αλλά για όλη την ανθρωπότητα (Πατρώνης Τ., 1987).

Σε αυτά τα προβλήματα τα εξάχρονα παιδιά καταγίνονται με χειρισμούς και προβλέψεις αριθμητικών ποσοτήτων μέσα στο αριθμητικό πεδίο της πρώτης οκτάδας. Συγκεκριμένα στα προβλήματα πρόσθεσης ή ελλείποντος προσθετέου το άθροισμα ήταν 6, 7 ή 8, στα προβλήματα αφαίρεσης ο μειωτέος ήταν το πολύ 8. Σημειώνουμε ότι προβλήματα με μικρούς αριθμούς έχουν μελετηθεί για νήπια ηλικίας 3–5 χρόνων (από τον M. Hughes στην Αγγλία, τους P. Starkey και R. Gelman στην Αμερική, τους Λεμονίδη Χ. και Χατζηλιαμή Μ. στην Ελλάδα κ. ά).

Το ερώτημα το οποίο μας απασχολεί στην παρούσα εργασία είναι: *ένα ερευνητικό-διδακτικό σχέδιο (project) που βασίζεται στην ανάλυση των αριθμών θα επιφέρει βαθύτερη και ωριμότερη κατανόηση στην επίλυση αφηγηματικών προβλημάτων από εξάχρονα νήπια σε σύγκριση με τη συνήθη διδασκαλία και ποιες στρατηγικές προτιμούνται σε κάθε περίπτωση*;

## *2. Η μέθοδος της έρευνας*

Ο πειραματικός σχεδιασμός περιλαμβάνει δύο ομάδες νηπίων, τα οποία φοιτούν στην μεγάλη τάξη του νηπιαγωγείου: την πειραματική ομάδα ή Ομάδα έρευνας και την Ομάδα ελέγχου. Η Ομάδα έρευνας ακολούθησε μια νέα προσέγγιση της έννοιας του αριθμού, η οποία δίνει έμφαση στην ανάλυση του αριθμού, ενώ η Ομάδα ελέγχου ακολούθησε τη συνηθισμένη μέθοδο προσέγγισης του αριθμού, η οποία έχει ως κεντρικό άξονα δραστηριότητες λογικού τύπου.

Σε όλα τα υποκείμενα του συνολικού δείγματος δόθηκαν αφηγηματικά προβλήματα, τα οποία αναφέρονται στο εννοιολογικό πεδίο των προσθετικών δομών. Τα παιδιά, για να επιλύσουν τα αφηγηματικά προβλήματα, επιστρατεύουν στρατηγικές οι οποίες βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα αφαίρεσης. Η ανάδειξη ποικιλίας στρατηγικών τα καθιστά ανοιχτά προβλήματα. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα 10 αφηγηματικά προβλήματα, τα οποία μοιράζονται σε πέντε τύπους (δύο προβλήματα για κάθε τύπο). Οι τύποι προβλημάτων είναι οι ακόλουθοι:

- προβλήματα αύξησης με άγνωστη την τελική κατάσταση (μεταβολή 1),
- προβλήματα ελάττωσης με άγνωστη την τελική κατάσταση (μεταβολή 2),
- προβλήματα ελλείποντος προσθετέου με άγνωστη τη μεταβαλλόμενη ποσότητα (μεταβολή 3),
- προβλήματα εύρεσης του όλου (σύνθεση 1 ή συνένωση),

- προβλήματα εύρεσης του μέρους (σύνθεση 2 ή διαμερισμός),

Περιορίζουμε την εξέτασή μας σε 6 προβλήματα μεταβολής (ή μετασχηματισμού) και 4 σύνθεσης, ενώ αποκλείουμε προβλήματα σύγκρισης και εξίσωσης, γιατί πολλά παιδιά αδυνατούν να λύσουν τέτοια προβλήματα πριν από το δημοτικό σχολείο (Carpenter T.P., Moser J. M., 1982 – Ficher J.-P., 1981, – Resnick L. -B., 1989 – Kamii C., De Klark G., 1985 – Τζεκάκη Μ., 1996). Επίσης δεν εξαντλούμε όλες τις κατηγορίες περιπτώσεων μεταβολής, αλλά περιοριζόμαστε μόνο σε εκείνες που είναι άγνωστη η τελική κατάσταση και άγνωστη η προστιθέμενη ποσότητα (ο ελλείπων προσθετέος ή το συμπλήρωμα). Προβλήματα στα οποία ζητείται η αρχική κατάσταση είναι δύσκολα και για παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας (Vergnaud G., 1981 – Vergnaud G., 1986). Μάλιστα από έρευνες έχει διαπιστωθεί ότι η χρήση υλικών αντικειμένων δεν αυξάνει τα ποσοστά επιτυχίας κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υλική αναπαράσταση είναι πολύ δύσκολη για μικρά παιδιά (Λεμονίδης Χ., 1994).

Οι αριθμοί που υπεισέρχονται σε αυτά τα αφηγηματικά προβλήματα, τόσο ως αριθμητικά δεδομένα όσο και ως ζητούμενα αποτελέσματα, δεν ξεπερνούν τον αριθμό 8. Στον σχεδιασμό των πειραμάτων με αφηγηματικά προβλήματα δεν προβλέπεται η χρήση χειροπιαστών αντικειμένων (π.χ. μάρκες, κυβάκια, πιόνια). Παρακάτω παρουσιάζουμε τον κατάλογο των αφηγηματικών προβλημάτων που ανατέθηκαν στα παιδιά (στις παρενθέσεις παρουσιάζονται διαφορετικοί αριθμοί, που αναφέρονται στο ίδιο σενάριο) :

| *ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ* | *ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ 10 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ* |
|---|---|
| Μεταβολή 1: 2+6=x (3+4=x), αύξηση με άγνωστη την τελική κατάσταση | Ο Γιώργος είχε 2 (3) μαρκαδόρους. Επειδή στη ζωγραφιά του θέλει να χρησιμοποιήσει και άλλα χρώματα, ψάχνει και βρίσκει 6 (4) μαρκαδόρους ακόμα. Πόσους μαρκαδόρους έχει τώρα ο Γιώργος; |
| Μεταβολή 2: 8–6=x (8–4=x), ελάττωση με άγνωστη την τελική κατάσταση | Ο παππούς είχε στο κοτέτσι του 8 (8) κοτούλες. Όμως μια μέρα μπήκε μέσα μια πονηρή αλεπού και έφαγε 6 (4) κότες. Πόσες κότες έμειναν στο κοτέτσι; |
| Μεταβολή 3: 3+x=7, (2+x=8) αύξηση με άγνωστη τη προστιθέμενη ποσότητα | Υπήρχαν μέσα στο σχολικό λεωφορείο 3 (2) παιδιά και ανέβηκαν μερικά ακόμα. Τώρα υπάρχουν στο λεωφορείο 7 (8) παιδιά. Πόσα παιδιά ανέβηκαν στο σχολικό λεωφορείο; |
| Σύνθεση 1 ή συνένωση: 2+4=x (5+2=x), εύρεση του όλου | Ο Νίκος έχει 2 (5) γούνινα γατάκια και 4 (2) γούνινα σκυλάκια. Πόσα είναι όλα τα ζώακια που έχει ο Νίκος; |
| Σύνθεση 2 ή διαμερισμός: 7=4+x (8=6+x), εύρεση του μέρους | Στα γενέθλια της Μελίνας υπήρχαν 7 (8) παιδιά. Από αυτά τα 4 (6) ήταν κορίτσια. Πόσα ήταν τα αγόρια; |

Τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης είναι παρόμοια με αυτά που έχουν χρησιμοποιηθεί και από άλλους ερευνητές (Sorhian C., Vong K. I., 1995 – Cobb P., 1987 – Marton F. Neuman D., 1990 – Neuman D., 1987 – Carpenter T.P., Moser J. M., 1982 – Carpenter T.P., Moser J. M., 1983 – Riley M. S., Greeno J. G., Heller J. I., 1983 – Vergnaud G., 1981 – INRP, 1988 – Vergnaud G., 1991 – ERMEL, 1990). Όμως επελέγησαν προβλήματα τα οποία ανταποκρίνονται στις ιδιαιτερότητες του ερευνητικού προβλήματος. Επίσης η διατύπωση συνδέεται με τον κόσμο των εμπειριών του παιδιού και μπορεί να ποικίλλει σε αναλυτικότητα και επεξηγήσεις[2].

[2] Ο ερευνητής αφηγείται τα προβλήματα ένα-ένα αργά και με χρωματισμό της φωνής του θυμίζει παραμύθι. Ζητάει από το παιδί να επαναλάβει την εκφώνηση του προβλήματος, να το λύσει με όποιο τρόπο θέλει και να αιτιολογήσει τον τρόπο με τον οποίο το έλυσε. Αν το παιδί δυσκολεύεται να λύσει το πρόβλημα, ο ερευνητής παρέχει ορισμένες εξηγήσεις που διευκολύνουν το παιδί να ξανασκεφτεί. Το παιδί είχε αρκετό χρόνο στη διάθεσή του να λύσει ένα πρόβλημα.

Όλα τα νήπια υποβλήθηκαν στα ερωτήματα των 10 αφηγηματικών προβλημάτων σε τέσσερις διαφορετικές χρονικές στιγμές:

- πριν από την εφαρμογή των δύο διαφορετικών σχεδίων διδακτικής επίδρασης για την προσέγγιση της έννοιας του αριθμού (προέλεγχος ή pretest ή εξέταση Α),
- μετά την ολοκλήρωση της πρώτης φάσης των μαθημάτων (ενδιάμεσος έλεγχος ή εξέταση Β),
- μετά τη λήξη όλων των μαθημάτων στο τέλος της σχολικής χρονιάς (πρώτος μεταέλεγχος ή πρώτο posttest ή Γ) και
- κατά της αρχή της φοίτησης των νηπίων στην Α΄ τάξη του δημοτικού (δεύτερος μεταέλεγχος ή δεύτερο posttest ή Δ).

Η πειραματική έρευνα διενεργήθηκε κατά το σχολικό έτος 1992-93 σε 22 νηπιαγωγικές τάξεις με ένα σύνολο 258 νηπίων. Ειδικότερα: Εκατόν είκοσι εννέα (129) υποκείμενα, από 11 νηπιαγωγικές τάξεις του νομού Κορινθίας, εύρους ηλικίας από 5*6 (5 ετών και 6 μηνών) ώς 6*6 (Μ.Ο.=6,02[3], ενώ 51,9% των νηπίων ήταν μεγαλύτερα των 6 ετών) κατά την τελευταία μέτρηση (Οκτώβριος 1993) διδάχθηκαν με το διδακτικό σχέδιό μας (75 αγόρια 54 κορίτσια). Επιπλέον εκατόν είκοσι εννέα υποκείμενα (129), από άλλες 11 νηπιαγωγικές τάξεις, εύρους ηλικίας από 5*6 ( 5 ετών και 6 μηνών) ώς 6*6 (Μ.Ο.=6,06, ενώ 63,6% των νηπίων ήταν μεγαλύτερα των 6 ετών) κατά την τελευταία μέτρηση δέχθηκαν τη διδασκαλία για την προσέγγιση της έννοιας του αριθμού που προβλέπεται από το επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα του νηπιαγωγείου (61 αγόρια 68 κορίτσια).

Η κλίμακα μέτρησης των επιδόσεων των νηπίων σε όλα τα προβλήματα ήταν από 0 ώς 4. Τα δεδομένα τα οποία συγκεντρώθηκαν διοχετεύτηκαν στον ηλεκτρονικό υπολογιστή για στατιστική επεξεργασία. Η δημιουργία συγκριτικών ραβδογραμμάτων και χρονοδιαγραμμάτων έγινε με το πρόγραμμα Excel. Ο έλεγχος των υποθέσεων και η επαγωγική στατιστική ανάλυση των ευρημάτων έγινε με το πρόγραμμα SPSS. Με το εν λόγω πρόγραμμα υπολογίστηκαν: πίνακες ποσοστών επιτυχίας και κατανομές των στρατηγικών, οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των κατανομών, οι t-τιμές για τον έλεγχο της ισότητας των επιδόσεων των δύο ομάδων, οι F-τιμές για τη σύγκριση της διαχρονικής εξέλιξης των επιδόσεων των δύο ομάδων (το κριτήριο GLM Repeated Measures-Sphericity Assumed), οι συντελεστές αξιοπιστίας, οι συντελεστές συσχέτισης. Από τη στατιστική επεξεργασία των δεδομένων αυτών προέκυψαν τα αποτελέσματα της πειραματικής έρευνας. Στην εργασία αυτή αποδεκτή στάθμη πιθανότητας είναι το 5%.

Στη συνέχεια σκιαγραφούνται κατά συνολικό τρόπο τα ποσοτικά αποτελέσματα της έρευνας και γίνεται συνοπτική στατιστική επεξεργασία. Τα ευρήματα της έρευνας παρουσιάζονται με διαγράμματα και συνοπτικούς πίνακες και συνοδεύονται, όπου κρίθηκε απαραίτητο, με τις κατάλληλες μεθόδους στατιστικής ανάλυσης διευκολύνοντας τον αναγνώστη να διαπιστώσει τις σχέσεις που συνδέουν τις μεταβλητές που μελετήθηκαν.

## *3. Συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων και στατιστική επεξεργασία*

Η αξιοπιστία των μετρήσεων ενός οργάνου μέτρησης υπολογίζεται με τον συντελεστή αξιοπιστίας. Ένα test (στην περίπτωσή μας ένα σύνολο 10 αφηγηματικών προβλημάτων) θεωρείται ότι έχει αξιοπιστία (reliability) όταν χαρακτηρίζεται από

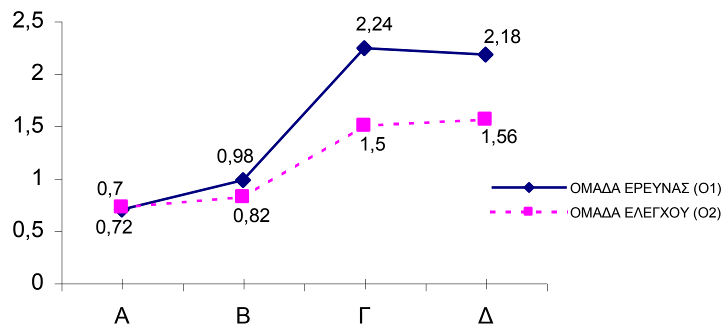
[3] Σημειώνεται ότι η εύρεση της μέσης ηλικίας σε έτη βρέθηκε μετά από αναγωγή της ηλικίας κάθε νηπίου σε ημέρες και διαίρεση του αριθμητικού μέσου δια του 365.

σταθερότητα, δηλαδή όταν αποδίδει τα ίδια ή παρόμοια αποτελέσματα σε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις ενός χαρακτηριστικού γνωρίσματος που έχουν τα άτομα κάτω από τις ίδιες συνθήκες (Παπαναστασίου Κ., 1990 –Βάμβουκας Μ., 1998 – Παρασκευόπουλος Ι., 1993). Η αξιοπιστία αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την εγκυρότητα του test[4].

Για το σύνολο όλων των αφηγηματικών προβλημάτων της έρευνάς μας εφαρμόσαμε τον συντελεστή αξιοπιστίας Gronbach's alpha. Οι υπολογισμοί του συντελεστή αξιοπιστίας Gronbach's alpha πραγματοποιήθηκαν για τα δεδομένα των τεσσάρων μετρήσεων Α, Β, Γ, Δ και αποκάλυψαν αντίστοιχα στο σύνολο όλων των νηπίων και των δύο ομάδων τα ακόλουθα αποτελέσματα: Α: 0,93, Β: 0,94, Γ: 0,95, Δ: 0,95. Όπως διαπιστώνουμε από τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα, οι συντελεστές αξιοπιστίας είναι υψηλοί[5]. Αυτό σημαίνει ότι τα επιμέρους προβλήματα συσχετίζονται μεταξύ τους (είναι ομοιογενή) και επομένως η ομαδοποίησή τους προσφέρεται για τη μέτρηση του ίδιου χαρακτηριστικού.

Το παρακάτω χρονοδιάγραμμα αποτυπώνει με ελκυστικό τρόπο τις συγκριτικές εξελίξεις των μέσων επιδόσεων των δύο ομάδων στα 10 αφηγηματικά προβλήματα κατά τις χρονικές στιγμές Α, Β, Γ και Δ. Επιπλέον διενεργείται ο έλεγχος υποθέσεων των μέσων επιδόσεων στις τέσσερις χρονικές στιγμές και ο έλεγχος της παραλληλίας των γραμμών διαχρονικής εξέλιξης των δύο ομάδων. Η συνεχής τεθλασμένη γραμμή αναφέρεται στην ομάδα έρευνας και η διακεκομμένη στην ομάδα ελέγχου.

*ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΟΜΑΔΩΝ ΣΤΑ*
*10 ΑΦΗΓΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ*




Η μελέτη των αποτελεσμάτων του παραπάνω χρονοδιαγράμματος στα αφηγηματικά προβλήματα μας επιτρέπει να διατυπώσουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

- *Στα εν λόγω προβλήματα, τόσο κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του προγράμματος (Α-Β-Γ)[6] όσο και μετά την ολοκλήρωσή του (Δ), οι μέσες επιδόσεις της Ομάδας έρευνας είναι υψηλότερες από τις επιδόσεις της Ομάδας ελέγχου, δηλαδή η Ομάδα έρευνας παρουσιάζει μεγαλύτερη πρόοδο. Από τη σύγκριση της διαχρονικής εξέλιξης των επιδόσεων των δύο ομάδων στα αφηγηματικά προβλήματα (έλεγχος υπόθεσης παραλληλίας των δύο γραμμών) αποδεικνύεται ότι η αλληλεπίδραση της διαχρονικής εξέλιξης εντός των υποκειμένων με τον τύπο της ομάδας είναι στατιστικά σημαντική*

[4] Η εκτίμηση της αξιοπιστίας ενός test υπολογίζεται συνήθως με τον συντελεστή αξιοπιστίας Gronbach's alpha (ή *α*). Ο συντελεστής αυτός είναι ένας δείκτης της «εσωτερικής συνέπειας» του test. Βασίζεται στη μέση συσχέτιση των ερωτήσεων εντός του test ή στη μέση συνδιακύμανση μεταξύ των ερωτήσεων και παρέχει μια πειστική αιτιολόγηση για τη λογική συνύπαρξη των επιμέρους ερωτήσεων στο εν λόγω test. Βλ. Marija J. Norusis, SPSS, for Windows, *Professional Statistics, Release 5,* p. 145-146, 1992.

[5] Η τιμές του συντελεστή αξιοπιστίας πρέπει να κυμαίνεται μεταξύ 0,90 και 0,96. Βλ. Βάμβουκας Μ. (1998), *Εισαγωγή στην Ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία*, Γρηγόρης, Αθήνα, σ. 286.

[6] Στο συμβολισμό Α-Β-Γ οι παύλες παριστάνουν την εκτέλεση του προγράμματος μεταξύ των επί μέρους μετρήσεων.

*(GLM Repeated Measures-Sphericity Assumed: F=30,81, p<0,01)*[7]*. Αν οι διαφορές αυτές συνδυαστούν με τα αποτελέσματα του χρονοδιαγράμματος της προηγούμενης ενότητας συμπεραίνουμε, ότι στην επίλυση των εν λόγω προβλημάτων η Ομάδα έρευνας υπερέχει στην πρόοδο από την Ομάδα ελέγχου σε όλη τη χρονική διάρκεια του πειραματισμού.*

- *Η ομάδα ελέγχου εμφανίζει μια βελτιωτική τάση στις επιδόσεις από τη μία εξέταση στην αμέσως επόμενη. Το ίδιο συμβαίνει με την πειραματική ομάδα με μία εξαίρεση: από την εξέταση Γ στην εξέταση Δ εμφανίζει μια μικρή πτώση στην επίλυση των 10 προβλημάτων (από 2,24 σε 2,18). Το φαινόμενο αυτό πρέπει να αποδοθεί στη μεσολάβηση ενός τετραμήνου από την τελική εξέταση Γ του Ιουνίου μέχρι την τελική εξέταση Δ του Οκτωβρίου.*

Στη συνέχεια θα υποβάλουμε τις δύο ανεξάρτητες ομάδες (Ομάδα έρευνας και Ομάδα ελέγχου) σε στατιστικό έλεγχο ισότητας των μέσων όρων κατά τις τέσσερις μετρήσεις στα 10 αφηγηματικά προβλήματα για να διαπιστώσουμε αν είναι ομοιογενείς πριν από την εφαρμογή του πειραματικού προγράμματος (Α) και ποια υπερέχει κατά στις μετρήσεις Β, Γ και Δ.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το πλήθος των νηπίων της ομάδας έρευνας και της ομάδας ελέγχου, τις μέσες επιδόσεις τους, τις τυπικές αποκλίσεις τους και τα αντίστοιχα σφάλματα του μέσου όρου στην εν λόγω πειραματική δοκιμασία. Στις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα εμφανίζονται οι t-τιμές που προκύπτουν από το στατιστικό κριτήριο t-τεστ και οι αντίστοιχες πιθανότητες.

*Σύγκριση των μέσων επιδόσεων των δύο ομάδων νηπίων στις τρεις εξετάσεις (Α, Β, Γ και Δ) στην επίλυση των 10 αφηγηματικών προβλημάτων*

| *Πειραματικές δοκιμασίες (tests)* | *N* | *μέσες επιδόσεις* | *τυπικές αποκλίσεις* | *σφάλματα μέσου* | *t* | *p* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Εξέταση Α: (Οκτώβριος)* | $O_1$: 129<br>$O_2$: 129 | 0,70<br>0,72 | 0,74<br>0,72 | 0,06<br>0,06 | –0,22 | 0,82 |
| *Εξέταση Β: (Ιανουάριος)* | $O_1$: 129<br>$O_2$: 129 | 0,98<br>0,82 | 0,97<br>0,83 | 0,08<br>0,07 | 1,46 | 0,14 |
| *Εξέταση Γ: (Ιούνιος)* | $O_1$: 129<br>$O_2$: 129 | 2,24<br>1,50 | 1,09<br>1,11 | 0,09<br>0,09 | 5,38 | 0,00 |
| *Εξέταση Δ:(Οκτώβριος* | $O_1$: 129<br>$O_2$: 129 | 2,18<br>1,56 | 1,11<br>1,09 | 0,10<br>0,10 | 4,47 | 0,00 |

$O_1$: Ομάδα έρευνας
$O_2$: Ομάδα ελέγχου

Εάν στα δεδομένα του παραπάνω πίνακα συγκρίνουμε τις μέσες επιδόσεις μεταξύ της Ομάδας έρευνας και της Ομάδας ελέγχου, διαπιστώνουμε:

- *Στην αρχική εξέταση (μέτρηση κατά χρονική στιγμή Α) οι μέσες επιδόσεις των δύο ομάδων διαφέρουν ελάχιστα (Ομάδα έρευνας: 0,70, Ομάδα ελέγχου: 0,72). Με βάση αυτά τα αποτελέσματα επαληθεύεται η ύπαρξη ομοιογένειας (t= -0,22, p=0,82), η οποία μας βοηθάει να συμπεράνουμε ότι οι προϋπάρχουσες γνώσεις των δύο ομάδων στα αφηγηματικά προβλήματα είναι παραπλήσιες. Επομένως προτού εφαρμοσθεί το σχέδιο διδακτικής παρέμβασης αποδείχθηκε ότι υπήρχε ομοιογένεια στις ικανότητες επίλυσης προβλημάτων. Άρα υπάρχει ομοιογένεια ανάμεσα στην ομάδα έρευνας και την ομάδα ελέγχου.*
- *Στην εξέταση Β η Ομάδα έρευνας παρουσιάζει υψηλότερη μέση επίδοση από την Ομάδα ελέγχου στην πειραματική δοκιμασία των 10 αφηγηματικών προβλημάτων. Εφαρμόζοντας το στατιστικό*

[7] Με αυτόν τον στατιστικό έλεγχο επιχειρούμε να διαπιστώσουμε αν οι δύο γραμμές της διαχρονικής εξέλιξης των δύο ομάδων είναι παράλληλες. Στόχος αυτής της πρώτης συνολικής προσέγγισης του προβλήματος είναι να παράσχει στον αναγνώστη έναν συνοπτικό στατιστικό έλεγχο, με βάση τον οποίο συγκρίνονται οι επιδόσεις των δύο ομάδων (της Ομάδας έρευνας και της Ομάδας ελέγχου) σε όλη τη χρονική διάρκεια του πειραματισμού. Κατάλληλη στατιστική μέθοδος για τη σύγκριση της διαχρονικής εξέλιξης των επιδόσεων των δύο ομάδων, η οποία ενδείκνυται για τις επιδιώξεις μας, είναι το γενικό γραμμικό μοντέλο των επαναληπτικών μετρήσεων (GLM Repeated Measures-Sphericity Assumed). Βλ. Tabachnick B. G., Fidell L. S. (1989), Using Multivariate Statistics, p. 438, Harper Collins Publishers.

*κριτήριο t-τέστ στην δοκιμασία προβλημάτων βρίσκουμε: t=1,46 (p>0,05)· Από την εφαρμογή του t-τέστ δεν παρατηρείται στατιστικά σημαντική διαφορά στο τεστ προβλημάτων (p=0,14>0,05). Αυτό είναι αναμενόμενο, γιατί κατά την πρώτη φάση του προγράμματος δεν περιλαμβανόταν διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων πρόσθεσης με άθροισμα 6, 7 και 8 ή προβλημάτων αφαίρεσης με μειωτέο 6, 7 ή 8.*

- *Στην εξέταση Γ η Ομάδα έρευνας παρουσιάζει υψηλότερη μέση επίδοση από την Ομάδα ελέγχου. Εφαρμόζοντας το t-τέστ στη δοκιμασία προβλημάτων βρίσκουμε: t=5,38 (p<0,01). Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων ως προς τις μέσες επιδόσεις στην επίλυση αφηγηματικών προβλημάτων και επομένως επαληθεύεται η εναλλακτική υπόθεση.*
- *Στην εξέταση Δ η Ομάδα έρευνας εξακολουθεί να παρουσιάζει υψηλότερη μέση επίδοση από την Ομάδα ελέγχου (t=4,47 και p<0,01).*

Σημειώνουμε ότι σε ανάλογες διαπιστώσεις καταλήγουμε αν εφαρμόσουμε όλες τις προαναφερόμενες στατιστικές τεχνικές σε κάθε μεμονωμένο πρόβλημα.

## *4. Εμβάθυνση στα αποτελέσματα και συζήτηση*

Τα αποτελέσματα της έρευνας έφεραν στην επιφάνεια τις μεγάλες ικανότητες των μικρών παιδιών στην επίλυση προβλημάτων, τις δυσκολίες τους, την αξιοθαύμαστη ποικιλία των στρατηγικών τους, αλλά και τα λάθη τους. Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να αναλύσουμε αυτά τα θέματα.

### *4.1. Ικανότητες και δυσκολίες των νηπίων στη λύση αφηγηματικών προβλημάτων*

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει μια συγκριτική εικόνα της διαχρονικής εξέλιξης των ποσοστών επιτυχίας των δύο ομάδων στο καθένα από τα αφηγηματικά προβλήματα.

*Διαχρονική εξέλιξη των ποσοστών συνολικής επιτυχίας των δύο ομάδων στα αφηγηματικά προβλήματα*

| *Περιγραφή των αφηγηματικών προβλημάτων* | *ΟΜ.* | *Α* | *Β* | *Γ* | *Δ* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Αύξηση με άγνωστη την τελική κατάσταση (2+6=x) | $O_1$<br>$O_2$ | 8,5%<br>9,3% | 14,0%<br>11,6% | 72,9%<br>38,8% | 70,5%<br>41,1% |
| 2. Αύξηση με άγνωστη την τελική κατάσταση (3+4=x) | $O_1$<br>$O_2$ | 12,4%<br>13,2% | 24,0%<br>15,5% | 78,3%<br>40,3% | 79,1%<br>41,9% |
| 3. Ελάττωση με άγνωστη την τελική κατάσταση (8–6=x) | $O_1$<br>$O_2$ | 11,6%<br>10,1% | 23,3%<br>15,5% | 77,5%<br>35,7% | 72,1%<br>40,3% |
| 4. Ελάττωση με άγνωστη την τελική κατάσταση (8–4=x) | $O_1$<br>$O_2$ | 10,9%<br>12,4% | 24,8%<br>16,3% | 79,8%<br>46,5% | 75,2%<br>48,1% |
| 5. Αύξηση με άγνωστη τη προστιθέμενη ποσότητα (3+x=7) | $O_1$<br>$O_2$ | 7,8%<br>10,1% | 17,8%<br>12,4% | 53,5%<br>32,6% | 52,7%<br>34,1% |
| 6. Αύξηση με άγνωστη τη προστιθέμενη ποσότητα (2+x=8) | $O_1$<br>$O_2$ | 6,2%<br>7,0% | 14,7%<br>9,3% | 49,6%<br>31,8% | 49,6%<br>33,3% |
| 7. Εύρεση του όλου (2+4=x ) | $O_1$<br>$O_2$ | 11,6%<br>12,4% | 23,3%<br>15,5% | 82,9%<br>45,0% | 76,7%<br>48,8% |
| 8. Εύρεση του όλου (5+2=x), | $O_1$<br>$O_2$ | 10,9%<br>10,1% | 19,4%<br>13,2% | 78,3%<br>43,4% | 73,6%<br>46,5% |
| 9. Εύρεση του μέρους (7=4+x) | $O_1$<br>$O_2$ | 10,1%<br>10,1% | 23,3%<br>16,3% | 67,4%<br>35,7% | 62,8%<br>34,9% |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10. Εύρεση του μέρους (8=6+x) | $O_1$ | 9,3% | 21,7% | 63,6% | 61,2% |
| | $O_2$ | 9,3% | 15,5% | 34,1% | 35,7% |

Ο παραπάνω πίνακας παρέχει πληροφορίες για τα ποσοστά επιτυχίας των δύο ομάδων στο καθένα από τα 10 αφηγηματικά προβλήματα και μας επιτρέπει να διατυπώσουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

Ένα **πρώτο** εύρημα είναι ότι στην καθεμιά από τις μετρήσεις Β, Γ, Δ τα ποσοστά επιτυχίας των νηπίων της Ομάδας έρευνας είναι υψηλότερα από αντίστοιχα της Ομάδας ελέγχου για όλα τα προβλήματα. Τα παιδιά αποδείχθηκαν ικανά να λύνουν ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων με αφηγηματικές ιστορίες. Το πλαίσιο των προβλημάτων αντιπροσώπευε οικείες βιωματικές καταστάσεις που μπορούσαν να φέρουν στο φως τις άτυπες γνώσεις τους και είχαν νόημα για τα νήπια. Οι επιδόσεις τους ήταν υψηλές. Συγκεκριμένα, όταν τα παιδιά άρχιζαν την φοίτησή τους στην Α΄ τάξη του δημοτικού (Οκτώβριος 1993), τα ποσοστά επιτυχίας κυμαίνονταν από 49,6% μέχρι 82,9% στην Ομάδα έρευνας και από 31,8% μέχρι 48,8% στην Ομάδα ελέγχου. Τα αποτελέσματα της Ομάδας έρευνας είναι εντυπωσιακά, αν ληφθεί υπόψη ότι δεν εκπροσωπούνταν αστικά στρώματα (η κοινωνική σύνθεση του πληθυσμού στο νομό Κορινθίας περιλαμβάνει μεσοαστικά, μικροαστικά, αγροτικά και εργατικά στρώματα). Άλλη έρευνα με παρόμοια προβλήματα από δημόσια και ιδιωτικά δημοτικά σχολεία του νομού Αττικής αποκάλυψε στην αρχή της πρώτης σχολικής χρονιάς (Οκτώβριος 1995) ποσοστά επιτυχίας που κυμαίνονται από 26% μέχρι 72% (Καφούση Σ,. Ντζιαχρήστος Β., 1997, στην εν λόγω έρευνα το 78% των νηπίων ήταν από 6 μέχρι 6,5 ετών, σ. 13). Τέλος, πρόσφατη έρευνα (Λεμονίδης Χ., Χατζηλιαμή Μ., 1999) καταγραφής των άτυπων γνώσεων των εξάχρονων νηπίων (Μ.Ο. 5,8 έτη), η οποία πραγματοποιήθηκε σε δημόσια νηπιαγωγεία του νομού Φλώρινας λίγο πριν από την αποφοίτησή τους από το νηπιαγωγείο (Μάιος 1999), έδειξε ποσοστά επιτυχίας στην εκτέλεση των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης που κυμαίνονται από 14% μέχρι 50,5% και στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης από 13% ώς 54%.

Ένα **δεύτερο** εύρημα αφορά την επίδραση της σημασιολογικής δομής στη δυσκολία των προβλημάτων: προβλήματα που διαφέρουν στη σημασιολογική δομή, αλλά λύνονται με την ίδια αριθμητική πράξη, διαφέρουν στον βαθμό δυσκολίας. Αυτό το συμπέρασμα συμφωνεί με τα ευρήματα άλλων ερευνών (Vergnaud G., 1982 – Carpenter T.P., Moser J. M., 1982 – Riley M. S., Greeno J. G., Heller J. I., 1983). Παρότι κάθε πρόβλημα αποτελεί ξεχωριστή περίπτωση, αυτά μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες (Λεμονίδης Χ., 1998):

- στα εύκολα προβλήματα (αύξησης ή ελάττωσης με άγνωστη την τελική κατάσταση και εύρεσης του όλου), στα οποία τα νήπια της Ομάδας έρευνας επέδειξαν ποσοστά επιτυχίας από 70,5 μέχρι 82,9% και
- στα δύσκολα προβλήματα (ελλείποντος προσθετέου, εύρεσης του μέρους), στα οποία τα ποσοστά επιτυχίας για την Ομάδα έρευνας ήταν 49,6% μέχρι 67,4%.

Τα παιδιά κατανοούσαν εύκολα προβλήματα αλλαγής (αύξησης ή ελάττωσης) με άγνωστη την τελική κατάσταση και προβλήματα σύνθεσης (ή συνένωσης) με άγνωστο το όλον. Προβλήματα με αυξήσεις ή μειώσεις τα νήπια συναντούν πολύ νωρίς στον κοινωνικό τους περίγυρο. Το ίδιο και προβλήματα σύνθεσης στα οποία αναφέρονται μερικές γνώριμες τάξεις, που εσωκλείονται σε μία ολική τάξη (τα γατάκια και τα σκυλάκια είναι ζωάκια, τα αγόρια και τα κορίτσια είναι παιδιά). Τόσο το λεξιλόγιο όσο και οι ενυπάρχουσες εννοιολογικές σχέσεις αφομοιώθηκαν από τα παιδιά, παρότι οι σχέσεις εγκλεισμού στο σύνολό τους είναι δύσκολες για τα νήπια.

Τα παιδιά συνάντησαν δυσκολίες στα προβλήματα της δεύτερης κατηγορίας (ελλείποντος προσθετέου, εύρεσης του μέρους–διαμερισμός–). Οι κύριες δυσκολίες αφορούσαν κυρίως στην κατανόηση των προβλημάτων, δηλαδή τον σχηματισμό κατάλληλης εσωτερικής παράστασης (Κόσυβας Γ., 1996). Επίσης για ορισμένα προβλήματα ήταν δύσκολο στα νήπια να παραστήσουν τα δεδομένα με τα δάκτυλά τους. Η σχέση μέρους-όλου, η οποία ενυπάρχει στη σημασιολογική δομή των προβλημάτων αυτών είναι διαφορετικής φύσης. Παραταύτα οι επιδόσεις των παιδιών είναι υψηλές και οφείλονται κυρίως στην εφαρμογή του προγράμματος μαθηματικών δραστηριοτήτων που έδινε έμφαση στις σχέσεις ανάλυσης-σύνθεσης των αριθμών. Επιπρόσθετα τα περισσότερα προβλήματα είναι γνώριμα για τα παιδιά και είναι δυνατόν να επιστρατεύουν άτυπες στρατηγικές που έχουν σχηματίσει στον κοινωνικό τους περίγυρο. Τέλος θα μπορούσαν τα νήπια να σημειώσουν πρόοδο περνώντας από λύσεις προβλημάτων με άμεσες υλικές αναπαραστάσεις (με τα δάκτυλα) στη χρήση των σχέσεων ανάλυσης και ανασύνθεσης αριθμών. Η ερμηνεία αυτή δόθηκε σε μια έρευνα (Sorhian C., Vong K. I., 1995) με πεντάχρονα παιδιά τα οποία ήταν ικανά να δίνουν άμεσες απαντήσεις σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με άγνωστη την αρχική κατάσταση. Η σημασιολογική δομή των προβλημάτων αυτών μοιάζει με τα προβλήματα ελλείποντος προσθετέου. Ωστόσο τέτοιου είδους προβλήματα δεν χρησιμοποιήσαμε στην έρευνά μας, γιατί θεωρήσαμε ότι η σημασιολογική τους δομή είναι δύσκολη.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω ευρήματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα παιδιά της Ομάδας έρευνας τα οποία είχαν διδαχθεί τις έννοιες των αριθμών σύμφωνα με την προσέγγιση της ανάλυσης επέδειξαν μια ευρεία και σύνθετη ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Τα ευρήματά μας δείχνουν ότι τα νήπια της Ομάδας έρευνας υπερβαίνουν το επίπεδο ικανοτήτων που προδιαγράφει το επίσημο Αναλυτικό πρόγραμμα για το πρώτο εξάμηνο της Α΄ τάξης του δημοτικού σχολείου. Όμως και τα νήπια της Ομάδας ελέγχου σημείωσαν σημαντική πρόοδο, παρότι η σύγκριση μεταξύ τους δείχνει ένα στατιστικά σημαντικό προβάδισμα της Ομάδας έρευνας. Όλα τα νήπια τα οποία έλαβαν μέρος στην έρευνα άρχισαν το δημοτικό σχολείο με περισσότερες γνώσεις από τις συνήθεις.

Με μια πρώτη ματιά τα παραπάνω ευρήματα παρουσιάζουν μια αντίθεση προς τα καλά εδραιωμένα ευρήματα του Piaget. Η ανάδυση της πολύπλοκης γνώσης των παιδιών στην επίλυση προβλημάτων οφείλεται στις πλούσιες μαθησιακές εμπειρίες τις οποίες απέκτησαν τα νήπια από το πρόγραμμα διδασκαλίας. Το πρόγραμμα προσέγγισης του αριθμού με έμφαση στην ανάλυση, το οποίο εφαρμόσαμε στα νηπιαγωγεία βρισκόταν σε συμφωνία με τις προϋπάρχουσες γνώσεις των νηπίων. Υποθέτουμε ότι τα νήπια διέθεταν ένα λανθάνον σύνολο αρχών για την προσθετική ανάλυση και σύνθεση προτού μπορέσουν να αντιμετωπίζουν με επιτυχία το έργο του εγκλεισμού των τάξεων του Piaget. Ακόμα διέθεταν ένα γόνιμο πρόπλασμα της αριθμητικής διατήρησης των αριθμών προτού να είναι σε θέση να απαντούν στο πείραμα της κλασικής διατήρησης του Piaget. Οι γνώσεις αυτές περιορίζονταν στην αριθμητική διατήρηση και τον αριθμητικό εγκλεισμό και δεν επεκτείνονταν γενικά στη διατήρηση και τον λογικό εγκλεισμό τάξεων. Όλες οι προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών είναι χρήσιμες για την μεταγενέστερη εννοιολογική ανάπτυξη. Σύμφωνα με την L. Resnick αυτά είναι πρωτοποσοτικά λογικά σχήματα και αποτελούν το θεμέλιο της μαθηματικής ανάπτυξης των παιδιών (Resnick L. B. ,1983).

*4.2. Οι στρατηγικές των νηπίων στα αφηγηματικά προβλήματα*

Τα ευρήματα της διαχρονικής μας έρευνας για τις στρατηγικές που επιστρατεύουν τα παιδιά συμπλέουν με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών και σε κάποιο βαθμό τις συμπληρώνουν. Θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον της ανάλυσής μας σε δύο σημαντικά ευρήματα:

- στην ποικιλία των στρατηγικών που επινοούν τα νήπια για να λύσουν τα προβλήματα,
- την προτίμηση στρατηγικών με τα δάκτυλα από τα νήπια της έρευνας,

**Πρώτο** εύρημα της έρευνάς μας είναι ότι τα νήπια τόσο της Ομάδας έρευνας όσο και της Ομάδας ελέγχου μάς φανέρωσαν στη λύση των προβλημάτων μια μεγάλη ποικιλία στρατηγικών. Πολλοί ερευνητές (Carpenter & Moser 1982, Fuson 1992, Λεμονίδης 1998), όπως έχει αναφερθεί, ταξινομούν τις στρατηγικές των παιδιών στα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης σε τρεις κατηγορίες: στις στρατηγικές με υλικά, τις στρατηγικές αρίθμησης και τις στρατηγικές ανάκλησης στη μνήμη. Με βάση αυτή την ταξινόμηση τα αποτελέσματα μιας έρευνας (Λεμονίδης Χ. Χατζηλιαμή Μ. 1999) σε τέσσερα προβλήματα εύκολης σημασιολογικής δομής (μετασχηματισμού, ─δύο αύξησης και δύο ελάττωσης─) που πραγματοποιήθηκε σε νήπια του νομού Φλώρινας λίγο πριν από την αποφοίτησή τους από το νηπιαγωγείο είναι τα ακόλουθα.

| | | Διαδικασίες ανάκλησης | | Διαδικασίες αρίθμησης | | Διαδικασίες με υλικά | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Πρόβλημα* | *Επιτυχία* | *Άμεση ανάκληση* | *Ανάκληση πράξης* | *Αρίθμηση χ. δάκτυλα* | *Αρίθμηση με δάκτυλα* | *Δάκτυλα* | *Αντικείμενα* | *Υπολογ. δάκτυλα* | *Όχι απάντ.* |
| *$1^o$ 2+3* | *54%* | 21% | 0% | 22% | 3,5% | 0% | 0% | 7% | 10,5% |
| *$2^o$ 6+5* | *13%* | 2% | 1% | 2% | 2% | 0% | 2% | 2% | 17,5% |
| *$3^o$ 4−2* | *39%* | 33% | 1% | 0% | 0% | 0% | 1% | 1% | 6% |
| *$4^o$ 9−4* | *37%* | 20% | 5% | 2% | 0% | 2% | 3,5% | 3,5% | 10,5% |

Οι ερευνητές σχολιάζουν: «*ο μέσος όρος των μαθητών που είναι σε θέση να λύνει απλά προβλήματα προσθετικού τύπου είναι 36%. Η μεταβολή του μεγέθους των αριθμών δημιουργεί διαφορά επιτυχίας στα προβλήματα πρόσθεσης (54% επιτυχία στο πρόβλημα 3+2 και 13% στο 6+5). Αντίθετα στα προβλήματα αφαίρεσης δεν παρουσιάζεται διαφορά στην επιτυχία λόγω του μεγέθους των αριθμών*». Στη συνέχεια σχετικά με τις στρατηγικές σημειώνουν: «*Η επεξεργασία των σχετικών δεδομένων έδειξε ότι οι μαθητές του νηπιαγωγείου όταν επιλύουν προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης έχουν την τάση να δίνουν αμέσως την απάντηση. Το πρόβλημα στο οποίο χρησιμοποιήθηκαν περισσότερο οι διαδικασίες ανάκλησης είναι το $3^o$, 4−2, με ποσοστό 81%. Οι διαδικασίες αρίθμησης χρησιμοποιούνται από περισσότερα νήπια. Οι διαδικασίες αυτές χρησιμοποιήθηκαν περισσότερο (22%) στο πρώτο πρόβλημα πρόσθεσης (3+2,) επειδή οι αριθμοί ήταν μικροί και επομένως ήταν λίγα τα βήματα ανόδου πάνω στην αριθμογραμμή. Πολύ λίγοι μαθητές χρησιμοποίησαν τα αντικείμενα για να απαντήσουν. Τα παιδιά δεν γνωρίζουν να αναπαριστούν ένα απλό πρόβλημα με αντικείμενα και να υπολογίζουν με αυτά. Σε μερικές περιπτώσεις δοκιμάσαμε και μπορούσαν να το κάνουν αυτό τα νήπια μετά από δική μας καθοδήγηση*». Ανάκληση σημαίνει ανάκληση στη μνήμη.

Για τις ιδιαιτερότητες της δικής μας έρευνας με τα νήπια, στην οποία κατά την επίλυση των προβλημάτων δεν προβλεπόταν η χρήση άλλων υλικών αντικειμένων πλην των δακτύλων, επεξεργαστήκαμε ένα νέο σχήμα ταξινόμησης. Σύμφωνα με αυτό το σχήμα ταξινομήσαμε τις στρατηγικές που βρήκαμε σε πέντε επίπεδα: λανθασμένη απάντηση με έλλειψη κατάλληλης στρατηγικής, λανθασμένη απάντηση με σωστή στρατηγική, στρατηγικές απαρίθμησης των δακτυλικών σχηματισμών, στρατηγικές με ολική χρήση των δακτυλικών σχηματισμών συνδυασμένη με ανάλυση και ανασύνθεση πάνω στα δάκτυλα και νοερές στρατηγικές[8]. Η μεγάλη ποικιλία των στρατηγικών εντάσσεται σε αυτά τα πέντε διαφορετικά επίπεδα εννοιολογικής σκέψης. Το πλήθος διαφορετικών στρατηγικών που βρήκαμε ήταν εντυπωσιακό. Παρακάτω παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα από ένα μόνο πρόβλημα.

*Διαχρονική εξέλιξη των στρατηγικών των νηπίων κάθε ομάδας στο πρώτο λεκτικό πρόβλημα ελάττωσης με άγνωστη την τελική κατάσταση(8 – 4=x)*

| Κατάσταση αφαίρεσης (8 – 4=x) | | | Διδακτική επίδραση | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ΚΛ. | Στρατηγικές | **ΟΜ.** | **Α** | **Β** | **Γ** | **Δ** |
| **0** | Λανθασμένη απάντηση με έλλειψη κατάλληλης στρατηγικής (π.χ. εκτέλεση λανθασμένης πράξης, εκφώνηση απάντησης που συμπίπτει με κάποιον από τους δεδομένους αριθμούς, απάντηση στο «βρόντο», το παιδί δεν απαντά ή δηλώνει ότι δεν ξέρει κλπ.). | $O_1$<br>$O_2$ | 45,7%<br>45,0% | 42,6%<br>45,7% | 7,8%<br>27,1% | 7,8%<br>24,8% |
| **1** | Λανθασμένη απάντηση με κατάλληλη στρατηγική (π.χ. λανθασμένη προσέγγιση με δάκτυλα, λανθασμένη προσέγγιση με λεκτικές ή με εσωτερικές αριθμητικές διαδικασίες, λανθασμένη προσέγγιση με ανάκληση πρόσθεσης ή αφαίρεσης από τη Μ.Μ.Δ με λογική συνοχή ή μετά από υπολογιστικές επινοήσεις και δοκιμαστικές υποθέσεις κλπ.). | $O_1$<br>$O_2$ | 43,4%<br>42,6% | 32,6%<br>38,0% | 12,4%<br>26,4% | 17,1%<br>27,1% |
| **2** | Σωστή απάντηση με απαριθμήσεις δακτυλικών σχηματισμών (π.χ. μετά την απόσυρση απαριθμεί αυτά που μένουν, προσαρίθμηση, καθοδική αρίθμηση). | $O_1$<br>$O_2$ | 3,9%<br>4,7% | 8,5%<br>7,8% | 24,0%<br>26,4% | 22,5%<br>24% |
| **3** | Σωστή απάντηση με ολική χρήση των δακτυλικών σχηματισμών συνδυασμένη με ανάλυση και ανασύνθεση πάνω στα δάκτυλα (πρόσθεση ή αφαίρεση πάνω στα δάκτυλα). | $O_1$<br>$O_2$ | 4,7%<br>3,1% | 7,8%<br>1,6% | 30,2%<br>6,2% | 25,6%<br>6,2% |
| **4** | Σωστή απάντηση με νοερές στρατηγικές (π.χ. νοερή ανοδική ή καθοδική αρίθμηση –λεκτική ή εσωτερική–, άμεση ανάκληση πρόσθεσης ή αφαίρεσης στη Μ.Μ.Δ., επινόηση νοερών | $O_1$<br>$O_2$ | 2,3%<br>4,7% | 8,5%<br>7,0% | 25,6%<br>14% | 27,1%<br>17,8% |

[8] Στο σημείο αυτό θα ήταν απαραίτητο να αναφερθούμε στην κλίμακα μέτρησης που υιοθετήσαμε στα προβλήματα, γιατί οι επιλογές μας συνδέονται με υπονοούμενες αξιολογήσεις, οι οποίες δεν είναι άμεσα ορατές. Αρχικά αξιολογούνται οι στρατηγικές που επιστρατεύουν τα παιδιά και όχι μόνο η σωστή απάντηση. Η έμφαση αυτή υπαγορεύεται από τη διδακτική των μαθηματικών. Κατά δεύτερον εισάγονται οι στρατηγικές με χρήση των δακτυλικών σχηματισμών στην αξιολόγηση. Αυτές οι στρατηγικές είναι αποτέλεσμα της παγκόσμιας κουλτούρας και δεν θα έπρεπε να υποτιμηθούν. Έχουν μεγάλη διδακτική αξία, γιατί εμπλουτίζουν τις δραστηριότητες των παιδιών και τα οπλίζουν με αυτοπεποίθηση. Η αξιολόγηση πρέπει να βασίζεται στις δυνατότητες και όχι στις ανεπάρκειες των παιδιών. Δεν πρέπει να βασίζεται στην αφηρημένη έννοια του αριθμού την οποία έχουν σχηματίσει οι ενήλικοι. Γι' αυτό θεωρούμε ότι η πεντάβαθμη κλίμακα που υιοθετήθηκε είναι κατάλληλη για την έρευνά μας.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | στρατηγικών ανάλυσης και ανασύνθεσης – υπολογιστικές επινοήσεις και δοκιμαστικές υποθέσεις χωρίς δάκτυλα–κλπ.). | | | | | |
| | ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ | $O_1$ | 10,9% | 24,8% | 79,8% | 75,2% |
| | | $O_2$ | 12,4% | 16,3% | 46,5% | 48,1% |

Από αυτά τα δεδομένα προκύπτουν οι ακόλουθες διαπιστώσεις:

Στο εν λόγω πρόβλημα ελάττωσης με άγνωστη την τελική κατάσταση (8– 4=x) κατά την προεξέταση (Α ή pretest) τα συνολικά ποσοστά επιτυχούς λύσης του προβλήματος ήταν παραπλήσια για τις δύο ομάδες ($O_1$: 10,9%, $O_2$: 12,4%, t=–0,45, p=0,65). Οι τύποι των άτυπων στρατηγικών των νηπίων κατά την αρχική εξέταση είναι παρόμοιες στις δύο ομάδες. Επίσης κατά τη μέτρηση Δ (posttest) τα ποσοστά συνολικής επιτυχίας για το πρόβλημα αυτό είναι $O_1$: 75,2%, $O_2$: 48,1%. Αποδεικνύεται ότι η υπεροχή της Ομάδας έρευνας διατηρείται (t=4,96, p<0,01).

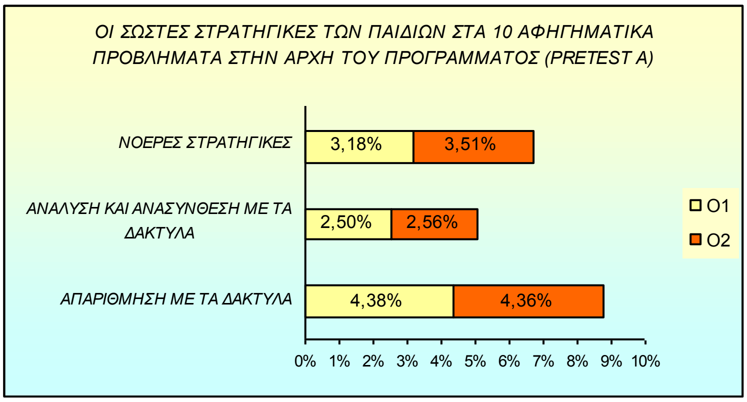
Υποβάλλοντας σε στατιστικό έλεγχο την υπόθεση παραλληλίας των δύο γραμμών εξέλιξης διαπιστώνουμε στατιστικά σημαντική διαφορά στην αλληλεπίδραση της διαχρονικής εξέλιξης των μέσων επιδόσεων με τον τύπο της ομάδας (GLM Repeated Measures-Sphericity Assumed: F=23,57, p<0,01). Αυτό το αποτέλεσμα της στατιστικής ανάλυσης, σε συνδυασμό με τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η Ομάδα έρευνας εμφανίζει μεγαλύτερη πρόοδο από την Ομάδα ελέγχου.

Τέλος οι στρατηγικές που διαπιστώνονται στην Ομάδα έρευνας και στην Ομάδα ελέγχου αντίστοιχα είναι: νοερές στρατηγικές $O_1$: 27,1%, $O_2$: 17,8%, στρατηγικές ανάλυσης και ανασύνθεσης πάνω στα δάκτυλα $O_1$: 25,6%, $O_2$: 6,2% στρατηγικές απαρίθμησης δακτύλων $O_1$: 22,5%, $O_2$: 24%. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι οι στρατηγικές που επιλέγουν τα παιδιά της Ομάδας έρευνας είναι ωριμότερες από τις αντίστοιχες της Ομάδας ελέγχου.

Οι επινοημένες στρατηγικές των παιδιών, αποδεικνύουν την ενεργητικότητα των νηπίων στην ερμηνεία των προβλημάτων. Η σύγκριση των στρατηγικών που παρατηρήθηκαν με αυτές που διδάχτηκαν αποκαλύπτει ότι υπήρξαν στρατηγικές που δεν είχαν διδαχθεί από τις νηπιαγωγούς με σαφή τρόπο. Ωστόσο στις συνηθέστερες, οι επινοήσεις των παιδιών συνυπήρχαν με προσωπικές ανακαλύψεις, με επιδράσεις της διδασκαλίας και με εμπειρίες των παιδιών από τις αλληλεπιδράσεις με τον κοινωνικό τους περίγυρο.

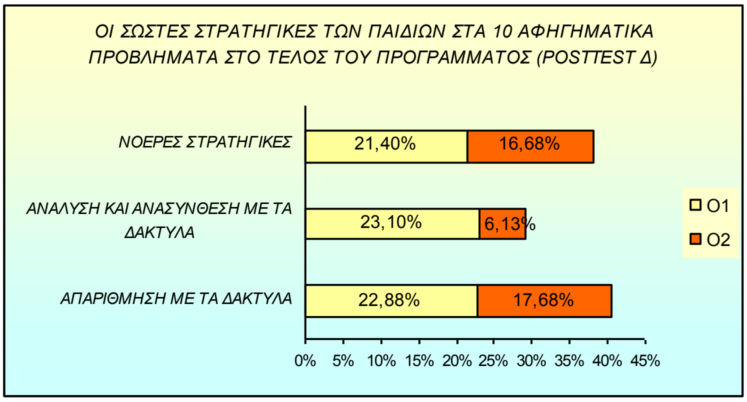
Ανάλογα αποτελέσματα παρατηρήθηκαν και στα άλλα 9 αφηγηματικά προβλήματα. Όμως ελλείψει διαθέσιμου χώρου δεν παρουσιάζουμε αναλυτικά αποτελέσματα για τα υπόλοιπα προβλήματα.

**Δεύτερο** εύρημα της έρευνάς μας αποτελεί η προτίμηση των παιδιών σε στρατηγικές με χρήση των δακτύλων τους. Το παρακάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζει την κατανομή των τριών σωστών στρατηγικών των δύο ομάδων κατά το pretest (μέσοι όροι ποσοστών).




Η πρώτη διαπίστωση που προκύπτει από το παραπάνω γράφημα είναι ότι τα μέσα ποσοστά επιτυχίας των πεντάχρονων παιδιών στη λύση αφηγηματικών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης είναι μικρά ($O_1$: 9,96%, $O_2$: 10,43%), εφόσον είχαν να λύσουν προβλήματα με σχετικά μεγάλους αριθμούς και δεν είχαν στη διάθεσή τους άλλα εποπτικά αντικείμενα εκτός από τα δάκτυλά τους, ενώ διέθεταν ελάχιστες άτυπες γνώσεις για τη χρήση τους. Η δεύτερη διαπίστωση αφορά την προνομιακή χρήση των δακτύλων από τα παιδιά. Στις άτυπες στρατηγικές συγκαταλέγονται τόσο η απαρίθμηση των δακτύλων όσο και η ολική χρήση των δακτυλικών σχηματισμών συνδυασμένη με ανάλυση και ανασύνθεση πάνω στα δάκτυλα. Όπως προκύπτει από την ανάγνωση του ραβδογράμματος, οι νοερές στρατηγικές συγκέντρωσαν τις προτιμήσεις μιας πολύ μικρής μερίδας νηπίων του δείγματος ($O_1$: 3,18%, $O_2$: 3,51%). Οι περισσότερες σωστές στρατηγικές επιτεύχθηκαν με τα δάκτυλα ($O_1$: 6,88%, $O_2$: 6,92%)

Κατά τη φάση της διδασκαλίας οι επιδόσεις των νηπίων της Ομάδας έρευνας και της Ομάδας ελέγχου βελτιώνονται και οι στρατηγικές τους μετεξελίσσονται. Το παρακάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζει την κατανομή των τριών σωστών στρατηγικών των δύο ομάδων κατά το posttest (μέσοι όροι ποσοστών).




Ειδικότερα για τις τρεις στρατηγικές έχουμε να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα.

Η πρώτη διαπίστωση που προκύπτει από την ανάγνωση του παραπάνω γραφήματος είναι η υπεροχή των εξάχρονων νηπίων της Ομάδας έρευνας από τα αντίστοιχα νήπια της Ομάδας ελέγχου ($O_1$: 67,38%, $O_2$: 40,49%) και ήταν αποτέλεσμα του προγράμματος διδασκαλίας. Η δεύτερη διαπίστωση αφορά την προνομιακή χρήση των δακτύλων από τα νήπια. Οι στρατηγικές που ευνοήθηκαν στη διδασκαλία της Ομάδας έρευνας ήταν οι στρατηγικές με χρήση των δακτυλικών σχηματισμών, κυρίως η χρήση των δακτυλικών σχηματισμών ως ολοτήτων. Στην κατηγορία των στρατηγικών ανάλυσης, ανασύνθεσης και υπολογισμού πάνω στα δάκτυλα τα νήπια δεν απαριθμούν τα δάκτυλά τους ένα-ένα, αλλά χρησιμοποιούν τους δακτυλικούς σχηματισμούς ως ολότητες. Ανάλογα με το πρόβλημα το οποίο είχαν τα νήπια να λύσουν χρησιμοποίησαν και διαφορετικές στρατηγικές. Για παράδειγμα στην κατάσταση αφαίρεσης 8−4=x παρατηρήθηκαν οι ακόλουθες διαδικασίες: α) βγάζουν άμεσα 8 δάκτυλα, 4 στο ένα χέρι και τέσσερα στο άλλο και ύστερα αποσύρουν τα 4 και δείχνουν ως απάντηση τα άλλα: 8−4=(4+4)−4=4. β) σηκώνουν άμεσα 8 δάκτυλα, πέντε στο αριστερό χέρι και 3 στο δεξί, ύστερα βγάζουν τα τρία δάκτυλα του δεξιού χεριού και το μικρό δακτυλάκι του αριστερού και απαντούν τέσσερα 8−4=(5+3) −(3+1)=5−1=4.Το εκπληκτικό όμως είναι ότι τέτοιες στρατηγικές βρέθηκαν και στην Ομάδα ελέγχου, παρά το γεγονός ότι στο πρόγραμμα δραστηριοτήτων δεν έγινε η παραμικρή αναφορά ούτε στην απαρίθμηση των δακτύλων ούτε στην ολική χρήση των δακτυλικών σχηματισμών. Όμως ποιες είναι οι αιτίες για την αυξημένη χρήση των δακτυλικών σχηματισμών;

Ο **πρώτος** λόγος, ο οποίος δεν πρέπει να υποτιμηθεί, είναι η απουσία υλικών αντικειμένων (π.χ. κυβάκια, μάρκες) από την πειραματική εξέταση. Τα νήπια έλυσαν τα αφηγηματικά προβλήματα χρησιμοποιώντας νοερές στρατηγικές ή στρατηγικές παράστασης των δεδομένων με τους δακτυλικούς σχηματισμούς. Είναι αξιοσημείωτο ότι στα προβλήματα με κρύψιμο παρατηρήθηκαν σε λίγα παιδιά στρατηγικές παραστατικής προσαρίθμησης και καθοδικής αρίθμησης, ενώ τα περισσότερα χρησιμοποίησαν τα δάκτυλά τους. Τέτοιες στρατηγικές έχουν παρατηρηθεί και σε άλλες ανάλογες έρευνες (Steffe L.- P., von Glasersfeld E., Richards J., Cobb P., 1983 – Steffe L.-P., Cobb P., 1988).[9]

Ένας **δεύτερος** λόγος προτίμησης των στρατηγικών με τα δάκτυλα είναι οι δυσκολίες που ενυπάρχουν στις νοερές στρατηγικές σκέψης (άμεση ανάκληση στη μνήμη, υπολογισμός με ανάλυση και ανασύνθεση, λεκτική ή αφηρημένη προσαρίθμηση ή καθοδική αρίθμηση κλπ.). Ορισμένοι ερευνητές θεωρούν ως δύσκολες διαδικασίες την άμεση ή έμμεση ανάκληση πράξεων στη μνήμη και προτείνουν τις στρατηγικές αρίθμησης (Fuson K.-C., Secada W.-G. 1986 – Fuson K.-C., 1986). Πάντως η χρήση των δακτύλων παρότι δεν ήταν εύκολη χρησιμοποιήθηκε αυθόρμητα από την πλειονότητα των νηπίων. Πολλά παιδιά αρχικά είχαν δυσκολίες στην παράσταση συλλογών με τα δάκτυλα κατά τρόπο ευέλικτο και αποτελεσματικό. Οι δυσκολίες αυτές δεν σχετίζονται μόνο με την κατανόηση των αριθμών, αλλά και με τους αργούς νευρομυϊκούς συντονισμούς. Κάλλιστα οι νηπιαγωγοί στις δραστηριότητες λεπτής κινητικότητας θα μπορούσαν να εντάξουν και την εξάσκηση των νηπίων στους δακτυλικούς σχηματισμούς.

Τα υψηλά αποτελέσματα της Ομάδας έρευνας οφείλονται στη συνεπίδραση του προγράμματος διδασκαλίας και του πολιτισμού, ενώ οι επιδόσεις της Ομάδας ελέγχου ανάγονται κατά βάση σε εξωσχολικές επιδράσεις. Οι δακτυλικοί σχηματισμοί συνιστούν παραστάσεις των αριθμών που κληροδοτεί ο πολιτισμός. Είναι εύχρηστα μέσα και βρίσκονται πάντοτε στη διάθεση του παιδιού. Επιπλέον είναι μέσα πολυαισθητήριας και πολυλειτουργικής μάθησης και μπορούν να συνδυάζονται με την αρίθμηση ή με την ανάλυση των αριθμών και δέχονται χρήσεις σε διαφορετικά

[9] Steffe L.- P., von Glasersfeld E., Richards J., Cobb P. (1983), *Children's counting types: Philosophy, theory, and application,* Praeger Scientific, New York. Steffe L.-P., Cobb P. (1988), *Construction of arithmetical meanings and strategies,* Springer-Verlag, New York. Χωρίς να θεωρούμε ότι διαπράττουμε αυθαιρεσία στη στατιστική επεξεργασία προτιμήσαμε να ενσωματώσουμε αυτά τα νήπια στην ομάδα εκείνων που απαριθμούν πάνω στα δάκτυλα. Μολονότι διαφέρουν στο επίπεδο αφαίρεσης, κατά βάση είναι και οι δύο στρατηγικές σύστασης παραστατικών συλλογών με αριθμήσιμες μονάδες (στη μια περίπτωση παριστάνουν τις ποσότητες του προβλήματος με τα δάκτυλα, ενώ στην άλλη αγγίζουν πάνω στο σκέπασμα παριστάνοντας τα κρυμμένα αντικείμενα).

επίπεδα αφαίρεσης: αντιληπτικό, παραστατικό, αφηρημένο. Είναι μια πρόσφορη παιδαγωγική γέφυρα που συνδέει το συγκεκριμένο με το αφηρημένο.

Τα δάκτυλα για πολλά χρόνια ήταν ένα παρεξηγημένο μέσον διδασκαλίας. Αυτό παρατηρείται λιγότερο στην παραδοσιακή εμπειρική προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών και περισσότερο στην δομική προσέγγιση των μοντέρνων μαθηματικών. Τόσο τα ισχύοντα αναλυτικά προγράμματα του νηπιαγωγείου και της Α΄ τάξης του δημοτικού σχολείου, όσο και τα αντίστοιχα βιβλία αγνοούν παντελώς τα δάκτυλα (Βαϊνάς Κ.,1987). Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται διεθνώς μια τάση επαναφοράς τους. Τα δάκτυλα θεωρείται ότι έχουν υπόσταση αριθμών (Neuman D., 1987) (finger-numbers), ότι αποτελούν συλλογές-μάρτυρες (Brissiaud R., 1991) ή ότι συνδέουν το απτό και συγκεκριμένο με το ασαφές και αφηρημένο (Hughes M., 1986). Εύγλωττη είναι η ακόλουθη επισήμανση: «*Συνιστούμε στα παιδιά να χρησιμοποιούν τα δάκτυλα, όχι μόνο γιατί φυλογενετικά και οντογενετικά προσφέρονται ως το πρώτο και φυσικότερο μέσο αναπαράστασης με βάση το οποίο ο άνθρωπος ανάγει τα συγκεκριμένα αντικείμενα σε αφηρημένα σύμβολα, αλλά και διότι η χρήση των δακτύλων επιτρέπει στα παιδιά να χρησιμοποιούν την πεντάδα (τα δάκτυλα του ενός χεριού) και στη συνέχεια στη δεκάδα (τα δάκτυλα των δύο χεριών) ως βάσεις με τις οποίες ασκούνται στη συνέχεια στις αριθμητικές πράξεις*» (Καψάλης Α., Λεμονίδης Χ., 1999).

Σύμφωνα με τον M. Hughes τα δάκτυλα μπορούν να διαδραματίσουν πολύ σπουδαίο ρόλο στη σύνδεση του αφηρημένου και του συγκεκριμένου, γιατί μπορούν ταυτόχρονα να παριστάνουν απόντα αντικείμενα, και επιπλέον να είναι αντικείμενα από μόνα τους. Η παιδαγωγική σημασία τους για το νηπιαγωγείο είναι θεμελιώδης, γιατί παρέχουν στα παιδιά πλούσιες προνοερές εμπειρίες.

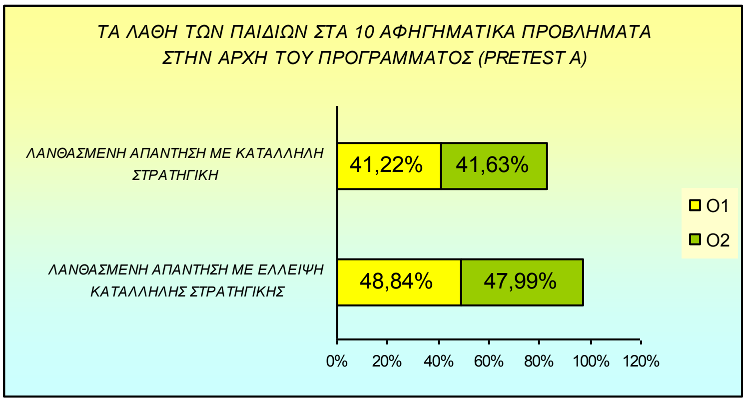
### *4.3. Τα λάθη των νηπίων στα αφηγηματικά προβλήματα*

Το τελευταίο εύρημα της έρευνάς μας αφορά τα λάθη των παιδιών. Σύμφωνα με το σχήμα ταξινόμησης που υιοθετήσαμε ταξινομήσαμε τα λάθη των παιδιών σε δύο κατηγορίες: λανθασμένες απαντήσεις με έλλειψη κατάλληλης στρατηγικής και λανθασμένες απαντήσεις με κατάλληλη στρατηγική. Ας δούμε ποια συγκεκριμένα λάθη εντάσσονται στις δύο αυτές κατηγορίες:

- λανθασμένες απαντήσεις με έλλειψη κατάλληλης στρατηγικής: π.χ. εκτέλεση λανθασμένης πράξης, εκφώνηση απάντησης που συμπίπτει με κάποιον από τους δεδομένους αριθμούς, απάντηση στο «βρόντο», το παιδί δεν απαντά ή δηλώνει ότι δεν ξέρει κλπ.,
- λανθασμένες απαντήσεις με κατάλληλη στρατηγική: π.χ. λανθασμένη προσέγγιση με δάκτυλα, λανθασμένη προσέγγιση με λεκτικές ή με εσωτερικές αριθμητικές διαδικασίες, λανθασμένη προσέγγιση με ανάκληση πρόσθεσης ή αφαίρεσης στη Μ.Μ.Δ με λογική συνοχή ή μετά από υπολογιστικές επινοήσεις και δοκιμαστικές υποθέσεις κλπ.

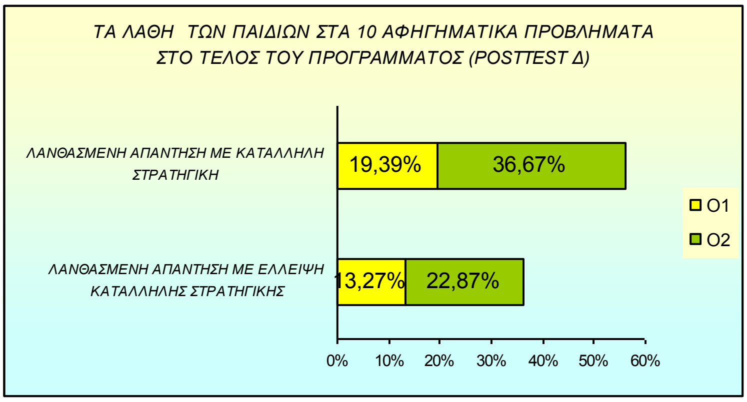
Η διάκριση των λαθών στις παραπάνω δύο κατηγορίες έχει θεμελιώδη παιδαγωγική σημασία. Στην πρώτη κατηγορία τα παιδιά επιστρατεύουν μη πρόσφορη στρατηγική και οι απαντήσεις τους φανερώνουν λανθασμένη αναπαράσταση του προβλήματος (π.χ. αντί αφαίρεσης εκτελούν πρόσθεση κλπ.). Επίσης ενεργούν σύμφωνα με το πειραματικό συμβόλαιο –κατ' αναλογία προς το διδακτικό συμβόλαιο– (π.χ. δίνουν μια απάντηση «στο βρόντο» κλπ.). Στην περίπτωση αυτή δεν είναι φανερή η παρουσία κάποιας στρατηγικής. Τέλος στην κατηγορία αυτή συγκαταλέγεται και η άρνηση συνεργασίας από την πλευρά του νηπίου. Στην δεύτερη κατηγορία τα παιδιά επιλέγουν σωστή στρατηγική, αλλά καταλήγουν σε λανθασμένο αποτέλεσμα. Το λάθος είναι μαθηματικής φύσης και μπορεί να διορθωθεί με εξάσκηση στις κατάλληλες αριθμητικές διαδικασίες.

Το παρακάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζει την κατανομή των δύο τύπων λαθών από τα νήπια των δύο ομάδων κατά το pretest (μέσοι όροι ποσοστών).




Η πρώτη διαπίστωση που προκύπτει από το παραπάνω γράφημα είναι ότι τα μέσα ποσοστά λαθών των πεντάχρονων παιδιών στη λύση αφηγηματικών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης είναι μεγάλα ($O_1$: 90,06%, $O_2$: 89,62%), εφόσον είχαν να λύσουν προβλήματα με σχετικά μεγάλους αριθμούς και δεν είχαν στη διάθεσή τους άλλα εποπτικά αντικείμενα εκτός από τα δάκτυλά τους, ενώ διέθεταν ελάχιστες άτυπες γνώσεις για τη χρήση τους. Η δεύτερη διαπίστωση μας δείχνει ότι δύο τύποι λαθών μοιράζονται σχεδόν ισότιμα στις δύο ομάδες της έρευνας. Μεγάλα ποσοστά λαθών παρατηρούνται και στη δεύτερη μέτρηση ($O_1$: 79,38%, $O_2$: 85,89%), παρότι τα παιδιά της ομάδας έρευνας διαπράττουν λιγότερα λάθη. Η πιο συνήθης απάντηση των παιδιών είναι μια απάντηση «στο βρόντο». Ποιες εξηγήσεις θα μπορούσαν να δοθούν γι' αυτή την εξέλιξη; Μια εξήγηση είναι ότι τα παιδιά ερμηνεύουν με αξιοθαύμαστη λογική συνοχή τις προθέσεις μας και μάς αναφέρουν έναν αριθμό, ο οποίος σε μας φαίνεται ουρανοκατέβατος.

Το παρακάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζει την κατανομή των δύο τύπων λαθών από τα νήπια των δύο ομάδων κατά το posttest (μέσοι όροι ποσοστών).




Τα ποσοστά των λαθών μειώνονται στις μετρήσεις Γ και Δ. Στη μέτρηση Δ τα μέσα ποσοστά των λαθών είναι $O_1$: 32,66%, $O_2$: 59,54%. Η σύγκριση της εσωτερικής σχέσης των δύο κατηγοριών λαθών αποκαλύπτει ελαφρά υπεροχή των λανθασμένων απαντήσεων με κατάλληλη στρατηγική.

Από την παραπάνω ανάλυση, προκύπτει ότι τα λάθη που διαπράττουν τα παιδιά δεν είναι τυχαία και μεμονωμένα φαινόμενα, αλλά επαναλαμβάνονται με σύστημα και επιμονή. Η συστηματικότητα των λαθών των παιδιών και οι κανονικότητες στις οποίες υπακούουν μάς οδηγούν στην διαπίστωση ότι οι απαντήσεις τους δεν οφείλονται στην απρόσεκτη και αδιάφορη συμπεριφορά τους. Αυτό το εύρημα εμφανίζεται και σε άλλες έρευνες πάνω στη λύση αριθμητικών προβλημάτων (De Corte E., Verschaffel L.1991, Λεμονίδης 1988). Σε πολλές περιπτώσεις τα λάθη των παιδιών συνιστούν συστηματικές εφαρμογές λανθασμένων στρατηγικών. Όταν τα παιδιά δεν διαθέτουν κατάλληλες στρατηγικές για τη λύση ενός προβλήματος, επινοούν λανθασμένες στρατηγικές, με τον ίδιο τρόπο που κατασκευάζουν τις σωστές στρατηγικές (Ravestein J., Sensevy G., 1994). Τα λάθη δεν πρέπει να θεωρούνται ως ελλείψεις και ανεπάρκειες, αλλά ως το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας που έχει νόημα για τα παιδιά. Τα λάθη είναι οι θεωρήσεις των παιδιών για τις μαθηματικές έννοιες. Πηγάζουν από τον κόσμο των γνώσεων και των εμπειριών τους. Έχουν λογική συνοχή για τα ίδια τα παιδιά, αφού συμφωνούν με το δικό τους τρόπο σκέψης, γι' αυτό και δυσκολεύονται να τα αλλάξουν (Μπούφη Α., 1995γ).

Τα λάθη των παιδιών είναι μια πολύτιμη πηγή πληροφοριών για τη νηπιαγωγό. Δίνουν αφορμές για γόνιμες συζητήσεις των μαθηματικών νοημάτων και με τα άλλα μέλη της τάξης των νηπίων. Στις κοινές αυτές συζητήσεις τα νήπια αναστοχάζονται τα λάθη τους και μαθαίνουν από αυτά. Ο πλούσιος και αδιάλειπτος διάλογος με τα παιδιά δίνει στη νηπιαγωγό τη δυνατότητα να αξιολογεί την πορεία της μαθησιακής διαδικασίας, η οποία με τη σειρά της καθρεφτίζει την ποιότητα της διδασκαλίας. Από τα λάθη των παιδιών μαθαίνει και η ίδια νηπιαγωγός και μπορεί να πάρει αποφάσεις για τη βελτίωση της διδασκαλίας. Η γνώση της μαθηματικής σκέψης των νηπίων επιτρέπει στη νηπιαγωγό να προσαρμόσει τις διδακτικές δραστηριότητες και τις ερωτήσεις της στις ανάγκες των νηπίων.

## *5. Σύνοψη των αποτελεσμάτων και συμπεράσματα*

Ήδη έχουν παρουσιαστεί και συζητηθεί τα αποτελέσματα της πειραματικής δοκιμασίας των 10 αφηγηματικών προβλημάτων.

Στο πλαίσιο των προκαταρκτικών ελέγχων διαπιστώθηκε ότι οι συντελεστές αξιοπιστίας της πειραματικής μεθόδου ήταν ισχυροί. Στην επίλυση των εν λόγω προβλημάτων αποδείχτηκε ότι η Ομάδα έρευνας υπερέχει στην πρόοδο από την Ομάδα ελέγχου κατά τη χρονική διάρκεια εκτέλεσης του πειραματισμού (Α–Β–Γ). Στη διαχρονική εξέλιξη των επιδόσεων των δύο ομάδων παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφορές (κριτήριο F– γενικό γραμμικό μοντέλο επαναληπτικών μετρήσεων).

Με την εφαρμογή του στατιστικού t-τεστ διαπιστώθηκε ότι οι δύο ομάδες κατά το pretest (Α) ήταν ισοδύναμες. Επίσης από τη συγχρονική σύγκριση των μέσων επιδόσεων των δύο ομάδων κατά τις διαφορετικές χρονικές στιγμές Β, Γ και Δ με τη χρήση του t-τεστ αποδείχθηκε ότι στα 10 αφηγματικά προβλήματα υπερέχει η Ομάδα έρευνας. Τα αποτελέσματα του t-τεστ ενισχύθηκαν με την ανάλυση των συνδιακυμάνσεων.

Μετά την ολοκλήρωση του προγράμματος, στα 10 αφηγηματικά προβλήματα τα τελικά ποσοστά επιτυχίας των εξάχρονων νηπίων της Ομάδας έρευνας[10] κατά τις μετρήσεις Γ και Δ είναι υψηλά (κυμαίνονται από 49,6% μέχρι 82,9%). Τα αντίστοιχα ποσοστά επιτυχίας των εξάχρονων νηπίων της Ομάδας ελέγχου[11] κατά τις μετρήσεις Γ και Δ είναι υψηλά (κυμαίνονται από 31,8% μέχρι 48,8%). Τα ποσοστά επιτυχίας

[10] Η ηλικία των νηπίων της Ομάδας έρευνας κυμαίνεται από 5,51 ώς 6,52 έτη (μέση ηλικία 6,02 έτη και τυπική απόκλιση 0,29 έτη).
[11] Η ηλικία των νηπίων της Ομάδας ελέγχου κυμαίνεται από 5,52 ώς 6,51 έτη (μέση ηλικία 6,06 έτη και τυπική απόκλιση 0,27 έτη).

των νηπίων σε κάθε πρόβλημα εξαρτώνται από σημασιολογική του δομή και ειδικότερα από τη σχέση μέρους-όλου, η οποία ενυπάρχει στην εκφώνησή του.

Η εξοικείωση των νηπίων με δραστηριότητες ανάλυσης των αριθμών ευνόησε την ανάπτυξη των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων παρότι τα ίδια τα προβλήματα στα οποία ρωτήθηκαν δεν τα είχαν διδαχθεί. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας δείχνουν ότι τα παιδιά είναι ικανά να εφαρμόζουν τη γνώση ανάλυσης σε άλλες όψεις εννοιών των αριθμών (αφηγηματικά προβλήματα πρόσθεσης, αφαίρεσης, ελλείποντος προσθετέου). Τέλος τα αποτελέσματα αυτά διαρκούν στον χρόνο, όπως αποδείχθηκε από την επανάληψη της δοκιμασίας όταν τα παιδιά βρίσκονταν στην Α΄ τάξη του Δημοτικού σχολείου. Αυτή η υπεροχή της πειραματικής ομάδας ($O_1$) έναντι τη ομάδας ελέγχου ($O_2$) πρέπει να αποδοθεί στη μοναδική ειδοποιό διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων, δηλαδή στην ειδική διδακτική παρέμβαση που οικοδομεί πάνω στις αριθμητικές προεμπειρίες των νηπίων, τη χρήση των οικείων στα παιδιά ή βιωματικά ελκυστικών εποπτικών μέσων και την ανάλυση-σύνθεση των αριθμών.

Όμως από την παρουσίαση των παραπάνω αποτελεσμάτων προκύπτει ότι στα αφηγηματικά προβλήματα, τα νήπια της Ομάδας έρευνας υπερέχουν όχι μόνο στο συνολικό ποσοστό επιτυχίας, αλλά και στην ποιότητα των στρατηγικών. Οι στρατηγικές που επιλέγουν τα παιδιά της Ομάδας έρευνας είναι ωριμότερες από τις αντίστοιχες της Ομάδας ελέγχου. Αυτό φαίνεται τόσο από τα αυξημένα ποσοστά σε όλες τις στρατηγικές όσο και από τη μεγάλη υπεροχή της Ομάδας έρευνας στις στρατηγικές ανάλυσης πάνω στα δάκτυλα ($O_1$: 23,10, $O_2$: 6,13), οι οποίες συνιστούν το ενδιάμεσο προνοερό στάδιο για τη μετάβαση από τις διαδικασίες με αντικείμενα στις στρατηγικές χωρίς αντικείμενα. Σε όλες τις δοκιμασίες που αφορούσαν τις στρατηγικές ανάλυσης-σύνθεσης-υπολογισμού με τη βοήθεια των δακτυλικών σχηματισμών η υπεροχή της Ομάδας έρευνας ($O_1$) είναι σαφέστατη. Ενώ τα παιδιά της Ομάδας ελέγχου ($O_2$) προτιμούν την απαρίθμηση, τα παιδιά της Ομάδας έρευνας ($O_1$) τείνουν φανερά προς στρατηγικές άμεσης εκτίμησης συλλογών (subitizing) και ανάλυσης-σύνθεσης, κάτι που επιβεβαιώνει το υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης και γενικά την μεγαλύτερη ωριμότητα της αριθμητικής τους σκέψης. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η εξοικείωση των παιδιών με την ανάλυση και ανασύνθεση δακτυλικών σχηματισμών βοηθά στον προοδευτικό σχηματισμό της έννοιας του αριθμού. Θα ήταν πολύ ενδιαφέρον αυτή η υπόθεση να δοκιμαστεί σε παιδιά της πρώτης τάξης του δημοτικού σχολείου κυρίως στην ανοδική και καθοδική υπέρβαση της δεκάδας. Παραταύτα κάθε νήπιο δεν παρουσιάζει συνέπεια στη χρήση των στρατηγικών. Οι στρατηγικές διαφέρουν τόσο από πρόβλημα σε πρόβλημα όσο και στο ίδιο πρόβλημα. Συχνά τα νήπια στην προσπάθειά τους να δώσουν μια απάντηση στο πρόβλημα αλλάζουν στρατηγική. Επιστρατεύουν ποικίλες στρατηγικές από αυτές που γνωρίζουν ή αναπροσαρμόζουν τις γνώριμες στρατηγικές τους και επινοούν νέες.

Το πρόγραμμα προσχολικής αγωγής περιορίζεται σε μια υποτονική επαφή και εξοικείωση με την έννοια του αριθμού και τις αριθμητικές γνώσεις που σχετίζονται με αυτήν. Ένα από τα θεμελιώδη γνωρίσματα του αριθμού, η ανάλυση των αριθμών, απουσιάζει. Ενώ παρακάμπτονται δραστηριότητες ανάλυσης του αριθμού εισάγονται προβληματικές καταστάσεις των τεσσάρων πράξεων.

Θα μπορούσε να αντιταχθεί ο ισχυρισμός ότι η παράκαμψη της έννοιας αυτής συνιστά μια συνειδητή διδακτική επιλογή, επειδή απαιτεί μια ικανότητα την οποία δεν διαθέτει ακόμα το νήπιο. Όμως δεν είναι έτσι, γιατί η απουσία της ανάλυσης του αριθμού ή η μειωμένη θέση της συνεχίζεται και στις πρώτες τάξεις του δημοτικού. Στα υπάρχοντα εγχειρίδια της Α΄ τάξης του δημοτικού σχολείου, ενώ ο βασικός στόχος είναι «ο υπολογισμός με ανάλυση και σχηματισμό της δεκάδας», ο στόχος αυτός δεν επιτυγχάνεται, γιατί οι εμπειρίες των παιδιών πάνω στην ανάλυση μικρών αριθμών δεν είναι επαρκείς.

Η συνήθης διδακτική προσέγγιση στο νηπιαγωγείο σύμφωνα με τη λογική του ισχύοντος Αναλυτικού προγράμματος παρουσιάζει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: μονομερής προσκόλληση στις προαπαιτούμενες λογικές έννοιες, υποτίμηση της σημασίας της ανάλυσης των αριθμών, όχι ανοιχτή προσέγγιση, απουσία χρήσης των δακτύλων, δογματική και μηχανική μεταφορά ψυχολογικών πειραμάτων στη διδασκαλία.

Το μεγαλύτερο μέρος του προγράμματος των μαθηματικών του νηπιαγωγείου περιλαμβάνει ικανότητες οι οποίες άμεσα ή έμμεσα εξαρτώνται από την κατανόηση των σχέσεων ανάλυσης των αριθμών. Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης δείχνουν ότι η πρώιμη διδακτική παρέμβαση, η οποία δίνει έμφαση στην ανάλυση των αριθμών, μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη των εννοιών του αριθμού και των ικανοτήτων που συνδέονται με αυτές. Οι διαφορές, οι οποίες βρέθηκαν ανάμεσα στις δύο ομάδες, φαίνεται ότι οφείλονται στη διαφορά της έμφασης που ενυπάρχει ανάμεσα στις δύο εκπαιδευτικές σειρές (την δέσμη βιωματικών δραστηριοτήτων προβληματισμού και επικοινωνίας και το συνηθισμένο πρόγραμμα μαθηματικών του νηπιαγωγείου).

Επομένως οι εξοικείωση των νηπίων με δραστηριότητες ανάλυσης ευνόησε την ανάπτυξη των ικανοτήτων των παιδιών να λύνουν αφηγηματικά προβλήματα πρόσθεσης, αφαίρεσης και ελλείποντος προσθετέου. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας δείχνουν ότι τα παιδιά είναι ικανά να εφαρμόζουν τη γνώση ανάλυσης σε πολλές όψεις των εννοιών του αριθμού. Μια τέτοια διδασκαλία μπορεί να προμηθεύσει την κατάλληλη βάση για την ερμηνεία των μικρών και των μεγάλων αριθμών και των υπολογισμών. Γενικά, η διδακτική εξοικείωση με δραστηριότητες ανάλυσης, ήταν υποβοηθητική στην ανάπτυξη των βασικών εννοιών του αριθμού, της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Οι σχέσεις αυτές συνιστούν ένα σημαντικό θεμέλιο που τονίζει πολλές μαθηματικές έννοιες που αναπτύσσουν τα μικρά παιδιά. Επιπρόσθετα αυτά τα αποτελέσματα διαρκούν στο χρόνο, όπως αποδείχθηκε από το τεστ που δόθηκε όταν τα παιδιά βρίσκονταν στην Α΄ τάξη.

Με ποιες μεθόδους και με ποια μέσα θα επιτύχουμε μια ευρύτερη κατανόηση των μαθηματικών; Πώς θα καταφέρνουν τα νήπια να επινοούν κατάλληλες στρατηγικές για να λύνουν νέα προβλήματα;

Η παρούσα εργασία μας επιχειρεί να δώσει μερικές αρχικές απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα. Δεν μας ικανοποιούσε ούτε η θεώρηση του Piaget (υποτίμηση των μικρών παιδιών) ούτε η στενότητα της προσέγγισης των σύγχρονων κονστρουκτιβιστών (μονομερής έμφαση στην αρίθμηση και την κατασκευή αφηρημένων μονάδων). Εννοείται ούτε ο μπηχαβιορισμός. Παρά τη σπουδαιότητά της η ανάλυση των αριθμών ελάχιστα εμφανίζεται στη θεωρία του Piaget. Το ενδιαφέρον του εστιάστηκε κυρίως στον εγκλεισμό και τη διατήρηση. Η διατήρηση είναι η εγγύηση για την πραγματική κατανόηση του αριθμού. Τα παιδιά πρέπει να κατανοούν ότι η διάσπαση και η επανένωση, η κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης έρχονται στα 7 χρόνια με την ωρίμαση (στάδιο συγκεκριμένης σκέψης). Η ανάλυση απουσιάζει επίσης από τα διδακτικά πειράματα της σχολής του κονστρουκτιβισμού. Οι σχέσεις μέρους–όλου εξετάζονται στο πλαίσιο της αριθμοακολουθίας. Επιπλέον δεν εξηγούν ποιες γνώσεις πρέπει να αποκτηθούν από τα παιδιά των προνοερών επιπέδων για να μεταβάλουν προοδευτικά τις στρατηγικές τους και να φτάσουν στο αφηρημένο στάδιο απαρίθμησης και την επινόηση των στρατηγικών σκέψης (νοητικού υπολογισμού). Τέλος δεν προτείνουν δραστηριότητες με εποπτικά μέσα, οι οποίες θα μπορούσαν λειτουργήσουν ως «γνωστικές γέφυρες» διευκολύνοντας και προετοιμάζοντας τις εν λόγω κατασκευές. Η ανάλυση απουσιάζει από τον μπηχεβιορισμό, στον οποίο προεξάρχει η τμηματική μάθηση αθροισμάτων και διαφορών χωρίς εννοιολογική κατανόηση.

Στην προσέγγισή μας θεωρήσαμε ότι η προοδευτική μαθηματικοποίηση πρέπει να συνδέεται με τα μαθηματικά του σχολείου. Γι' αυτό αποδεσμευτήκαμε από τις δοκιμασίες διατήρησης, εγκλεισμού. Η απόκτηση ποικιλίας εμπειριών με τις αναλύσεις των αριθμών ξεχωριστά κρίνεται απαραίτητη. Η χρήση καθενός αριθμού σε πολλές και διαφορετικές περιπτώσεις συμβάλλει στην κατάκτηση της έννοιας του αριθμού. Με την παρούσα εργασία μας προτείνουμε τη μέθοδο της βιωματικής-επικοινωνιακής προσέγγισης του αριθμού στο νηπιαγωγείο, η οποία βασίζεται στην ανάλυση του ίδιου του αριθμού. Καταρτίστηκε μια συστηματική δέσμη διδακτικών δραστηριοτήτων που απέβλεπε στην αριθμητική ανάπτυξη των νηπίων.

Οι υψηλές επιδόσεις των νηπίων, που μυήθηκαν στον κόσμο των αριθμών με τη μέθοδο αυτή φανερώνουν την αποτελεσματικότητα της εν λόγω μεθόδου. Ωστόσο μόνο από την διαφορά των μαθησιακών επιδόσεων δεν μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η ποιότητα της βιωματικής-επικοινωνιακής προσέγγισης του αριθμού είναι καλύτερη. Αυτή είναι η μία όψη του προβλήματος. Περισσότερη σημασία έχει η θεμελίωση της ίδιας της βιωματικής-επικοινωνιακής προσέγγισης και το περιεχόμενο της δέσμης των διδακτικών δραστηριοτήτων.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


Beauverd B. (1964), *Avant le calcul*, Delachaux et Niesté, Neuchâtel.

Briars D.-J., Larkin J. H. (1984), An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1, 245-296*.

Brissiaud R. (1989). *Comment les enfants apprennent à calculer. Au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles*, Retz, Paris.

Brissiaud R. (1991), Un outil pour construire le nombre: Les collections-temoins de doigt, au livre: *Les Chemins du Nombre*, pp. 59-90, Presses Universitaires de Lille.

Brissiaud R. (1994), L'acquisition de connaissances numériques, in : Ghiglione R. et Richard J.-F. (ed), *Cours de psychologie, 3. Champs et théories*, Dunod, Paris.

Bruner J. (1997). *Πράξεις νοήματος*, μτφρ. Η. Ρόκου Γ. Καλομοίρης, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

Carpenter T.P., Moser J. M. (1982), The development of addition and subtraction problem solving skills, in: Carpenter T.P., Moser J. M., Romberg T.-A.(eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, pp. 9-23, Lawrence Erlbaum Assosiates, Hillsdale.

Carpenter T.P., Moser J. M. (1983), The acquisition of addition and subtraction concepts, in: Lesh R., Landau M. (eds), *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes,* pp. 7-44, Academic Press, New York.

Cobb P. (1987), An analysis of three models of early number development, *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 163-179.

Cobb P., Boufi A., McClain K., Whitenack J. (1997), Reflective discourse and collective reflection, *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 261-265.

De Corte E., Verschaffel L. (1991), Δεξιότητες των παιδιών και διαδικασίες που χρησιμοποιούν κατά την επίλυση στοιχειωδών λεκτικών προβλημάτων. Στο Βοσνιαδου Σ. (Επιμ). *Ψυχολογία των Μαθηματικών*, μτφρ. Μπαρουξής Γ. Σταφυλίδου Μ. Βοσνιάδου Σ, σσ. 70-86, Gutenberg, Αθήνα 1995.

Dubois C., Fenichel M. Pauvert (1993), *Se former pour enseigner les mathématiques, 2. Maternelle, grandeur et mesure*, Colin, Paris.

Easley J. (1983). A Japanese approach to Arithmetic, *for the Learning of Mathematics*, 3(3), 9-14.

ERMEL (1990), Apprentissages numériques et résolution des problèmes, grande section de maternelle, Hatier, Paris.

Fayol M. (1990). *L'enfant et le nombre*, du comptage à la résolution des problèmes, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel-Paris.

Fischer J.-P. (1981), Développement et fonctions du comptage de 3 a 6 ans, *Recherches en didactique des mathématiques*, 2-3, éditions la pensée sauvage, Grenoble.

Fischer J.-P.(1992). *Apprentissages numériques. La distinction procédural/ déclaratif*, Presses Universitaires de Nancy.

Fuson K.-C. (1986), Teaching children to subtract by counting, *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(3), 172-189.

Fuson K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number,* Springer-Verlang, New York.

Fuson K.-C., Secada W.-G. (1986).Teaching children to add by counting on with finger patterns, C*ognition and Instruction*, 3, 229-260.

Gelman R., Gallistel G. R. (1978). *The children's understanding of number*, Harvard University Press, Cambridge M. A.

Griffiths R.,Clyne M. (1991), The power of story: Its role in learning Mathematics, *Mathematics Teaching*, 135.

Hatano G. (1982). Learning to add and subtract: a Japanese prospective, In Cerpanter T.P., Moser J. M., Romberg T.-A.(Eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, pp. 211-223, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Hughes M. (1986), *Children and Number*, Difficulties in learning mathematics, Blackwell, Oxford.

INRP. (1988), *Un, deux… beaucoup, passionnément!*, les enfants et les nombres, Rencontres pédagogiques, 21, Paris.

Kamii C.-K. (1985), *Young children reinvent arithmetic: Implication of Piaget's theory*, Teacher College Press, New York.

Klahr D. Wallace J.-G. (1976) *Cognitive development: An information processing view*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

Lakatos I. (1996). *Αποδείξεις και ανασκευές*, Τροχαλία, Αθήνα.

Marton F. Neuman D. (1990), Costuctivism, Phenomenology, and the origin of arithmetic skills, in: Steffe L.-P., Wood T. (eds.) (1990), *Transforming children's counting mathematics education: International perspectives*, Lawrence Erlbaum Assosiates, Hillsdale.

Neuman D. (1987), *The origin of arithmetic skills, A phenomenographic Approach,* Acta Universitatis Gothoburgensis.

Payne J. N., Ratmell E. C. (1975), Number and numeration, in: Payne J. N. (ed.) *Mathematics Learning in early childhood* (pp. 125-160). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Payne J.-N., Huinker D.-M. (1993). Early number and numeration. In Jensen R. C. (ed.) *Research ideas for the classroom*, Early childhood Mathematics, pp. 43-71, Macmillan, New York.

Piaget J., Inhelder B. (1959). *La genèse des structures logiques élémentaires, classifications et sériations,* Delachaux et Niestlé, Neuchâtel-Paris, (cinquième édition 1991).

Piaget J., Szeminska A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant,* Delachaux et Niestlé, Neuchâtel-Paris, (septième édition 1991).

Polya G. (1991). *Πώς να το λύσω*, μτφρ. Ψυακκή Ξ., επιμ. Πατρώνης Τ., Καρδαμίτσας, Αθήνα.

Ravestein J., Sensevy G. (1994), Statuts de l'erreur dans la relation didactique, *Grand N*, 54, IREM de Grenoble.

Resnick L. -B. (1983), A development theory of number understanding, in: Ginsburg H.-P.(ed) (1983), *The development of mathematical thinking*, Academic Press, New York.

Resnick L. -B. (1989), Developing mathematical knowledge, *American Psychologist*, 44.

Riley M. S., Greeno J. G.(1988), Developmental analysis of understanding language about quantities and of problems, *Cognition and Instruction* 5, 49-101.

Riley M. S., Greeno J. G., Heller J. I.(1983), Development of children's problem-solving ability in arithmetic, in: Ginsburg H.-P.(ed) (1983), *The development of mathematical thinking*, pp. 153-195, Academic Press, New York.

Schneuwly B. et Bronckart J-P. (1985). *Vygotsky aujourd'hui*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

Sorhian C., Vong K. I. (1995), The parts and wholes of arithmetic story problems: developing knowledge in preschool years, *Cognition and Instuction*, 13(3), 469-477.

Starkey P., Gelman R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal scooling in arithmetic. In Cerpanter T.P., Moser J. M., Romberg T.-A.(Eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, pp. 99-116, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Steffe L.- P., von Glasersfeld E., Richards J., Cobb P. (1983), *Children's counting types: Philosophy, theory, and application*, Praeger Scientific, New York.

Steffe L.-P., Cobb P. (1988), *Construction of arithmetical meanings and strategies*, Springer-Verlag, New York.

Tabachnick B. G., Fidell L. S. (1989), Using Multivariate Statistics, Harper Collins Publishers.

Thorndike E.L. (1922), The psychology of arithmetic, Macmillan, New York.

Vergnaud G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Peter Lang, p. 135-138, Berne.

Vergnaud G. (1982), A classification of cognitive tasks and operations of thougth involved in addition and subtraction problems, in: Carpenter T.P., Moser J. M., Romberg T.-A.(eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, pp. 39-59, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Vergnaud G. (1986), Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, *Grand N*, 38, INRP, IREM de Grenoble

Vergnaud G. (1991), Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques, R*evue Française de Pédagogie*, 96, INRP, Paris.

Vygotsky L. (1988). *Σκέψη και γλώσσα*, Γνώση, Αθήνα.

Vygotsky L. (1997). *Νους στην κοινωνία, η ανάπτυξη των ανώτερων ψυχολογικών διαδικασιών,* Gutenberg, Αθήνα.

Vygotsky L.( 1928). The problem of the cultural development of the child, *Journal of genetic psychology*, pp. 415-434.

Βαϊνάς Κ. (1987), Η χρήση των δακτύλων στην αρίθμηση ως θέμα της διδακτικής των μαθηματικών, *Σύγχρονη Εκπαίδευση*.

Βάμβουκας Μ. (1998). *Εισαγωγή στην Ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία*, Γρηγόρης, Αθήνα.

Βαρνάβα-Σκούρα Τ. (1990), *Θέματα γνωστικής ανάπτυξης, μάθησης και αξιολόγησης,* σσ. 47-58, Παπαζήσης, Αθήνα.

Καφούση Σ,. Ντζιαχρήστος Β. (1997), *Οι μαθηματικές γνώσεις των παιδιών της Πρώτης τάξης του Δημοτικού σχολείου, Παιδαγωγική έρευνα*, Παιδαγωγικό τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα.

Καψάλης Α., Λεμονίδης Χ. (1999), Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των μαθηματικών, *Μάκεδνον* 6, Φλώρινα.

Κόσυβας Γ. (1993), Το πρόγραμμα των μαθηματικών του νηπιαγωγείου και οι αρχικές γνώσεις των νηπίων για τους αριθμούς*, Πρακτικά 10ου Συνεδρίου ΕΜΕ* σσ. 191-201.

Κόσυβας Γ. (1996), *Η πρακτική του ανοιχτού προβλήματος στο δημοτικό σχολείο, γόνιμος χαρακτήρας και ανατροπή των παγιωμένων αντιλήψεων*, Gutenberg, Αθήνα.

Κόσυβας Γ. (2001), "*Η βιωματική διδασκαλία των αριθμητικών εννοιών στο νηπιαγωγείο-, η επίδραση της ανάλυσης των αριθμών με δακτυλικούς σχηματισμούς και άλλα εποπτικά και εκφραστικά μέσα του πολιτισμού στην ανάπτυξη της αριθμητικής σκέψης των νηπίων 5-6 χρονών*" αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή, ΑΠΘ, ΠΣ Φλώρινας.

Λεμονίδης Χ. (1994), *Περίπατος στη μάθηση της στοιχειώδους Αριθμητικής*, Αφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη.

Λεμονίδης Χ. (1998), Η διδασκαλία των πρώτων αριθμητικών εννοιών, *Ερευνητική Διάσταση 1-2,* Θεσσαλονίκη.

Λεμονίδης Χ. (2000), *Στοιχεία Αριθμητικής και Θεωρίας Αριθμών για το δάσκαλο*, Πατάκης, Αθήνα.

Λεμονίδης Χ. Χατζηλιαμή Μ. (1999), Έρευνα στις γνώσεις των νηπίων σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες, πρακτικά πανελλήνιου συνεδρίου με θέμα: *η έρευνα στην προσχολική εκπαίδευση*, Ρέθυμνο, Οκτώβριος 1999.

Μπούφη Α. (1995α). Αρχικές αντιλήψεις των παιδιών της πρώτης δημοτικού για τον αριθμό: Διδακτικές συνέπειες, *Ευκλείδης Γ΄, 42*, 17-39, ΕΜΕ, Αθήνα.

Μπούφη Α. (1995β). Δυνατότητες ανάπτυξης της παιδικής μαθηματικής σκέψης στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, *Ερευνώντας τον κόσμο του παιδιού 1,* 28-35, Ο.Μ.Ε.Ρ.

Μπούφη Α. (1995γ). Επιστημολογία και Διδακτική των Μαθηματικών. Στο Ματσαγγούρας Η. (Επιμ.). *Η εξέλιξη της Διδακτικής*, Gutenberg, Αθήνα.

Παπαναστασίου Κ. (1990), *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*, Αθήνα.

Παρασκευόπουλος Ι. (1993). *Μεθοδολογία επιστημονικής έρευνας*, τ. 2, Αθήνα.

Πατρώνης Τ. (1987). Για παραμύθια και ιστορίες με πειρατές, ξωτικά, γίγαντες και νάνους, δακτυλίδια, καπετάνιους... αγνώστου ηλικίας, το Σαλάχι, τη MANDONA και το μεγάλο δράκο των Μαθηματικών*, Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, 6/87, σ. 81-95, Εκδοτικός οίκος Αφων Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη.

Τζεκάκη Μ. (1996), *Μαθηματικές δραστηριότητες για την προσχολική ηλικία*, Gutenberg, Αθήνα.

Χρυσαφίδης Κ. (1994), *Βιωματική-επικοινωνιακή διδασκαλία, η εισαγωγή της μεθόδου Project στο σχολείο*, Gutenberg, Αθήνα.