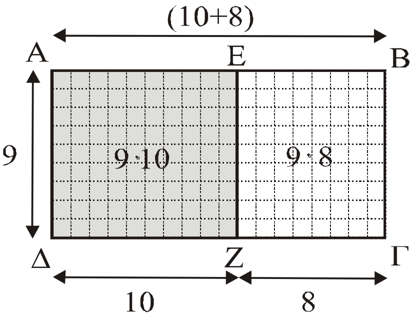
Επιμεριστική ιδιότητα και ελκυστικές κανονικότητες

Γιώργος Κόσυβας

Υπολογίζουμε συχνά με μολύβι και χαρτί, με τη βοήθεια αριθμομηχανής, υπολογίζουμε όμως και με το μυαλό, από μνήμης. Και τότε, βρίσκουμε το αποτέλεσμα συνήθως πιο γρήγορα, σκεφτόμαστε λίγο διαφορετικά, προσπαθούμε να βρούμε τον πιο εύκολο δρόμο, προσπαθούμε να εκμεταλλευτούμε ιδιότητες των αριθμών όπως αυτή που ακολουθεί.

Η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση

Πρόβλημα: Ένας κηπουρός είχε έναν ορθογώνιο δενδρόκηπο και αγόρασε μια μικρή έκταση σχήματος ορθογωνίου για λαχανόκηπο. Αν ο δενδρόκηπος είχε διαστάσεις 9m×10m, ενώ το μέρος που αγόρασε 9m×8m, πόση έκταση συνολικά έχει τώρα ο κήπος του;



Έχουμε δύο διαφορετικούς τρόπους για να βρούμε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. (Εμβαδόν ορθογωνίου=βάση×ύψος)

- **Πρώτος τρόπος**: Ο κήπος είχε εμβαδόν $9\cdot 10\ m^2$ (δενδρόκηπος), ενώ η έκταση που αγόρασε έχει $9\cdot 8\ m^2$ (λαχανόκηπος). Τώρα λοιπόν το εμβαδόν του κήπου έγινε:

$$\mathbf{9\cdot 10+9\cdot 8}=90+72=162m^2$$

- **Δεύτερος τρόπος**: Όπως βλέπουμε από το σχήμα ο συνολικός κήπος (δενδρόκηπος και λαχανόκηπος) έχει μήκος 10+8=18 m και πλάτος 9 m. Επομένως το εμβαδόν του κήπου είναι :

$$\mathbf{9\cdot(10+8)}=9\cdot 18=162\ m^2.$$

Άρα συγκρίνοντας τα αποτελέσματα διαπιστώνουμε ότι ισχύει:

$$\mathbf{9\cdot(10+8)=9\cdot 10+9\cdot 8\ (1)}$$

Προσέξτε λίγο τους αριθμούς. Το σχήμα θα σας αποζημιώσει με την ανακάλυψη της προηγούμενης ιδιότητας.

Η προηγούμενη ισότητα φανερώνει ένα γενικότερο κανόνα. Έτσι έχουμε:

$$\mathbf{3\cdot(\beta+\gamma)=3\cdot\beta+3\cdot\gamma}$$

Πράγματι:

$3\cdot(\beta+\gamma)=(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)$ (επαναλαμβανόμενη πρόθεση)
$=\beta+\beta+\beta+\gamma+\gamma+\gamma$ (αντιμεταθετικότητα)
$=(\beta+\beta+\beta)+(\gamma+\gamma+\gamma)$ (προσεταιριστικότητα)
$=3\beta+3\gamma$ (επαναλαμβανόμενη πρόθεση).

Η ισότητα που επαληθεύσαμε με τα παραπάνω παραδείγματα ονομάζεται **επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση** και γράφεται γενικά:

$$\mathbf{\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma\ (2)}$$

Αυτή η μορφή είναι ένας γενικός κανόνας που «συνοψίζει» όλες τις ειδικές περιπτώσεις.

Όταν αυτή η ιδιότητα εφαρμόζεται από τα αριστερά προς τα δεξιά, **εκτελούμε τις πράξεις** σύμφωνα με την προτεραιότητα (πρώτα οι πολλαπλασιασμοί, ύστερα οι προσθέσεις). Η επιμεριστική ιδιότητα μας βοηθά να δούμε από τη μια πλευρά τον πολλαπλασιασμό ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και από την άλλη την δεκαδική ανάλυση των αριθμών που αποτελεί τη βάση της γραπτής τεχνικής.

$$9\cdot 18=18+18+18+18+18+18+18+18+18.$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα ο πολλαπλασιασμός μονοψήφιου με διψήφιο ανάγεται στην πρόσθεση δύο μερικών γινομένων. Αν σκεφτούμε δηλαδή το 18 ως 10+8 έχουμε:

$$\begin{aligned}9\cdot 18&=9\cdot(10+8)\\&=9\cdot 10+9\cdot 8=90+72=162.\end{aligned}$$

Οι πράξεις γίνονται ευκολότερα. Η ίδια μέθοδος **επιμερισμού**, δηλαδή χωρισμού ενός **όλου** στα **μέρη** που το συναποτελούν, εφαρμόζεται και στη γνωστή μέθοδο του πολλαπλασιασμού, συχνά χωρίς να το αντιλαμβανόμαστε. Η μοναδική διαφορά είναι ότι εδώ αρχίζουμε από τις μονάδες.

$$\begin{array}{r} 10+8 \\ \times\ 9 \\ \hline 90+72 \end{array} \qquad \text{ή} \qquad \begin{array}{rl} 18 & \\ \times 9 & \\ \hline 72 & \longleftarrow 9\times 8=72 \\ +9\ & \longleftarrow 9\times 10=90 \\ \hline 162 & \end{array}$$

Με άλλα λόγια ο προηγούμενος πολλαπλασιασμός περιλαμβάνει δύο **επιμέρους** πολλαπλασιασμούς (αφού δύο είναι οι προσθετέοι) και μια ακόμα πρόσθεση:

- Υπολογισμός πρώτου μερικού γινομένου: $9{\cdot}8=72$.
- Υπολογισμός δεύτερου μερικού γινομένου: $9{\cdot}10=90$. (το μηδέν του 90 παραλείπεται).
- Πρόσθεση των δύο μερικών γινομένων: $72+90=162$.

Μπορείτε να επαληθεύετε την ισότητα;

$$\mathbf{(5+2+7)\cdot 3=5\cdot 3+2\cdot 3+7\cdot 3}$$

Πολλές φορές, αν ένα παράγοντα ενός γινομένου τον γράψουμε ως άθροισμα, διευκολύνονται οι πράξεις. Αυτό υπαγορεύεται από τη δομή του δεκαδικού συστήματος. Ας δούμε δύο παραδείγματα:

$$\begin{aligned} 9\cdot 78 &= 9\cdot(70+8) = 9\cdot 70 + 9\cdot 8 \\ &= 630+72 = 702. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\cdot 259 &= 3\cdot(200+50+9) \\ &= 3\cdot 200 + 3\cdot 50 + 3\cdot 9 \\ &= 600+150+27 = 777. \end{aligned}$$

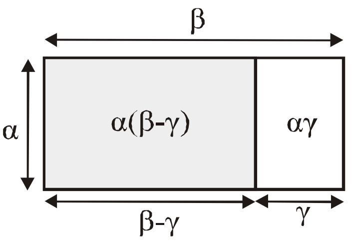
Η προαναφερόμενη αριθμητική ισότητα (1) ισχύει όχι μόνο για φυσικούς αριθμούς αλλά για ακέραιους αριθμούς, θετικούς και αρνητικούς, για κλάσματα και για δεκαδικούς, δηλαδή για όλους τους ρητούς αριθμούς.

Γενικά, για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με ένα άθροισμα, τον πολλαπλασιάζουμε με όλους τους προσθετέους του αθροίσματος και προσθέτουμε τα γινόμενα.

Ανάλογα έχουμε την **επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση**. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

$$\begin{aligned} 9\cdot 78 &= 9\cdot(80-2) = 9\cdot 80 - 9\cdot 2 \\ &= 720-18 = 702. \end{aligned}$$

Μπορείτε να την επαληθεύσετε στο σχήμα που ακολουθεί;



Η γενική μορφή της είναι η ακόλουθη:

$$\mathbf{\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma\ (3)}$$

Γενικά, για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με μια διαφορά, τον πολλαπλασιάζουμε με κάθε όρο της διαφοράς και αφαιρούμε τα γινόμενα.

Η επιμεριστική ιδιότητα χρησιμοποιείται και αντίστροφα. Τότε οι (2) και (3) εφαρμόζονται από τα δεξιά προς τα αριστερά και έχουμε:

$$\mathbf{\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha(\beta+\gamma)\ \text{ ή } \ \alpha\beta-\alpha\gamma=\alpha(\beta-\gamma)\ (4)}$$

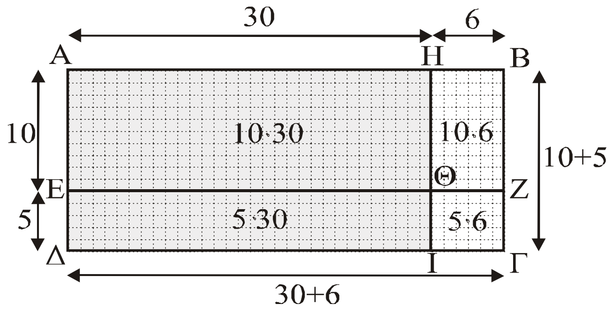
Ας δούμε δύο παραδείγματα:

$$\mathbf{7}\cdot 48+\mathbf{7}\cdot 12=\mathbf{7}\cdot(48+12)=7\cdot 60=420$$
$$\mathbf{7}\cdot 69-\mathbf{7}\cdot 19=\mathbf{7}\cdot(69-19)=7\cdot 50=350.$$

Συντομεύσαμε τις πράξεις πολλαπλασιάζοντας τον κοινό παράγοντα με το άθροισμα ή τη διαφορά των δύο άλλων. Παρατηρήστε ότι ο κοινός παράγοντας 7, πριν από κάθε παρένθεση, γράφεται μια μόνο φορά.

Η διπλή επιμεριστική ιδιότητα

Ας πάρουμε τώρα ένα λίγο πιο σύνθετο σχήμα, που προκύπτει, αν «κολλήσουμε» τέσσερα μικρά ορθογώνια με διαστάσεις 10×30, 10×6, 5×30 και 5×6. Όπου διασταυρώνονται οι διαστάσεις, έχουν σημειωθεί τα αντίστοιχα εμβαδά.



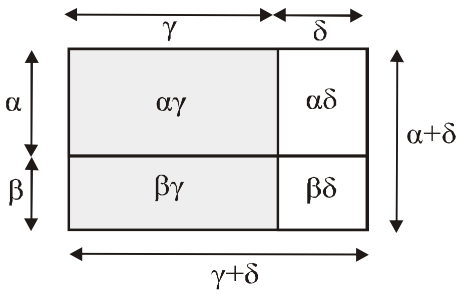
Ο πολλαπλασιασμός 15×36 μπορεί να γίνει με τους παρακάτω τρόπους:

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 36 \\ \hline 90 \\ +45 \\ \hline 540 \end{array} \qquad \begin{aligned} 15\cdot 36 &= (10+5)\cdot(30+6) \\ &= 10\cdot 30+10\cdot 6+5\cdot 30+5\cdot 6 \\ &= 300+60+150+30 \\ &= 540. \end{aligned}$$

Όλοι και όλες θα συμφωνήσετε ότι στο παραπάνω σχήμα το συνολικό εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται, δηλαδή:

$$(10+5)\cdot(30+6) = 10\cdot 30+10\cdot 6+5\cdot 30+5\cdot 6.$$

Στο ακόλουθο σχήμα οι διαστάσεις είναι γενικά οι θετικοί αριθμοί α, β, γ, δ.



Άρα:

(α+β)(γ+δ)=αγ+αδ +βγ+βδ (5)

Μην κουράζετε τη μνήμη σας με την αποστήθιση της ιδιότητας. Απλώς κοιτάξτε προσεκτικά το σχήμα και αυτό μιλά από μόνο του.

Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα άθροισμα (α+β) με ένα άλλο άθροισμα, το (γ+δ), εφαρμόζουμε δύο φορές την επιμεριστική ιδιότητα, την οποία θα ονομάζουμε «διπλή επιμεριστική ιδιότητα». Μάλιστα η σύνθετη αυτή ιδιότητα ισχύει για οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς α, β, γ και δ. Πράγματι**:**

(α+β)(γ+δ)= α(γ+δ)+β(γ+δ) (1^η φορά)
=αγ+αδ +βγ+βδ (2^η φορά)

Επομένως, για να πολλαπλασιάσουμε δύο αθροίσματα πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του πρώτου αθροίσματος με κάθε όρο του δεύτερου και προσθέτουμε τα γινόμενα.

Οι εμπειρίες που αποκτάτε με τα γεωμετρικά σχήματα, βοηθούν στην βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων και ίσως σας ξελαφρώνουν από την υπερβολική απομνημόνευση. Δεν συμφωνείτε;

Εκπληκτικές αριθμητικές κανονικότητες

Η επιμεριστική ιδιότητα χρησιμεύει ως βάση για ορισμένους υπολογισμούς από μνήμης.

Η χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας μάς επιφυλάσσει απρόσμενες εκπλήξεις. Μάς φανερώνει ενδιαφέροντα μυστικά από τον μυστηριώδη κόσμο των αριθμών που προκαλούν τον θαυμασμό μας.

Σας προσκαλούμε σε μια πρώτη γνωριμία. Όταν οι αριθμοί είναι μικροί, μπορείτε να υπολογίζετε νοερά, αν όμως είναι μεγάλοι, χρειάζεται μολύβι και χαρτί. Πάντως κομπιετεράκι δεν χρειάζεται. Σε κάθε περίπτωση τα παρακάτω παραδείγματα αποτελούν υπέροχες προκλήσεις για μαθηματική σκέψη.

1. **Να βρείτε με σύντομο τρόπο τις αριθμητικές παραστάσεις:**

(α) 2,7·2+2,7·3+2,7·5, (β) 1,829·139−1,829·39

Για να συντομεύσουμε τις πράξεις αξιοποιούμε τον κοινό παράγοντα.

(α) 2,7·2+**2,7**·3+**2,7**·5=**2,7**·(2+3+5)
= 2,7·10=27.

(β) 1,829·139−**1,829**·39=**1,829**·(139−39)
= 1,829·100=182,9.

2. **Να βρείτε με σύντομο τρόπο την αριθμητική παράσταση.**

Α=47·88+47·12+53·88+53·12.

Εδώ ο σύντομος τρόπος απαιτεί την ανίχνευση της διπλής επιμεριστικής ιδιότητας.

Α=**47**·88+**47**·12+$\underline{53}$·88+$\underline{53}$·12
=**47**·(88+12)+$\underline{53}$·(88+12)
= 47·100+53·100=(47+53)·100
=100·100=10.000.

Εύκολα και σύντομα. Τι ευχάριστη σύμπτωση!

3. **Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα για να πολλαπλασιάσετε τον**

διψήφιο αριθμό 53 με το 101 και το 1001.

$$53 \cdot 101 = 53 \cdot (100 + 1) = 53 \cdot 100 + 53 \cdot 1$$
$$= 5.300 + 53 = 5.353.$$
$$53 \cdot 1.001 = 53 \cdot (1.000 + 1) = 53 \cdot 1.000 + 53 \cdot 1$$
$$= 53.000 + 53 = 53.053.$$

Συνεχίζοντας δεν θα δυσκολευτείτε να μαντέψετε ότι αν πολλαπλασιάσετε τον διψήφιο 53 με το 10.001 θα βρείτε 530.053. Αν πολλαπλασιάσετε και άλλους διψήφιους αριθμούς με το 101 και με το 1.001, τα αποτελέσματα θα είναι ανάλογα. Έτσι μπορείτε να βρίσκετε απευθείας το αποτέλεσμα. Δεν είναι θαυμάσιο;

4. Υπολογίστε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων με το μυαλό:

(α) 45·99, (β) 45·999.

Έχουμε:

(α) $45 \cdot 99 = 45 \cdot (100 - 1) = 45 \cdot 100 - 45 \cdot 1$
$$= 4.500 - 45 = 4.455.$$

(β) $45 \cdot 999 = 45 \cdot (1.000 - 1) = 45 \cdot 1.000 - 45 \cdot 1$
$$= 45.000 - 45 = 44.055.$$

Αν συνεχίσουμε, με το 9.999 έχετε αντίρρηση να παρεμβάλλουμε ακόμα ένα μηδενικό; Ίσως σας ενθουσιάζει το παιγνίδι με τις περίεργες κανονικότητες.

5. Να βρείτε το γινόμενο διψήφιων ακέραιων που έχουν το ίδιο ψηφίο δεκάδων.

Έχουμε:

$$56 \cdot 53 = (50 + 6) \cdot (50 + 3)$$
$$= 50^2 + (\mathbf{6} + \mathbf{3}) \cdot 50 + \mathbf{6} \cdot \mathbf{3}$$
$$= 2.500 + 450 + 18 = 2.968.$$

Το γινόμενο προκύπτει, αν προσθέσουμε τρεις αριθμούς: το τετράγωνο του 50, το γινόμενο (6+3)·50 και το γινόμενο 6·3. Αν σας άνοιξε η όρεξη, δοκιμάστε κι άλλους αριθμούς. Πάντως η γενίκευση παραπέμπει στην ακόλουθη ταυτότητα που μαθαίνετε στην Γ΄ Τάξη:

$$\mathbf{(x + \alpha) \cdot (x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta) \cdot x + \alpha \cdot \beta}$$

6. Να βρείτε το γινόμενο δύο διψήφιων αριθμών που είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί και ισαπέχουν από πολλαπλάσιο του 10.

Ας πάρουμε ένα παράδειγμα:

$$73 \cdot 67 = (70 + 3) \cdot (70 - 63) = 70^2 - 3^2$$
$$= 4.900 - 9 = 4.891.$$

Ο κανόνας: *αντικαταστήστε το ψηφίο των μονάδων του μεγαλύτερου αριθμού με το μηδέν και έτσι σχηματίστε έναν διψήφιο που λήγει σε μηδέν, βρείτε το τετράγωνό του (70^2) και αφαιρέστε το τετράγωνο της απόστασης του ενός από δύο αριθμούς από το πολλαπλάσιο του 10 (3^2).*

Δεν είναι τέλειο; Τώρα η δική σας σειρά. Ασχοληθείτε ζεστά και θα γοητευθείτε!

Ασκήσεις για αυτενέργεια

1. Να κάνετε από μνήμης τις πράξεις με δύο τρόπους:

Α=7·(28+2) , Β=9·(34-4).

2. Το κυλικείο του σχολείου πούλησε στο πρώτο διάλειμμα 15 τυρόπιτες και στο δεύτερο 19 με 1,3 ευρώ τη μία. Πόσα ευρώ εισέπραξε;

3. Να υπολογίσετε με σύντομο τρόπο τις αριθμητικές παραστάσεις:

Α=34·101, Α=17·1010, Γ=72·99.

4. Να υπολογίσετε με σύντομο τρόπο τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = 301^2,\ B = 599^2,\ \Gamma = 31 \cdot 29$$

5. Να επαληθεύσετε ότι: 7·11·13=1001. Στη συνέχεια να βρείτε έναν κανόνα, για να πολλαπλασιάζετε από μνήμης τριψήφιους αριθμούς με το γινόμενο 7·11·13 και με το 10.001.

6. Να βρείτε έναν κανόνα για να πολλαπλασιάζετε από μνήμης τετραψήφιους με το 10.001.

7. Να βρείτε έναν κανόνα, για να πολλαπλασιάζετε από μνήμης διψήφιους με το 11 και το 111.

8. Να εξετάσετε προσεκτικά τα γινόμενα:

$$91 \cdot 22 = 2.002,\ 91 \cdot 33 = 3.003,\ 91 \cdot 44 = 4.004$$

Να βρείτε έναν κανόνα, για να πολλαπλασιάζετε από μνήμης το 91 με ένα διψήφιο πολλαπλάσιο του 11.