# Η διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών

**Γιώργος Κόσυβας , Δρ Διδακτικής Μαθηματικών**

*Η βασική Θεωρία Αριθμών είναι η επιστήμη που εφαρμόζεται καλύτερα στη στοιχειώδη μαθηματική εκπαίδευση. Απαιτεί μόνο ελάχιστες πρότερες γνώσεις και το αντικείμενο που πραγματεύεται είναι συγκεκριμένο και οικείο. Οι χρησιμοποιούμενες μέθοδοι συλλογισμού είναι απλές, γενικές και ποικίλες. Από τους διάφορους κλάδους των μαθηματικών είναι ο μοναδικός που επιζητεί την ανθρώπινη περιέργεια.*

**Hardy G. H.**

Πρότεινα πολλές φορές στους μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου να πραγματευτούν το ακόλουθο ανοιχτό πρόβλημα:

***Εκφώνηση:*** *Ποιοι είναι οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί που μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών;*

Η έρευνα του εν λόγω προβλήματος φανερώνει τόσο στους μαθητές όσο και στο διδάσκοντα ενδιαφέροντα «αριθμητικά μυστικά» από τον μυστηριώδη κόσμο των αριθμών που προκαλούν την περιέργεια και το θαυμασμό μας. Η παρούσα εργασία δεν αποτελεί μια πλήρη μελέτη του θέματος, το οποίο άλλωστε είναι πολυσύνθετο και πλούσιο, γι’ αυτό ίσως μαγνήτισε το ερευνητικό ενδιαφέρον εξεχόντων μαθηματικών, μεταξύ των οποίων και του Fermat. Το δικό μας ενδιαφέρον για το θέμα είναι κατά βάση διδακτικής φύσης και εστιάζεται στη σχολική τάξη, και πιο συγκεκριμένα στην ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία.

Όπως ίσως θα διαπιστώσετε, οι μαθησιακές δραστηριότητες που σκιαγραφούνται ανοίγουν δυνατότητες στους μαθητές να παρατηρήσουν αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες, να τις δοκιμάσουν, να τις μεταφράσουν στη γλώσσα των συμβόλων, να τις αιτιολογήσουν χρησιμοποιώντας τους κανόνες του αλγεβρικού λογισμού και έτσι να ανακαλύψουν αφηρημένες μαθηματικές ιδιότητες και σχέσεις. Σε κάθε διδακτικό πειραματισμό οι μαθητές αποκτούν ζωντανά μαθηματικά βιώματα που συνοδεύονται με εκπλήξεις και απροσδόκητες ανακαλύψεις. Οι μαθητές διατυπώνουν και ελέγχουν εικασίες, επιχειρηματολογούν, συζητούν τις ιδέες τους, γενικεύουν και τελικά αποδεικνύουν. Είναι μια εξαιρετική ευκαιρία για τους μαθητές να συσχετίσουν με αλληλοσυμπληρωματικό τρόπο αριθμητικές, αλγεβρικές και γεωμετρικές γνώσεις. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ορισμένες όψεις από τις επινοήσεις των σημερινών μαθητών εμπλουτίζοντας τη μελέτη με ιστορικές προεκτάσεις που μάς ταξιδεύουν μέχρι τον Πυθαγόρα και τον Fermat. Πάντως το θέμα αποδεικνύεται διαχρονικά γόνιμο και είναι πάντα ανοιχτό σε προσεγγίσεις.

## 1. Παραγωγή παραδειγμάτων και εικασιών από τους μαθητές

Μετά από τις απαραίτητες επεξηγήσεις για την οικειοποίηση του προβλήματος οι μαθητές προβαίνουν στην κατασκευή παραδειγμάτων. Τα πρώτα αποτελέσματα είναι λίγο ανοργάνωτα:

$$5 = 3^2 - 2^2, \quad 9 = 5^2 - 4^2, \quad 12 = 4^2 - 2^2, \quad 17 = 9^2 - 8^2, \quad 24 = 7^2 - 5^2, \quad 32 = 6^2 - 2^2.$$

Αργότερα εμφανίζονται και τετριμμένα παραδείγματα όπως: $1 = 1^2 - 0^2$, $9 = 3^2 - 0^2$ κτλ.

Συγκεντρώνουμε τα αποτελέσματα σε έναν πίνακα που βοηθά να φωτίσουμε καλύτερα το θέμα μας.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0 = 0^2 - 0^2$ | $1 = 1^2 - 0^2$ | 2=; | $3 = 2^2 - 1^2$ | $4 = 2^2 - 0^2$ | $5 = 3^2 - 2^2$ | 6=; | … |

Στο ερώτημα «*γιατί το 2 και το 6 δεν γράφονται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών;*», η συνηθισμένη απάντηση των μαθητών είναι: «*Δεν γίνεται. Το 2 και το 6 είναι εξαιρέσεις. Το δοκιμάσαμε!*». Έτσι τούς ζητήθηκε να συνεχίσουν και να βρουν και άλλες περιπτώσεις που αποκλείονται. Αντί της «τυφλής» αναζήτησης η συμπλήρωση ενός πίνακα μέχρι το 100 βάζει σε τάξη τις εξαιρέσεις και τους κατασκευάσιμους αριθμούς. Ένα μέρος αυτού του πίνακα είναι το ακόλουθο:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 | ~~6~~ | 7 | 8 | 9 |
| ~~10~~ | 11 | 12 | 13 | ~~14~~ | 15 | 16 | 17 | ~~18~~ | 19 |
| 20 | 21 | ~~22~~ | 23 | 24 | 25 | ~~26~~ | 27 | 28 | 29 |

Ποιες βαθύτερες κανονικότητες αποκαλύπτονται; Ο προηγούμενος πίνακας αποτέλεσε ένα έναυσμα για τη διατύπωση ‘‘καταιγίδας’’ εικασιών. Ορισμένες από τις εύλογες εικασίες που έθεσαν οι μαθητές είναι οι ακόλουθες:

- *«Όλοι οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών»*
- *«Φαίνεται ότι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών που δεν γράφονται με τη μορφή διαφοράς τετραγώνων είναι 4».*
- *«Νομίζω ότι οι αριθμοί που διαγράφτηκαν γράφονται ως άθροισμα δύο περιττών αριθμών που διαφέρουν κατά 4».*
- *«Κανένας ακέραιος μορφής 4ν+2 δεν γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο θετικών ακεραίων».*
- *«Αν ένας αριθμός είναι περιττός, τότε θα πρέπει να γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών».*
- *«Αν ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 4, τότε θα πρέπει να γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών που διαφέρουν κατά δύο».*
- *«Νομίζω ότι το άθροισμα δύο διαδοχικών περιττών είναι πολλαπλάσιο του 4».*
- *«Μάλλον όλοι οι περιττοί αριθμοί γράφονται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών».*
- *«Θα πρέπει όλα τα πολλαπλάσια του 4 να γράφονται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών».*
- *«Το τετράγωνο ενός άρτιου είναι πάντα άρτιος αριθμός».*
- *«Το γινόμενο δύο περιττών είναι περιττός αριθμός».*
- *«Το γινόμενο δύο αρτίων αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 4».*
- *«Τα πολλαπλάσια του 8 γράφονται ως διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών περιττών αριθμών».*
- *«Μού φαίνεται ότι μόνο οι αριθμοί που τελειώνουν σε 7 γράφονται ως διαφορά τετραγώνων».*
- *«Όλα τα πολλαπλάσια του 2 γράφονται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών».*

Αυτές οι ευρετικές ιδέες είναι προσωρινές εικασίες που πρέπει να αποδειχτούν ή να απορριφθούν. Οι δύο τελευταίες είναι «βεβιασμένες» προβλέψεις ή πρόχειρες γενικεύσεις και καταρρίπτονται με ένα αντιπαράδειγμα που μπορούν να προμηθεύσουν οι μαθητές:

- **Μαθητής**: *Η εικασία ότι «μόνο οι αριθμοί που τελειώνουν σε 7 γράφονται ως διαφορά τετραγώνων», είναι ψευδής. Υπάρχουν και άλλοι αριθμοί που δεν τελειώνουν σε 7 και γράφονται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα το 3 γράφεται:* $3 = 2^2 - 1^2$.
- **Μαθήτρια**: *Από τον πίνακα βλέπουμε ότι ο άρτιος αριθμός 26 δεν γράφεται με μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.*

Γι’ αυτούς τους μαθητές αρκεί μόνο ένα αντιπαράδειγμα, για να καταρριφτεί μια εικασία. Ωστόσο το πρώτο αντιπαράδειγμα είναι πειστικό και αδιαμφισβήτητο, ενώ στο δεύτερο χρειάζεται επιπλέον αιτιολόγηση. Ορισμένοι μαθητές είχαν την ιδέα να διακρίνουν άμεσα τους αρχικούς φυσικούς αριθμούς ανάλογα με το αν είναι άρτιοι ή περιττοί. Διέκριναν τους εξής συνδυασμούς:

$$(2\mu)^2 - (2\nu)^2$$
$$(2\mu+1)^2 - (2\nu+1)^2$$
$$(2\mu+1)^2 - (2\nu)^2$$
$$(2\mu)^2 - (2\nu+1)^2$$

Όλες οι εικασίες και οι επιστημονικές θέσεις των μαθητών γράφονται στον πίνακα από τον διδάσκοντα. Η επίσημη έκθεση στον πίνακα εξασφαλίζει το δημόσιο χαρακτήρα της συζήτησης με ολόκληρη την τάξη. Δημιουργώντας ένα κατάλληλο κλίμα αδιάλειπτης ανοιχτής συζήτησης στην τάξη ενθαρρύνουμε τους μαθητές να διατυπώνουν αποδεικτικές ιδέες και εικασίες και να τις ελέγχουν. Ορισμένες εικασίες απορρίπτονται από τη συζήτηση, ενώ άλλες πείθουν για την εγκυρότητά τους και επικρατούν.

Γενικά, οι εικασίες των μαθητών ήταν πολυάριθμες και γόνιμες. Οι πλούσιες ιδέες τους, ακόμα και αυτές που δεν κατέληγαν αμέσως στη λύση, έφερναν στο φως ενδιαφέροντα ενδιάμεσα αποτελέσματα. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ορισμένες από τις εικασίες των μαθητών που επιμερίστηκαν σε ξεχωριστά προβλήματα ή υποεικασίες, για να ερευνηθούν με πολλαπλές προσεγγίσεις στις σχολικές αίθουσες και να διευκολυνθεί η συστηματική παρατήρηση δομών και σχέσεων.

## 2. Συσχέτιση της Αριθμητικής με την Άλγεβρα: κανονικότητες και γενικεύσεις

Οι αριθμητικές σχέσεις και ιδιότητες μέσα από την αλγεβρική γλώσσα και σκέψη αποκτούν χαρακτήρα γενίκευσης. Η δύναμη της Άλγεβρας έγκειται στον ανεξάρτητο χειρισμό γενικών κανόνων με το συνακόλουθο παραμερισμό των ειδικών περιπτώσεων. Πώς μπορούμε να βοηθήσουμε τους μαθητές να κάνουν επιτυχείς γενικεύσεις; Η εξερεύνηση αριθμητικών μοτίβων θα μπορούσε να προετοιμάσει το έδαφος για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης; Στη συνέχεια θα δούμε με ποιο τρόπο οι αριθμητικές κανονικότητες δίνουν προοδευτικά τη θέση τους στην αριθμητική και αλγεβρική γενίκευση και στο τέλος στον αφηρημένο αποδεικτικό συλλογισμό.

**Πρόβλημα 1:** *Αν α και β είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί (α-β=1), να υπολογίσετε την παράσταση* $\alpha^2 - \beta^2$ *για διάφορες τιμές των α και β. Για παράδειγμα να υπολογίσετε:* $1^2 - 0^2$, $2^2 - 1^2$, $3^2 - 2^2$, $4^2 - 3^2$ *και* $5^2 - 4^2$. *Παρατηρείτε κάποια κανονικότητα; Πόσο συχνά συμβαίνει ένας περιττός αριθμός να γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών;*

Οι μαθητές υπολογίζουν και γράφουν παραδείγματα στην ακόλουθη μορφή:

$$\Pi_0: \quad 1^2 - 0^2 = 1$$
$$\Pi_1: \quad 2^2 - 1^2 = 3,$$
$$\Pi_2: \quad 3^2 - 2^2 = 5,$$

$$\Pi_3: \quad 4^2 - 3^2 = 7,$$
$$\Pi_4: \quad 5^2 - 4^2 = 9.$$

Πώς είναι δυνατόν από ένα «δείγμα» παραδειγμάτων να «ανακαλυφθεί» μια κανονικότητα; Οι αριθμοί 1, 3, 5, 7, 9, … για τον μαθηματικό φανερώνουν «αριθμητική πρόοδο» με πρώτο όρο 1 και διαφορά 2. Αυτήν την έννοια οι μαθητές τη μαθαίνουν στη Β΄ Λυκείου. Πώς όμως θα μπορούσαν να σκεφτούν μαθητές του Γυμνασίου; Οι μαθητές παρατηρούν με τη σειρά τους αριθμούς 1, 3, 5, 7, 9, αναγνωρίζουν ότι είναι όλοι τους διαδοχικοί περιττοί και προβλέπουν ότι αυτή η «κανονική τακτοποίηση» συνεχίζεται. Επίσης κάθε αριθμός προκύπτει αν στον προηγούμενο προστεθεί το 2. Όμως η προηγούμενη καταγραφή γέννησε κι άλλες ιδέες που εκθέτουμε στα ακόλουθα επεισόδια.

**Δάσκαλος:** *Ο αριθμός 11 γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών; Η Β.*
**Β.:** *Νομίζω ότι το 11 γράφεται* $6^2 - 5^2$.
**Δάσκαλος:** *Γιατί;*
**Β.:** *Είναι* $6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$.
**Δάσκαλος:** *Και το 49;*
**Β.:** *Πρέπει να πάρουμε τους αριθμούς 25 και 24!*
**Δάσκαλος:** *Πώς το βρήκες.*
**Β.:** *Παρατηρούμε:* $3^2 - 2^2 = 3 + 2 = 5$, $4^2 - 3^2 = 4 + 3 = 7$, $5^2 - 4^2 = 5 + 4 = 9$. *Είναι 49=25+24! Δεν είναι μαγικό; Όμως, αν κάνουμε τις πράξεις, σίγουρα θα το βρούμε.*
**Δάσκαλος:** *Δηλαδή;*
**Β.:** *Δηλαδή μπορούμε να το βρούμε και αλλιώς:* $25^2 - 24^2 = 625 - 576 = 49$. *Άρα το 49 γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.*
**Δάσκαλος:** *Γιατί όμως ισχύει* $25^2 - 24^2 = 25 + 24$*; Μπορείτε να το εξηγήσετε διαφορετικά;*

Στο τελευταίο ερώτημα μια μαθήτρια θυμήθηκε την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων και έγραψε στον πίνακα:

$$25^2 - 24^2 = (25 + 24)(25 - 24) = 25 + 24 = 49.$$

Οι μεγαλύτεροι αριθμοί μπορούν να γεφυρώνουν το χάσμα ανάμεσα στους μικρούς αριθμούς και τον αφηρημένο αλγεβρικό συμβολισμό. Η επαγωγή πασχίζει για την ανακάλυψη συνοχής και κανονικότητας. Όλες αυτές οι εμπειρικές παρατηρήσεις και ειδικές ενδείξεις οδηγούν στο γενικό ερώτημα:

**Δάσκαλος:** *Πόσο συχνά συμβαίνει ένας περιττός αριθμός να γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών; Η Ν.*
**Ν.:** *Όλοι οι περιττοί γράφονται έτσι.*
**Δάσκαλος:** *Δηλαδή;*
**Ν.:** *Κάθε περιττός αριθμός γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών. Μετά την επαλήθευση πολλών περιπτώσεων δεν αμφιβάλλουμε πλέον. Γι αυτό δε χρειάζεται να ψάξουμε και άλλα παραδείγματα.*
**Δάσκαλος:** *Χρειάζεται να κάνουμε κάτι άλλο;*
**Ν.:** *Όχι! Το βρήκαμε!* (σιωπή) *Όμως πρέπει να το αποδείξουμε!*
**Δάσκαλος:** *Δηλαδή;*
**Ν.:** *Κάθε περιττός αριθμός γράφεται 2ν+1! Έτσι δεν είναι;*
**Δάσκαλος:** *Πολύ ωραία.! Τι άλλο μπορείτε να σκεφτείτε;* (σιωπή)
**Ν.:** *Υπάρχει, κύριε, κάποιος σίγουρος δρόμος, για να το αποδείξουμε;*
**Δάσκαλος:** *Εσείς τι λέτε; Υπάρχει;*
**Ν.:** *Όχι.*

**Δάσκαλος:** *Για αναλογιστείτε. Βρήκατε ότι ισχύει για πολλούς περιττούς αριθμούς και μαντέψατε ότι ισχύει για όλους. Μπορείτε να γράψετε τον περιττό αριθμό 2ν+1 ως διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών; Με άλλα λόγια μπορείτε να γενικεύσετε καταλήγοντας σε μια παράσταση για οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό ν και ύστερα να την αποδείξετε;*

Μέσω της ατελούς επαγωγής και επιβεβαίωσης λίγων ειδικών περιπτώσεων οι μαθητές βγάζουν το γενικό συμπέρασμα «*Κάθε περιττός αριθμός γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών*». Κατά κανόνα όταν οι μαθητές επιβεβαιώνουν μια εικασία με ένα ή με λίγα παραδείγματα συμπεραίνουν ότι είναι αληθής. Δυσκολεύονται να αντιληφθούν ότι «*μία μόνο περίπτωση ή λίγες ειδικές περιπτώσεις δεν αποτελούν αποδείξεις*». Ο έλεγχος μιας εικασίας μέσα από ένα περιορισμένο πλήθος παραδειγμάτων ονομάζεται «απλοϊκός εμπειρισμός». Η απάντηση στο ερώτημα «*Πόσο συχνά συμβαίνει ένας περιττός αριθμός να γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών;*» παραπέμπει στη γενίκευση[1]. Οι μαθητές ήταν σε θέση να περιγράφουν λεκτικά το αριθμητικό μοτίβο, να διακρίνουν σχέσεις και να κάνουν προβλέψεις, αλλά δυσκολεύονταν να εκφράσουν τα αριθμητικά μοτίβα με όρους που οδηγούν στη γενίκευση. Ήταν φανερό ότι υπήρχε ένα χάσμα ανάμεσα στις αριθμητικές κανονικότητες και στην ικανότητα αλγεβρικής τους έκφρασης. Πέρασαν πάνω από 10 λεπτά και καμιά απόδειξη δεν φαινόταν. Πάντως αυτός ο χρόνος ήταν ευεργετικός και εξυπηρετούσε ανάγκες κατανόησης. Τότε ακολούθησε ο διάλογος:

**Β.:** *Το βρήκα.*
**Δάσκαλος:** *Να ακούσουμε.*
**Β.:** *Βρήκαμε* $25^2 - 24^2 = 25 + 24$ *είναι ακόμα* $26^2 - 25^2 = 26 + 25$.
**Δάσκαλος:** *Δηλαδή;*
**Β.:** *Ακόμα ισχύει* $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha + \beta$ *και είναι περιττός.*
**Δάσκαλος:** *Η Μ.*
**Μ.:** *Λάθος! Ισχύει* $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$.
**Β.:** *Η ταυτότητα ισχύει. Όμως ξέρουμε ότι α-β=1. Έτσι είναι:* $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)\cdot 1 = \alpha+\beta$.
*και το α+β είναι περιττός. Να συνεχίσω;*
**Δάσκαλος:** *Ναι.*
**Β.:** *Δεν μπορούμε να σκεφτούμε ανάποδα; Δηλαδή* $\alpha + \beta = \alpha^2 - \beta^2$ *;*
**Δάσκαλος:** *Εσείς τι λέτε;*

Η συζήτηση που ακολούθησε ήταν γόνιμη. Κάποια στιγμή ένας μαθητής το βρήκε:

$$2\nu + 1 = (\nu+1)^2 - \nu^2$$

Σταδιακά άνοιξε η όρεξη και στους άλλους μαθητές που έβαλαν σε τάξη τα σκόρπια επιχειρήματά τους βελτιώνοντας τη συντακτική οργάνωση της αιτιολόγησής, τους ώστε να είναι κατανοητή από τους συμμαθητές τους. Έτσι παρουσίασαν δύο θαυμάσιες αποδείξεις:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\nu+1)^2 - \nu^2 = (\nu^2 + 2\nu + 1) - \nu^2 = 2\nu + 1.$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\nu+1)^2 - \nu^2 = (\nu + 1 + \nu)\cdot(\nu + 1 - \nu) = 2\nu + 1.$$

[1] Επίσης αποδεικνύεται ότι: *«Κάθε πρώτος αριθμός p>2 γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο θετικών ακεραίων κατά μοναδικό τρόπο»*.

Ο προηγούμενος γενικός κανόνας ισχύει και αντίστροφα: Όταν το ν διατρέχει το Ν, το 2ν+1 διατρέχει το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών. Έτσι αν 2ν+1 είναι τυχαίος περιττός έχουμε:

$$2\nu+1=\left(2\nu+1\right)\cdot 1=\left(\nu+1+\nu\right)\cdot\left(\nu+1-\nu\right)=\left(\nu+1\right)^2-\nu^2=\alpha^2-\beta^2.$$

**Επομένως, κάθε φυσικός αριθμός γράφεται με τη μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών αν και μόνο αν είναι περιττός.**

Άρα κάθε αριθμός της μορφής 2ν+1 γράφεται στη μορφή $\left(\nu+1\right)^2-\nu^2$. Έτσι αποδείξαμε το ευθύ και το αντίστροφο, περάσαμε δηλαδή σε μια ισχυρότερη σύνδεση από την απλή συνεπαγωγή (αν, …, τότε) στην ισοδυναμία των δύο προτάσεων (τότε και μόνο τότε).

Αυτές είναι αποδείξεις που δείχνουν δύο διαφορετικούς τρόπους μετάβασης από το ερώτημα στην απάντηση, από την υπόθεση της συνεπαγωγής στο συμπέρασμα. Μάλιστα ισχύουν όχι μόνο για τους θετικούς, αλλά για όλους τους ακέραιους αριθμούς. Κάθε απόδειξη είναι μια αιτιολογημένη επιβεβαίωση της αλήθειας που έχει καθολικό χαρακτήρα. Αυτή είναι η δύναμη της άλγεβρας. Η γενίκευση απαιτεί από τους μαθητές να παραστήσουν σωστά τους αριθμούς α και β: αφού είναι διαδοχικοί ένας κατάλληλος συμβολισμός είναι α=ν+1 και β=ν. Επίσης θα πρέπει να συμπεράνουν ότι ο 2ν+1 παριστάνει περιττό. Στο τέλος δεν θα πρέπει να ξεχάσουν την απόδειξη του αντιστρόφου. Πάντως η εύστοχη χρήση της μεταβλητής και η εφαρμογή των κανόνων της αποδεικτικής διαδικασίας δεν ήταν εύκολη υπόθεση για τους μαθητές. Ίσως μια από τις δυσκολίες να οφείλεται στο γεγονός ότι τα σχολικά προγράμματα μελετούν την Άλγεβρα ως ξεχωριστό θέμα, ασύνδετο από την Αριθμητική και τη Γεωμετρία. Έτσι οι μαθητές αναλίσκονται σε ένα σημειογραφικό επίπεδο χωρίς να εμβαθύνουν στα θεμελιώδη γνωρίσματα της αλγεβρικής σκέψης.

**Πρόβλημα 2:** *Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί που διαφέρουν κατά 2 (α-β=2), να υπολογίσετε την παράσταση* $\alpha^2-\beta^2$ *για διάφορες τιμές των α και β. Για παράδειγμα να υπολογίσετε:* $2^2-0^2, 3^2-1^2$, $4^2-2^2$, $5^2-3^2$ *και* $6^2-4^2$. *Παρατηρείτε κάποια κανονικότητα; Πόσο συχνά συμβαίνει ένα μη αρνητικό πολλαπλάσιο του 4 να γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών που διαφέρουν κατά 2;*

Τώρα οι μαθητές πειραματίζονται με ζεύγη φυσικών αριθμών α και β που διαφέρουν κατά 2. Η εξέταση των παραδειγμάτων μπορεί να τροφοδοτήσει τη γενίκευση. Υπολογίζουν τις διαφορές $\alpha^2-\beta^2$ για τις εξής ειδικές περιπτώσεις:

$$\begin{aligned}
&\Pi_0: \quad 2^2-0^2=4\cdot 0+4\\
&\Pi_1: \quad 3^2-1^2=4\cdot 1+4\\
&\Pi_2: \quad 4^2-2^2=4\cdot 2+4\\
&\Pi_3: \quad 5^2-3^2=4\cdot 3+4\\
&\Pi_4: \quad 6^2-4^2=4\cdot 4+4
\end{aligned}$$

Οι μαθητές ελέγχοντας μερικά παραδείγματα βρίσκουν με τη σειρά τους αριθμούς 4, 8, 12, 16 και 20 και βγάζουν προοδευτικά το γενικό συμπέρασμα ότι αν δύο οποιοιδήποτε αριθμοί διαφέρουν κατά 2, τότε η διαφορά των τετραγώνων τους θα είναι πολλαπλάσιο του 4. Πόσο εύκολα η προηγούμενη καταγραφή συμβάλλει στην αναγνώριση μοτίβων και στην αλγεβρική γενίκευση; Ας δούμε πώς φαίνεται αυτό στο ακόλουθο επεισόδιο:

**Δάσκαλος:** *Μπορείτε να γράψετε το παράδειγμα $\Pi_\nu$ ; Η Ζ.*

**Ζ.:** *Δεν είμαι σίγουρη τι σημαίνει το παράδειγμα $\Pi_\nu$ .*

**Δάσκαλος:** *Είναι ένας τρόπος για να αναφερθούμε στο νιοστό παράδειγμα, να γράψουμε το νιοστό αριθμό του μοτίβου μας. Κοίταξε, ονομάσαμε $\Pi_0$ το παράδειγμα που έχει τη μηδενική σειρά δηλαδή το $\Pi_0$ :* $2^2 - 0^2 = 4 = 4\cdot 0 + 4$ *, $\Pi_1$ το επόμενο κτλ., έτσι το 50-στό παράδειγμα θα το ονομάσουμε $\Pi_{50}$ και το νιοστό παράδειγμα $\Pi_\nu$ , όπου ο ν μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός…*

**Ζ.:** *Η απάντηση έχει σχέση με τον ν;*

**Δάσκαλος:** *Μπορείτε να γράψετε την παράσταση που να εξαρτάται από το ν, δηλαδή το παράδειγμα $\Pi_\nu$ ;*

**Ζ.:** *Δεν είμαι σίγουρη.*

**Δάσκαλος:** *Ας υποθέσουμε ότι ν=10. Ποια θα είναι τότε η παράσταση $\Pi_\nu$ αν το ν είναι 10;*

**Ζ.:** *Νομίζω $10^2 - 9^2$ …. Όχι… $12^2 - 10^2$ . Περιμένετε…* (κάνει τις πράξεις) *Είναι $144 - 100 = 44$ .*

**Δάσκαλος:** *Πώς αλλιώς μπορούμε να γράψουμε το 44;*

**Ζ.:** *Μπορούμε να το γράψουμε… 4 ·11, γιατί είναι πολλαπλάσιο του 4.*

**Δάσκαλος:** *Η Ε.*

**Ε.:** *Είναι καλύτερα να το γράψουμε στη μορφή 4 ·10+4.*

**Δάσκαλος:** *Συμφωνείς;*

**Ζ.:** *Ναι έτσι είναι.*

**Δάσκαλος:** *Και αν το ν είναι 100;*

**Ζ.:** (Γράφει:) *$102^2 - 100^2$ . Να κάνω τις πράξεις, για να βρω το αποτέλεσμα;*

**Δάσκαλος:** *Μπορείς να γράψεις μια παράσταση για το $\Pi_{100}$ όχι το αριθμητικό αποτέλεσμα, αλλά τον τρόπο για να φτάσουμε σε αυτό.*

**Ζ.:** (Γράφει:) $102^2 - 100^2 = 102\cdot 102 - 10000 =$ *… Να συνεχίσω;*

**Δάσκαλος:** *Όχι! Μην το υπολογίσεις. Χρησιμοποιώντας τον αριθμό 100 μπορείς να γράψεις μια παράσταση;*

**Ζ.:** (Γράφει:) $\Pi_{100}$ : $102^2 - 100^2 = 4\cdot 100 + 4$ .

**Δάσκαλος:** *Σωστά. Μπορείς τώρα να γράψεις μια παράσταση για το ν;*

**Ζ.:** *Να γράψω πρώτα άλλο ένα παράδειγμα με αριθμούς;*

**Δάσκαλος:** *Εντάξει! Τότε γράψε για ν=1821;*

**Ζ.:** (Γράφει:) $\Pi_{1821}$ : $1823^2 - 1821^2 = 4\cdot 1821 + 4$ .

**Δάσκαλος:** *Τώρα ο αριθμός είναι άγνωστος και τον ονομάζουμε ν. Πώς θα μπορούσες να φτάσεις στο $\Pi_\nu$ ;*

**Ζ.:** (Γράφει τότε:) $(\nu+2)^2 - \nu^2 = 4\nu + 4$ .

Η μαθήτρια αναγνώρισε το μοτίβο, αλλά είχε δυσκολίες στην επέκταση και τη γενίκευση. Υπήρχε ένα χάσμα ανάμεσα στην αναγνώριση της αριθμητικής κανονικότητας και στην άμεση παρουσίαση μιας αλγεβρικής έκφρασης για κάθε όρο της ακολουθίας. Το επόμενο στάδιο είναι η αλγεβρική απόδειξη. Έτσι στο εν λόγω πρόβλημα, για να βρουν οι μαθητές τον γενικό κανόνα, πρέπει πάλι να παραστήσουν σωστά τους αριθμούς α και β. Ορισμένοι έθεσαν α=ν+2 και β=ν:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\nu+2)^2 - \nu^2 = (\nu+2+\nu)\cdot(\nu+2-\nu) = (2\nu+2)\cdot 2 = 4\nu+4 .$$

Η αλγεβρική σκέψη είναι μια διαδικασία αφαίρεσης που παραπέμπει στη γενικότητα. Ο προηγούμενος γενικός κανόνας ισχύει και αντίστροφα: Όταν το ν διατρέχει το N, τότε το 4ν+4 διατρέχει το σύνολο των μη μηδενικών πολλαπλασίων του 4. Άλλωστε $0 = 1^2 - 1^2$. Έτσι αν 4ν+4 είναι τυχαίο πολλαπλάσιο του 4 έχουμε:

$$4\nu + 4 = (2\nu+2)\cdot 2 = (\nu+2+\nu)\cdot(\nu+2-\nu) = (\nu+2)^2 - \nu^2 = \alpha^2 - \beta^2 .$$

Ορισμένοι άλλοι μαθητές έθεσαν α=ν+1 και β=ν-1 και βρήκαν: $4\nu = (\nu+1)^2 - (\nu-1)^2$, την οποία απέδειξαν. Κάθε απόδειξη συνιστά επιβεβαίωση της αλήθειας κατά τρόπο πειστικό και αδιαφιλονίκητο.

**Επομένως, κάθε πολλαπλάσιο του 4 γράφεται με τη μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών που διαφέρουν κατά δύο και αντιστρόφως**.

**Πρόβλημα 3:** *Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί με α-β>2, να υπολογίσετε την παράσταση* $\alpha^2 - \beta^2$ *για διάφορες τιμές των α και β. Για παράδειγμα να υπολογίσετε:* $8^2 - 5^2$, $9^2 - 4^2$, $8^2 - 4^2$ *και* $9^2 - 3^2$. *Πώς μπορείτε να αξιοποιήσετε τα δύο προηγούμενα προβλήματα; Μπορείτε να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα;*

Οι μαθητές εξετάζουν τη διαφορά $\alpha^2 - \beta^2$ όταν οι φυσικοί αριθμοί α και β έχουν οποιαδήποτε διαφορά μεταξύ τους. Μετά από δοκιμές ανάγονται σε μια από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

Δύο παραδείγματα με περιττή διαφορά: α-β=3 και α-β=5.

$$8^2 - 5^2 = (8^2 - 7^2) + (7^2 - 6^2) + (6^2 - 5^2) = 15 + 13 + 11 = 39 \text{ (περιττός)}$$

$$9^2 - 4^2 = (9^2 - 8^2) + (8^2 - 7^2) + (7^2 - 6^2) + (6^2 - 5^2) + (5^2 - 4^2) = 17 + 15 + 13 + 11 + 9 = 65 \text{ (περιττός)}$$

Επομένως, αν η διαφορά είναι περιττός αριθμός, βρίσκουμε ένα άθροισμα περιττού πλήθους περιττών αριθμών (όπου x-y=1), δηλαδή έναν περιττό αριθμό, που ήδη γνωρίζουμε ότι κατασκευάζεται (Πρόβλημα 1). Γενικά, αν ο α-β είναι περιττός (α άρτιος και β περιττός ή αντίστροφα), τότε ο α+β θα είναι επίσης περιττός και το γινόμενο $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$ είναι περιττός. Άρα ο $\alpha^2 - \beta^2$ είναι περιττός.

Και αν η διαφορά είναι άρτιος αριθμός; Ας εξετάσουμε δύο παραδείγματα με άρτια διαφορά: α-β=4 και α-β=6.

$$8^2 - 4^2 = (8^2 - 6^2) + (6^2 - 4^2) = 28 + 20 = 48 = 4 \cdot 12 \text{ (πολλαπλάσιο του 4)}$$

$$9^2 - 3^2 = (9^2 - 7^2) + (7^2 - 5^2) + (5^2 - 3^2) = 32 + 24 + 16 = 72 = 4 \cdot 18 \text{ (πολλαπλάσιο του 4)}$$

Επομένως, αν η διαφορά είναι άρτιος αριθμός, βρίσκουμε ένα άθροισμα πολλαπλασίων του 4 (όπου x-y=2), δηλαδή τελικά ένα πολλαπλάσιο του 4, που ήδη γνωρίζουμε ότι κατασκευάζεται (Πρόβλημα 2). Γενικά, αν ο α-β είναι άρτιος (είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί), τότε ο α+β θα είναι επίσης άρτιος και το γινόμενο $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$ είναι πολλαπλάσιο του 4. Άρα ο $\alpha^2 - \beta^2$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

**Επομένως, αν ένας αριθμός είναι περιττός ή πολλαπλάσιο του 4 γράφεται με τη μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.**

Μήπως κάθε ακέραιος θετικός αριθμός γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών; Ήδη αποδείξαμε, ότι όλοι οι περιττοί φυσικοί αριθμοί και όλα τα πολλαπλάσια του 4 κατασκευάζονται. Μάλιστα δεν είναι απαραίτητο οι δύο αριθμοί να διαφέρουν κατά 1 ή κατά 2. Επειδή τίποτα δεν πρέπει να μείνει ανεξέταστο, απομένει να δούμε αν οι υπόλοιποι αριθμοί που δεν είναι ούτε περιττοί ούτε πολλαπλάσια του 4, μπορούν να γραφούν στη μορφή διαφοράς δύο τετραγώνων. Τέτοιοι αριθμοί είναι το 2, το 6, το 10 κτλ. Ας εξετάσουμε αν ο αριθμός 2 είναι κατασκευάσιμος.

**Πρόβλημα 4:** *Μπορεί ο αριθμός 2 να παρασταθεί ως διαφορά δύο τετραγώνων* $x^2 - y^2$*, όπου οι x και y είναι φυσικοί αριθμοί;*

Για να λύσουμε το πρόβλημα, αρκεί να βρούμε όλες τις ακέραιες θετικές λύσεις της εξίσωσης $x^2 - y^2 = 2$. Έχουμε:

$$2 = (x - y)(x + y) \text{ και } x - y < x + y.$$

Επειδή ο 2 είναι πρώτος αριθμός θα πρέπει υποχρεωτικά x-y=1 και x+y=2. Από τη λύση του συστήματος βρίσκουμε: $y = \frac{1}{2}$ και $x = \frac{3}{2}$, άτοπο αφού οι x και y είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Έτσι βρίσκουμε:

$$2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Άρα ο αριθμός 2 δεν γράφεται με τη μορφή διαφοράς τετραγώνων ακεραίων με x>0 και y>0.

Ο αριθμός 2 είναι της μορφής 4ν+2. Η προηγούμενη απόδειξη δείχνει ότι ένας αριθμός της μορφής 4ν+2 δεν μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι και άλλοι αριθμοί της μορφής 4ν+2 δεν κατασκευάζονται. Γενικά, αν οι x+y και x-y ήταν ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός, τότε οι x και y δεν μπορούν να είναι ακέραιοι.

Επομένως η εικασία *«Όλοι οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών»* απορρίπτεται, γιατί παρουσιάζονται εξαιρέσεις. Ένα αντιπαράδειγμα αρκεί, για να περιορίσει την περιοχή εγκυρότητας της εικασίας. Έτσι με επαγωγικές παρατηρήσεις, διαδοχικές προσεγγίσεις και συνδυασμούς ειδικών περιπτώσεων καταλήγουμε στην ανασκευή της αρχικής εικασίας.

**Βελτιωμένη εικασία: Αν ένας ακέραιος θετικός αριθμός είναι περιττός ή πολλαπλάσιο του 4 γράφεται με τη μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών; Ισχύει το αντίστροφο;**

### 3. Απόδειξη με τη συνδρομή της Θεωρίας Αριθμών: υπόλοιπο Ευκλείδειας διαίρεσης με 4 και διάκριση περιπτώσεων

Έχουμε διαπιστώσει ότι αν ένας ακέραιος θετικός αριθμός είναι περιττός ή πολλαπλάσιο του 4 γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών, ενώ ο αριθμός 2 δεν γράφεται. Υποθέτουμε ότι το ίδιο ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς που έχουν τη γενική μορφή 4ν+2. Υπάρχει μια συνθετική απόδειξη για όλες τις περιπτώσεις; Με στόχο την εύρεση συνδετικών κρίκων για τη γενίκευση θέσαμε το ακόλουθο πρόβλημα:

**Πρόβλημα 5:** *Ποιοι είναι οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί που μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών; Ειδικότερα μπορούν οι αριθμοί 2, 6, 10, 14, 18, …,* *4ν+2 να παρασταθούν ως διαφορά δύο τετραγώνων $α^2 - β^2$, όπου οι α και β είναι φυσικοί αριθμοί;* ***Βοηθητικά ερωτήματα:*** *Ποιο μπορεί να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αριθμού με το 4; Ποιο μπορεί να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του τετραγώνου ενός αριθμού με το 4; Και ακόμα ποιο μπορεί να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης μιας διαφοράς δύο τετραγώνων με το 4;*

Το πρόβλημα δόθηκε ως κατ'οίκον εργασία και συζητήθηκε διεξοδικά στην τάξη. Πώς μπορεί να γίνει το πέρασμα από τα γνωστά στα άγνωστα; Οι απαντήσεις στα προαναφερόμενα ερωτήματα απαιτούν την προσφυγή στο Θεώρημα της Ευκλείδειας διαίρεσης. Έτσι η λύση γίνεται εύκολη:

- **Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αριθμού α με το 4:** Ας θεωρήσουμε ότι διαιρούμε έναν οποιοδήποτε αριθμό α με το 4. Θα βρούμε κάποιο πηλίκο π και κάποιο υπόλοιπο υ που ικανοποιεί την ανισότητα $0 \le υ < 4$. Σύμφωνα με την ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης, οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός α θα γράφεται στη μορφή α=4π+υ με υ=0 ή υ=1 ή υ=2 ή υ=3. Δηλαδή,

  $$α=4π \text{ ή } α=4π+1 \text{ ή } α=4π+2 \text{ ή } α=4π+3.$$

  Άρα οι μόνες δυνατές τιμές του υ είναι το 0, το 1, το 2 και το 3.

- **Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $α^2$ με το 4:** Όπως και πριν αν διαιρέσουμε τον φυσικό αριθμό α με το 4 θα βρούμε πηλίκο π (για το οποίο δεν έχουμε καμιά πληροφορία εκτός από το ότι είναι ακέραιος φυσικός αριθμός) και ένα υπόλοιπο υ που είναι 0, 1, 2 ή 3. Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε:

  $$α^2 = (4π+υ)^2 = 16π^2 + 8πυ + υ^2 = 4(4π^2 + 2πυ) + υ^2.$$

  Διακρίνουμε τώρα τέσσερις περιπτώσεις:

  α) Αν υ=0, τότε $α^2 = 16π^2 = 4 \cdot 4π^2 = 4κ$.

  β) Αν υ=1, τότε $α^2 = (4π+υ)^2 = 4(4π^2 + 2π) + 1 = 4κ + 1$.

  γ) Αν υ=2, τότε $α^2 = (4π+υ)^2 = 4(4π^2 + 4π) + 4 = 4(4π^2 + 4π + 1) = 4κ$.

  δ) Αν υ=3, τότε: $α^2 = (4π+υ)^2 = 4(4π^2 + 6π) + 9 = 4(4π^2 + 6π + 2) + 1 = 4κ + 1$.

  Άρα, το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αριθμού της μορφής $α^2$ με το 4 είναι 0, ή 1.

- **Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $α^2$ - $β^2$ με το 4**. Διακρίνουμε τέσσερις συνδυασμούς:

  α) Αν $α^2 = 4κ$ και $β^2 = 4λ$, τότε $α^2 - β^2 = 4κ - 4λ = 4(κ - λ) = 4ρ$.

  β) Αν $α^2 = 4κ$ και $β^2 = 4λ + 1$, τότε:

  $$α^2 - β^2 = 4κ - (4λ+1) = 4κ - 4λ - 1 = 4κ - 4(λ+1) + 4 - 1 = 4(κ - λ - 1) + 3 = 4ρ + 3.$$

  γ) Αν $α^2 = 4κ + 1$ και $β^2 = 4λ + 1$, τότε:

  $$α^2 - β^2 = (4κ+1) - (4λ+1) = 4κ + 1 - 4λ - 1 = 4(κ - λ) = 4ρ.$$

  δ) Αν $α^2 = 4κ + 1$ και $β^2 = 4λ$, τότε: $α^2 - β^2 = (4κ+1) - 4λ = 4(κ - λ) + 1 = 4ρ + 1$.

Άρα, το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αριθμού που γράφεται στη μορφή διαφοράς τετραγώνων μπορεί να είναι μόνον 0, 1, ή 3, αλλά όχι 2! Οι φυσικοί αριθμοί της μορφής 4ρ+3 και 4ρ+1 εύκολα μετατρέπονται στη μορφή 2ν+1 (περιττοί). Χρησιμοποιούμε αλγεβρικά σύμβολα, για να εκφράσουμε αλγεβρικές γενικότητες. Έτσι η απόδειξη με τη μέθοδο της διάκρισης περιπτώσεων οδήγησε σε πλήρη μελέτη του προβλήματος. Έχουμε άλλη μια τεκμηριωμένη και αδιάσειστη επιβεβαίωση της αλήθειας.

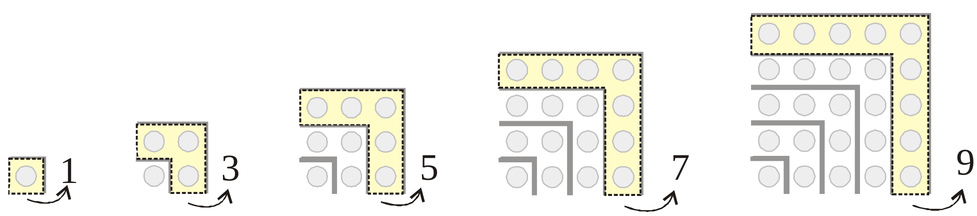
**Επομένως, ένας θετικός ακέραιος αριθμός γράφεται με τη μορφή διαφοράς δύο τετραγώνων φυσικών αριθμών, αν και μόνο αν είναι περιττός ή πολλαπλάσιο του 4.**

## 4. Συσχέτιση της Αριθμητικής με τη Γεωμετρία: παράσταση της διαφοράς τετραγώνων με εικονιστικούς αριθμούς

Σε αυτό το διδακτικό πείραμα δώσαμε βαρύτητα στη γεωμετρική μέθοδο. Αντί για αριθμητικά παραδείγματα ξεκινήσαμε με γεωμετρικές μορφές. Όμως η Αριθμητική και η Άλγεβρα δεν παραμελήθηκαν, αλλά βρίσκονταν σε γόνιμη συσχέτιση με τα εκάστοτε γεωμετρικά μοτίβα.

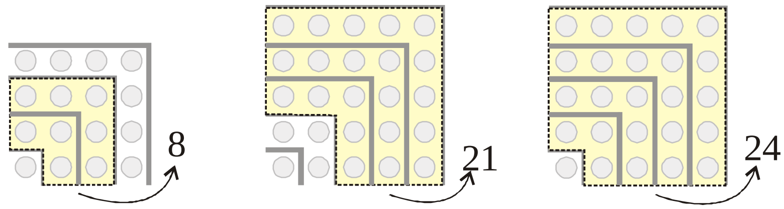
Ανατέθηκε σε δύο ομάδες μαθητών να φέρουν πληροφορίες για τους εικονιστικούς αριθμούς του Πυθαγόρα (569-475 π. χ.). Οι μαθητές παρουσίασαν στην τάξη διάφορους παραστατικούς σχηματισμούς από κυκλικούς δίσκους (χαλίκια) όπως τριγωνικούς, τετραγωνικούς, ορθογώνιους (ετερομήκεις), πενταγωνικούς κτλ. Όμως η μελέτη όλων αυτών των αριθμητικών αστερισμών δεν συνδέεται με το θέμα μας. Γι' αυτό περιοριζόμαστε μόνο στους τετραγωνικούς σχηματισμούς.

Σε αντίθεση με την αλγεβροποίηση της Γεωμετρίας από τον Descartes (περιγραφή γεωμετρικών αντικειμένων με αναλυτικές εξισώσεις), οι Πυθαγόρειοι ανέπτυξαν τη "γεωμετρική άλγεβρα" χρησιμοποιώντας γεωμετρικά μοντέλα και συσχετίζοντας τους αριθμούς με γεωμετρικά σχήματα. Έτσι οι φυσικοί αριθμοί είχαν γεωμετρικό χαρακτήρα. Για τη γεωμετρική παράσταση των αριθμών χρησιμοποιούσαν μια ορθή γωνία, το «γνώμονα». Η μονάδα συμβολιζόταν με έναν κυκλικό δίσκο που τον οριοθετούσε μια ορθή γωνία. Με τη διαδοχική προσθήκη γνωμόνων και κυκλικών δίσκων παράγονται όλοι οι περιττοί ακέραιοι αριθμοί[2], χωρίς να μεταβάλλεται η μορφή του τετραγώνου. Μετά τη μονάδα, μεταξύ δύο διαδοχικών γνωμόνων μπορούν να αναγνωριστούν οι υπόλοιποι εικονιστικοί περιττοί αριθμοί: 3, 5, 7, 9, … Αυτούς τους αριθμητικούς σχηματισμούς κυκλικών δίσκων θα ονομάσουμε «απλούς γνώμονες αριθμών».




Τους σχηματισμούς κυκλικών δίσκων που εσωκλείονται από περισσότερους διαδοχικούς γνώμονες θα αποκαλούμε «πολλαπλούς γνώμονες αριθμών». Στα ακόλουθα σχήματα διακρίνονται οι πολλαπλοί γνώμονες των αριθμών 8, 21 και 24. Ίσως αυτός να ήταν ένας από τους τρόπους που φανταζόταν τους αριθμούς ο Πυθαγόρας.

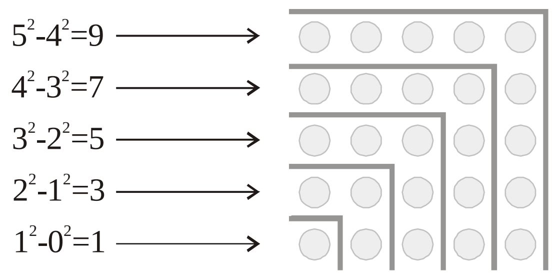
[2] Με ανάλογο τρόπο οι Πυθαγόρειοι παρίσταναν την ακολουθία των άρτιων αριθμών 2, 4, 6, …, 2ν με ορθογώνιους σχηματισμούς (ετερομήκεις). Άρχιζαν από το 2 και πρόσθεταν μη ισομήκεις γνώμονες αριθμών. Έτσι δημιουργούσαν μια διαδοχή ορθογωνίων με μεταβλητές αναλογίες πλευρών. Οι ιδιότητες που προκύπτουν είναι εξίσου ενδιαφέρουσες.




Οι μαθητές εύκολα βρήκαν ότι οι αριθμοί που συμβολίζουν οι τετραγωνικοί σχηματισμοί κυκλικών δίσκων είναι οι γνωστοί «παραστατικοί τετράγωνοι αριθμοί»: 1, 4, 9, 16, 25, 36 κτλ. Η ιστορικές γνώσεις έδωσαν το ερέθισμα. Θα μπορούσαν οι μαθητές μας διερευνώντας τους εικονιστικούς αριθμούς να ανακαλύψουν κι άλλες δομές και κανονικότητες[3]; Στη συνέχεια εστιάσαμε στο ακόλουθο πρόβλημα:

**Πρόβλημα 6:** *Μπορείτε να φανταστείτε πώς ο Πυθαγόρας παρίστανε τους περιττούς αριθμούς; Τι παρατηρείτε; Μπορεί κάθε απλός γνώμονας αριθμών να εκφράζεται ως διαφορά δύο «παραστατικών τετράγωνων αριθμών»;*

Πράγματι, κάθε απλός αριθμητικός γνώμονας παριστάνει έναν περιττό αριθμό που εκφράζεται ως διαφορά δύο διαδοχικών «παραστατικών τετράγωνων αριθμών». Με την αισθητοποίηση αφηρημένες μαθηματικές ιδέες και σχέσεις μεταξύ των αριθμών συγκεκριμενοποιούνται. Το ακόλουθο σχήμα είναι αποκαλυπτικό:




Οι μαθητές εκτός από την οπτική αντίληψη θέτουν σε ενέργεια και την ενεργητική ανακάλυψη. Καθώς αναγνωρίζουν ότι οι οπτικές ενδείξεις συνοργανώνονται σε μορφές σχηματίζοντας ένα μοτίβο ακολουθίας αντικειμένων, εκδηλώνουν ένα είδος λογικής σύλληψης. Το εικονιστικό πλαίσιο δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να ξεχωρίσουν τους επιμέρους γεωμετρικούς σχηματισμούς και να εστιάσουν την προσοχή τους σε σχέσεις ποσοτήτων: κάθε απλός γνώμονας (γωνία πάχους μιας μονάδας που σχηματίζεται από τη διαφορά δύο διαδοχικών τετραγώνων) είναι ταυτόχρονα γεωμετρική και αριθμητική δομή.

Όμως μια γωνία μπορεί να αποτελείται από πολλούς διαδοχικούς μοναδιαίους γνώμονες. Ένας περιττός αριθμός είναι κατασκευάσιμος, αν και μόνο αν μπορεί να παρασταθεί με έναν απλό

[3] Το άθροισμα των 5 πρώτων στη σειρά διαδοχικών περιττών μέχρι το 9 προκύπτει διαισθητικά από τη μορφή του τετραγώνου. Ισχύει: $1+3+5+7+9=5\times 5=5^2$ (βλ. σχήμα). Γενικά ισχύει: $1+3+5+7+\ldots+(2\nu-1)=\nu^2$. Έχουμε μια γεωμετρική μέθοδο δυναμικής συσχέτισης αριθμών και σχημάτων. Ανεξάρτητα από το πλήθος των διαδοχικών περιττών που προσθέτουμε, το άθροισμά τους ισούται πάντα με ένα τέλειο τετράγωνο, που εκφράζεται με έναν «παραστατικό τετράγωνο αριθμό». Έτσι αφηρημένες μαθηματικές ιδέες μέσω μιας συνθετικής εποπτείας αισθητοποιούνται ως συγκεκριμένες και αν εξασκηθούμε μπορούμε να τις ανιχνεύουμε με επιτυχία προτού τις διατυπώσουμε λεκτικά ή συμβολικά.

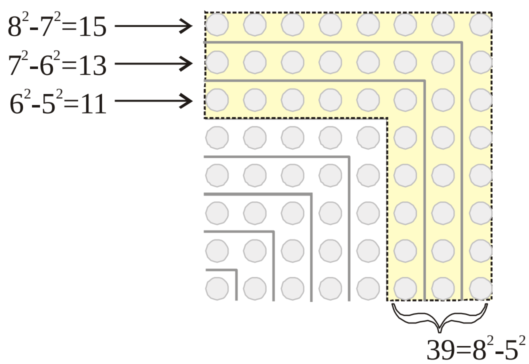
γνώμονα ή μια συνένωση περιττού πλήθους απλών διαδοχικών γνωμόνων (πολλαπλός γνώμονας). Ο περιττός αριθμός 39 παριστάνεται με τους ακόλουθους τρόπους:

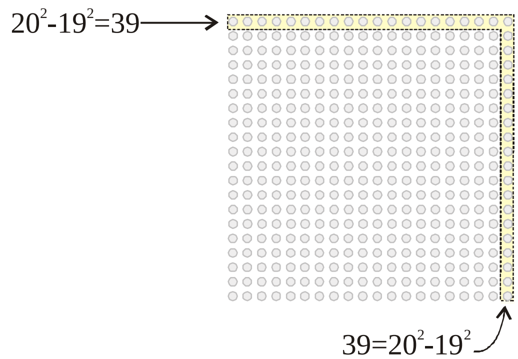
$$8^2 - 5^2 = \left(8^2 - 7^2\right) + \left(7^2 - 6^2\right) + \left(6^2 - 5^2\right) = 15 + 13 + 11 = 39 \;\text{ και }\; 20^2 - 19^2 = 400 - 361 = 39 .$$

Οι διαδοχικοί γνώμονες είναι διαδοχικοί περιττοί αριθμοί. Για παράδειγμα, ένας τρόπος, για να εκφράσουμε το 39, συνίσταται στην παράστασή του με έναν γνώμονα, που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τετράγωνο πλευράς

$$\frac{39-1}{2} = 19 .$$

Έτσι, το 39 παριστάνεται με δύο διαφορετικούς τρόπους ως διαφορά δύο τετραγώνων: $39 = 8^2 - 5^2$ και $39 = 20^2 - 19^2$. Αυτά φαίνονται παραστατικά στα ακόλουθα σχήματα:




Είναι φανερό ότι οι προηγούμενες γεωμετρικές παραστάσεις είναι λιτές στη δομή αλλά πλούσιες σε μαθηματικό περιεχόμενο. Βοηθούν τους μαθητές να «δουν» το γενικό μέσα στο ειδικό», να σχηματίζουν εσωτερικές αναπαραστάσεις για τη γενίκευση, η οποία είναι μια βάση της αλγεβρικής σκέψης. Επομένως, κάθε περιττός αριθμός είναι κατασκευάσιμος και γενικά ισχύει[4]:

$$\left(\nu + 1\right)^2 - \nu^2 = 2\nu + 1$$

Η συμβολική γενίκευση χωρίς ισχυρή διαισθητική στήριξη είναι πολύ πιθανό να οδηγήσει σε μια χρήση του προαναφερόμενου τύπου που χαρακτηρίζεται από αστάθεια και ασυνέπεια. Γενικά, θεωρούμε ότι η πλούσια εμπειρία των μαθητών πάνω σε γεωμετρικές μορφές προτού ακόμα εισαχθούν στην αναλυτική απόδειξη είναι επιβεβλημένη.

Και οι άρτιοι αριθμοί; Έτσι θέσαμε το ακόλουθο πρόβλημα:

---

[4] Αν τώρα υποθέσουμε ότι $2\nu + 1 = \kappa^2$ (τέλειο τετράγωνο), τότε καταλήγουμε σε έναν τύπο παραγωγής πυθαγόρειων τριάδων $\left(\nu,\ \kappa,\ \nu+1\right) = \left(\frac{\kappa^2 - 1}{2},\ \kappa,\ \frac{\kappa^2 + 1}{2}\right)$, όπου κ περιττός. Ωστόσο οι Πυθαγόρειοι μάλλον έβρισκαν πυθαγόρειες τριάδες από σχήματα που παρίσταναν διαφορές «παραστατικών τετράγωνων αριθμών». Παράδειγμα: για κ=3 από τον απλό αριθμητικό γνώμονα που συμβολίζει το 9 και αντιστοιχεί στην ισότητα $5^2 - 4^2 = 3^2$ προκύπτει η τριάδα (4, 3, 5). Το θέμα αυτό μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο ξεχωριστής μελέτης.

**Πρόβλημα 7:** *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αριθμητικούς γνώμονες, για να παραστήσετε άρτιους αριθμούς; Πάρτε για παράδειγμα τους αριθμούς 28, 48 και 26. Αναλογιστείτε αν είναι δυνατόν να παρασταθούν όλοι οι άρτιοι αριθμοί. Τι συμπεραίνετε; Μπορείτε να γενικεύσετε;*

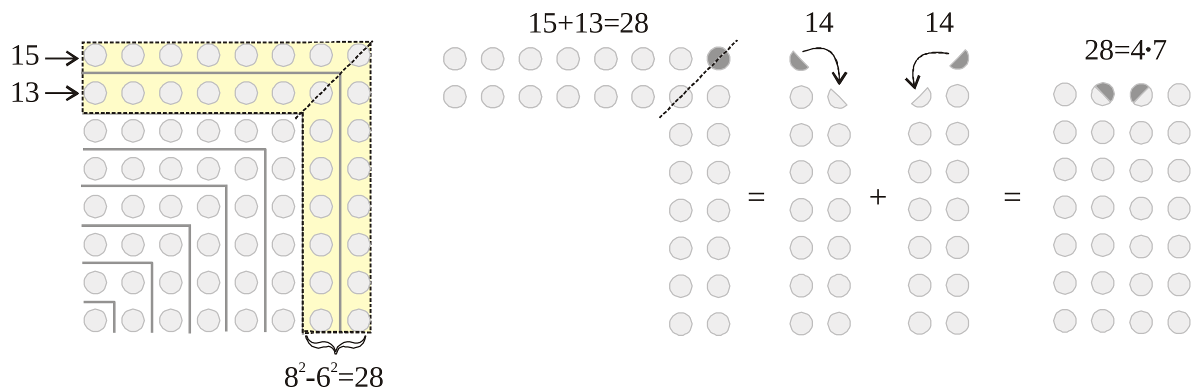
Ας εξετάσουμε πρώτα τον αριθμό 28 (πολλαπλάσιο του 4). Οι μαθητές μετά από αρκετές δοκιμές κατάφεραν να παραστήσουν τον αριθμό 28 ως εξής:

$$8^2 - 6^2 = \left(8^2 - 7^2\right) + \left(7^2 - 6^2\right) = 15 + 13 = 28 \text{ ή } 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28.$$

Στις ανακαλύψεις τους διαπιστώσαμε συνέργεια αριθμητικού, γεωμετρικού και αλγεβρικού συλλογισμού. Ας παρακολουθήσουμε ορισμένα επεισόδια:

**Δάσκαλος:** *Να παρατηρήσετε δύο διαδοχικούς αριθμητικούς γνώμονες. Τι συμπεραίνετε για το άθροισμά τους;*
**Σ.:** *Ας πάρουμε 15+13. Το άθροισμα είναι 28. Ή ακόμα 5+3=8, 7+5=12, 9+7=16 …*
**Δάσκαλος:** *Οι αριθμοί 8, 12, 16, … που βρίσκετε έχουν κάποια κανονικότητα;*
**Σ.:** *Το βρήκα! Είναι όλοι τους άρτιοι!*
**Δάσκαλος:** *Η Α.*
**Α.:** *Διαφωνώ! Για παράδειγμα το 6 δεν γράφεται ως άθροισμα δύο διαδοχικών περιττών. Νομίζω ότι το άθροισμα δύο διαδοχικών περιττών είναι πάντα πολλαπλάσιο του 4! Αυτό ισχύει για όλες τις περιπτώσεις που έχουμε δύο διαδοχικούς περιττούς αριθμούς! Το άθροισμά τους είναι πάντα πολλαπλάσιο του 4. Έτσι το 28 γράφεται 28=4·7.*
**Δάσκαλος:** Ο Σ.
**Σ.:** *Γιατί συμβαίνει αυτό; Δεν το κατάλαβα!*
**Α. :** *Μπορώ να το εξηγήσω; Αυτό μπορούμε να το δείξουμε και με τους κυκλικούς δίσκους.*
**Δάσκαλος:** *Πώς μπορεί να γίνει αυτό;*
**Α. :** *Εύκολο! Αρκεί τα δύο κυκλάκια που είναι στη γωνία να τα κόψουμε στη μέση και να μετακινήσουμε τα μισά. Τότε το 15+13 γίνεται 14+14, δηλαδή έχουν άθροισμα δύο ζυγών που είναι πολλαπλάσιο του 4. Πάντοτε δύο διαδοχικοί γνώμονες αριθμών μας δίνουν ένα πλήθος κυκλικών δίσκων που είναι πολλαπλάσιο του 4.*
**Δάσκαλος:** *Εκπληκτικό! Μπορείτε αυτό να το σχεδιάσετε χρησιμοποιώντας τους διαδοχικούς αριθμητικούς γνώμονες του Πυθαγόρα; Πάρτε δύο διαδοχικούς γνώμονες, όποιους θέλετε, για παράδειγμα 5 και 3 ή 7 και 5 και με ένα σχήμα προσπαθήστε να διαπιστώσετε αν το άθροισμά τους είναι πολλαπλάσιο του 4. Τι λέτε; …*

Οι μαθητές, μέσα από κατάλληλο χειρισμό των κυκλικών δίσκων, δημιούργησαν εργασίες ανάλογες με την παρακάτω. Τα σχήματα δείχνουν παραστατικά ότι ένα άθροισμα από δύο διαδοχικούς γνώμονες αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 4, ενισχύοντας την κατανόηση της ιδιότητας από όλους τους μαθητές.




Με το προηγούμενο σχήμα στα ήδη διαπιστωμένα αριθμητικά μοτίβα δόθηκε μια εικονιστική εξήγηση, η οποία με τη σειρά της επηρέασε τον τρόπο αιτιολόγησης των γενικεύσεων. Στον ακόλουθο διάλογο οι μαθητές συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις:

**Θ.:** *Όλα τα σχήματα που σχεδιάσαμε δείχνουν πράγματι ότι το άθροισμα δύο διαδοχικών περιττών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 4. Όμως με όλα αυτά τα παραδείγματα είμαστε σίγουροι;*
**Δάσκαλος:** *Εσύ τι λες; Έχεις κάτι καλύτερο να προτείνεις;*
**Θ.:** *Μπορούμε να το δικαιολογήσουμε!*
**Δάσκαλος:** *Πώς μπορείς να το κάνεις;*
**Θ.:** *Αν είχαμε 999+1001 νομίζω θα ήταν πολλαπλάσιο του 4.*
**Δάσκαλος:** *Γιατί;*
**Θ.:** *Γιατί έχουμε: 999+1001=2000=4·500, δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του 4. Δεν είναι έτσι;*
**Δάσκαλος:** *Βεβαίως! Πώς μπορούμε να εξασφαλίσουμε μια γενική απόδειξη; Τι σκέφτεστε; Ο Γ.*
**Γ.:** *Εγώ έγραψα: 999+1001= (2·500-1)+ (2·500+1)=4·500.*
**Δάσκαλος:** *Ο Θ.*
**Θ.:** *Δηλαδή κατέληξες στο ίδιο συμπέρασμα!*
**Γ.:** *Ναι, αλλά ισχύει ακόμα: (2ν-1)+(2ν+1)= 4ν, δηλαδή είναι πάντα πολλαπλάσιο του 4! Αυτό νομίζω είναι η σωστή μαθηματική απόδειξη. Έτσι δεν είναι;*

Στις προηγούμενες αριθμητικές σχέσεις οι αριθμοί χρησιμοποιούνται σχεδόν ως μεταβλητές (αριθμοί στη θέση γραμμάτων) και έτσι ελαττώνουν την απόσταση ανάμεσα στην αριθμητική και αλγεβρική γενίκευση. Μάλιστα οι «μεγάλοι» αριθμοί χρησιμεύουν ως ένα ενδιάμεσο σκαλοπάτι για να εκφράσουν τη γενικότητα με αλγεβρικά σύμβολα. Οι μαθητές που γενικεύουν τις αριθμητικές πράξεις αναπτύσσουν την αλγεβρική τους σκέψη.

Λίγο αργότερα τη σκυτάλη πήραν και άλλοι μαθητές για να καταθέσουν τη συνεισφορά τους:

**Δάσκαλος:** *Πώς μπορούμε να συμβολίσουμε με μεταβλητές τη διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών περιττών αριθμών;*
**Π.:** *Οι διαδοχικοί περιττοί γενικά είναι 2ν+1 και 2ν-1.*
**Δάσκαλος:** *Και πώς θα παραστήσουμε γενικά τη διαφορά τετραγώνων δύο θετικών περιττών ακεραίων αριθμών;*
**Π.:** *Ίσως μπορούμε να γράψουμε:* $(2\nu+1)^2-(2\nu-1)^2$.
**Δάσκαλος:** *Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τη διαφορά τετραγώνων;*
**Π.:** *Προκύπτει:*

$$(2\nu+1)^2-(2\nu-1)^2=(2\nu+1+2\nu-1)(2\nu+1-2\nu+1)=4\nu\cdot 2=8\nu.$$

*Έτσι βρίσκουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του 8.*
**Α.:** *Να προσθέσω κάτι;*
**Δάσκαλος:** *Βεβαίως. Ο Α.*
**Α.:** *Ας πάρουμε τη διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών άρτιων ή δύο διαδοχικών περιττών. Έχουμε:*

$$(\nu+1)^2-(\nu-1)^2=(\nu+1+\nu-1)(\nu+1-\nu+1)=2\nu\cdot 2=4\nu$$

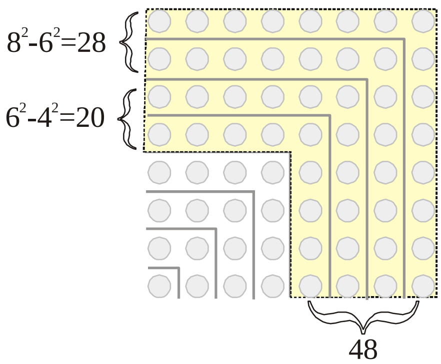
*Αυτό ισχύει και ανάποδα, δηλαδή κάθε πολλαπλάσιο του 4 εκφράζεται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών που διαφέρουν κατά δύο.*

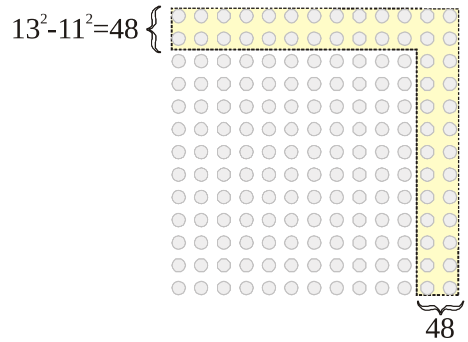
Οι τρεις τελευταίοι μαθητές χρησιμοποίησαν στις αποδείξεις τους μεταβλητές. Η χρήση κατάλληλου συμβολισμού στηρίζει την αλγεβρική σκέψη, συμβάλλοντας στην υπέρβαση της ανεπαρκούς παράθεσης πολλών ειδικών περιπτώσεων και αναδεικνύοντας την έκφραση γενικών αριθμητικών σχέσεων και την απόδειξη ιδιοτήτων. Η γενίκευση είναι μια από τις ρίζες της Άλγεβρας.

Τώρα ας έρθουμε εν συντομία στον αριθμό 48 (πάλι πολλαπλάσιο του 4). Ο αριθμός αυτός είναι το άθροισμα ενός άρτιου πλήθους από διαδοχικούς μοναδιαίους γνώμονες αριθμών. Ο αριθμός αυτός παριστάνεται με τους ακόλουθους τρόπους:

$$8^2-4^2=\left(8^2-6^2\right)+\left(6^2-4^2\right)=28+20=48 \text{ και } 13^2-11^2=48.$$

Αυτά φαίνονται παραστατικά στα ακόλουθα σχήματα:




Έτσι το 48 παριστάνεται με δύο διαφορετικούς τρόπους ως διαφορά δύο τετραγώνων: $48 = 8^2 - 4^2$ και $48 = 13^2 - 11^2$. Το άθροισμα άρτιου αριθμού γνωμόνων είναι πολλαπλάσιο του 4. Επιπλέον, η διαδοχή αριθμητικών γνωμόνων πάχους 2 αντιστοιχεί ακριβώς στην ακολουθία των μη μηδενικών πολλαπλασίων του 4. Άλλωστε $0 = 1^2 - 1^2$.

Οι μαθητές μετά από λεπτή παρατήρηση διαφόρων σχηματισμών κυκλικών δίσκων διαπίστωσαν ότι ήταν αδύνατο να παραστήσουν τον αριθμό 26 (άρτιος, αλλά όχι πολλαπλάσιο του 4) ως συνένωση απλών διαδοχικών αριθμητικών γνωμόνων. Βρήκαν:

$$26 = 15 + 11 = \left(8^2 - 7^2\right) + \left(6^2 - 5^2\right)$$

Δοκίμασαν πολλά ζεύγη αριθμών και ποικίλες διαφορές αριθμητικών γνωμόνων, για να παραστήσουν το 26, αλλά λύση δεν υπάρχει. Δύο συνεργαζόμενοι μαθητές διατύπωσαν την εικασία ότι οι αριθμοί της μορφής 4ν+2 είναι άθροισμα δύο περιττών αριθμών που διαφέρουν κατά 4. Πρώτα έγραψαν ένα αριθμητικό «δείγμα»: 7+3=10, 9+5=14, 11+7=18 κτλ. Ύστερα απέδειξαν την εικασία τους:

$$4\nu + 2 = 2\left(\nu+1\right)+1+2\left(\nu-1\right)+1 \text{ και } \left[2\left(\nu+1\right)+1\right]-\left[2\left(\nu-1\right)+1\right] = 2\nu+2+1-2\nu+2-1 = 4.$$

Οι προηγούμενες σχέσεις φανερώνουν ότι οι μαθητές που τις επινόησαν είχαν διεισδύσει στην ουσία του θέματος. Υπάρχουν βεβαίως και άλλες πολλαπλές αναπαραστάσεις αριθμών της μορφής 4ν+2 (εικονιστικές, αριθμητικές και συμβολικές).

**Έτσι με τη χρήση εικονιστικών αριθμών (και όχι μόνο) καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα: Ένας ακέραιος θετικός αριθμός γράφεται με τη μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών, αν και μόνο αν είναι περιττός ή πολλαπλάσιο του 4.**

Οι εικονιστικές παραστάσεις των αριθμών προσφέρουν εναλλακτικούς τρόπους που οδηγούν στη λύση του προβλήματος. Μπορούμε να ξεκινήσουμε με έναν απλό ή πολλαπλό γνώμονα αριθμών και να ερευνήσουμε τις ιδιότητες των εν λόγω αριθμητικών σχηματισμών: είναι περιττοί ή πολλαπλάσια του 4. Έτσι βρίσκουμε μια αναγκαία συνθήκη, για να είναι κατασκευάσιμος ένας αριθμός. Απομένει τότε να αποδείξουμε ότι όλοι οι περιττοί αριθμοί και όλα τα πολλαπλάσια του 4 παριστάνονται με τον ίδιο τρόπο. Έτσι η αναγκαία συνθήκη γίνεται επίσης και ικανή. Μια άλλη στρατηγική συνίσταται στην εύρεση αριθμών που μπορούν να παριστάνονται με πολλαπλούς γνώμονες αριθμών: οι περιττοί αριθμοί μπορούν να βρεθούν γρήγορα. Αυτό το χαρακτηριστικό αποτελεί μια πρώτη ικανή συνθήκη, για να είναι ένας αριθμός κατασκευάσιμος. Αναρωτιόμαστε τότε αν υπάρχουν άλλοι αριθμοί οι οποίοι να παριστάνονται με τον ίδιο τρόπο. Βρίσκουμε ακόμα όλα τα πολλαπλάσια του 4. Επομένως η ιδιότητα ένας αριθμός να είναι περιττός ή πολλαπλάσιο του 4 είναι μια νέα ικανή συνθήκη, πιο πλατιά. Απομένει τότε να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί κατασκευάσιμοι και η ικανή συνθήκη γίνεται τότε εξίσου αναγκαία. Αυτές οι δυο μέθοδοι είναι αισθητά διαφορετικές από λογική άποψη.

Με την εποπτεία, στα μάτια των μαθητών οι αφηρημένες μαθηματικές έννοιες φαντάζουν ξεκάθαρες και συγκεκριμένες. Οι αποδείξεις φαίνονται πλέον απτές και χειροπιαστές. Αυτή η αίσθηση εξομάλυνε τις δυσκολίες, διευκόλυνε την κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων και όπλισε με μαθηματική αυτοπεποίθηση τους αδύνατους μαθητές. Ο εικονογραφικός τρόπος παράστασης των αριθμών υπέβαλλε στους μαθητές μαθηματικές ιδέες, τούς βοηθούσε να ανακαλύπτουν ιδιότητες των αριθμών και να μελετούν τις διασυνδέσεις μεταξύ των αριθμών. Έτσι δεδομένα από την Ιστορία των Μαθηματικών μπορούν να ενσωματώνονται στην καθημερινή διδασκαλία ζωντανεύοντάς την.

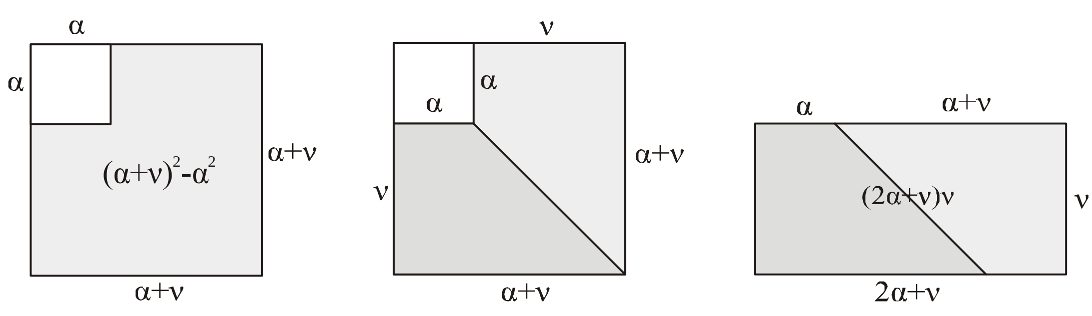
## 5. Αξιοσημείωτες ταυτότητες: συνύφανση της άλγεβρας με τη γεωμετρία

Η Άλγεβρα και η Γεωμετρία συνεργάζονται και επικοινωνούν πολλαπλά μεταξύ τους. Οι αλγεβρικές ταυτότητες αποκτούν ξεχωριστό ενδιαφέρον μέσα από γεωμετρικές ερμηνείες. Στα προηγούμενα χρησιμοποιήσαμε τη θεμελιώδη ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων χωρίς να κάνουμε ειδική μνεία για αυτήν. Τώρα θα την εξετάσουμε ξεχωριστά συνδυάζοντας την αλγεβρική με τη γεωμετρική μέθοδο.

**Πρόβλημα 8:** *Πώς μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά και γεωμετρικά τη διαφορά των τετραγώνων* $\left(\alpha+\nu\right)^2 - \alpha^2$ *σε γινόμενο, όπου α και ν είναι ακέραιοι φυσικοί αριθμοί; Είναι δυνατόν ο ένας παράγοντας του γινομένου να είναι άρτιος και ο άλλος περιττός; Πώς μπορείτε να μετατρέψετε έναν θετικό ακέραιο αριθμό σε διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών;*

Έτσι εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\left(\alpha+\nu\right)^2 - \alpha^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\nu + \nu^2 - \alpha^2\\ &= 2\alpha\nu + \nu^2\\ &= \left(2\alpha+\nu\right)\nu\,.\end{aligned}$$




Θεωρούμε τη διαφορά των εμβαδών δύο τετραγώνων με πλευρές α+ν και α. Στο αριστερό σχήμα το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι $\left(\alpha+\nu\right)^2 - \alpha^2$. Στο μεσαίο σχήμα το ίδιο χωρίο χωρίστηκε σε δύο ορθογώνια τραπέζια. Στο δεξιό σχήμα τα δύο τραπέζια αναδιατάσσονται, για να σχηματίσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές 2α+ν και ν. Έτσι το γινόμενο εκφράζει πάλι το ίδιο εμβαδόν: $(2α+ν)ν$. Έχουμε μια θαυμάσια σύνθεση αναλυτικής και διαισθητικής σκέψης.

Οι παράγοντες του γινομένου $(2α+ν)ν$ μπορεί να είναι ταυτόχρονα και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί αριθμοί; Η απάντηση σε αυτό το κομβικό ερώτημα είναι όχι, επειδή διαπιστώνουμε:

- Αν ο ν είναι περιττός, τότε ο 2α+ν είναι επίσης περιττός.
- Αν ο ν είναι άρτιος, τότε ο 2α+ν επίσης άρτιος.

Στην πρώτη περίπτωση το γινόμενο δύο περιττών θα είναι περιττός, ενώ στη δεύτερη το γινόμενο δύο αρτίων θα είναι πολλαπλάσιο του 4. Επομένως ένας αριθμός που γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών είναι ή περιττός ή πολλαπλάσιο του 4. Είναι αδύνατο να βρούμε πολλαπλάσιο του 4λ+2. Με την προηγούμενη επιχειρηματολογία αποδείξαμε ότι η συνθήκη είναι αναγκαία. Είναι όμως και ικανή; Μπορούμε να βρούμε έτσι όλους τους περιττούς; Όλα τα πολλαπλάσια του 4;

Για να βρούμε όλους τους περιττούς, αρκεί στην παράσταση $(2α+ν)ν$ να θέσουμε ν=1. Έτσι έχουμε $2α+1$, το οποίο καθώς το α διατρέχει το σύνολο N παίρνει για τιμές όλους τους περιττούς. Για να βρούμε όλα τα πολλαπλάσια του 4, αρκεί στην παράσταση $(2α+ν)ν$ να θέσουμε ν=2. Έτσι έχουμε $4α+4$, το οποίο παίρνει ως τιμές όλα τα μη μηδενικά πολλαπλάσια του 4. Άλλωστε βρίσκουμε επίσης το 0, εφόσον $0=1^2-1^2$. Έτσι με την προαναφερόμενη επιχειρηματολογία καταλήγουμε στο συμπέρασμα χωρίς κανένα κενό τόσο στη σύνδεση υποθέσεων και συμπεράσματος όσο και στη διαδοχή των επιχειρημάτων. Μέσα από την απόδειξη θεμελιώνεται με πειστικό τρόπο ο ισχυρισμός που εξετάζουμε.

**Συμπέρασμα: Ένας ακέραιος θετικός αριθμός γράφεται σε μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο ακεραίων αριθμών, αν και μόνο αν είναι περιττός ή πολλαπλάσιο του 4.**

## 6. Και πάλι γόνιμη σύμπλευση Γεωμετρίας και Άλγεβρας: η διοφαντική εξίσωση $x^2 - y^2 = κ$

Θεωρούμε τη διοφαντική εξίσωση[5]: $x^2 - y^2 = κ$. Πώς μπορεί να βρεθεί μια λύση της εξίσωσης και πώς όλες οι λύσεις της; (αν υπάρχουν) Οι απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά δίνονται με τη λύση των προβλημάτων 9 και 10.

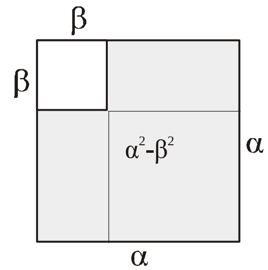
**Πρόβλημα 9:** *Πώς μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά και γεωμετρικά τη διαφορά δύο τετραγώνων, δηλαδή το* $α^2 - β^2$, $α > β$*; Πώς μπορείτε να μετατρέψετε έναν θετικό ακέραιο αριθμό κ σε διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών; Αν* $κ = α^2 - β^2$ *να προσδιορίσετε ένα ζεύγος ακεραίων αριθμών που ικανοποιεί αυτή την ισότητα. Να διακρίνετε αν κ είναι άρτιος και αν κ είναι περιττός.*

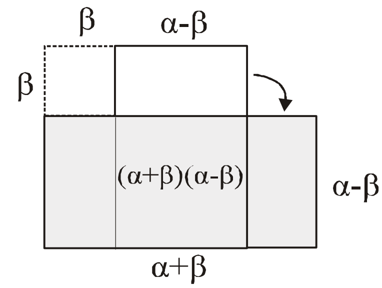
[5] Διοφαντική εξίσωση ονομάζεται κάθε πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές και δύο ή περισσότερους αγνώστους, της οποίας αναζητούμε τις ακέραιες λύσεις.

Θα επιμείνουμε πάλι στη δυναμική συσχέτιση αλγεβρικής μεθόδου και γεωμετρικής εποπτείας. Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα παραπέμπει στη γνωστή αλγεβρική ταυτότητα που μετατρέπει τη διαφορά δύο τετραγώνων σε γινόμενο:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta),\ \alpha > \beta$$

Μια γεωμετρική αναπαράσταση φαίνεται στα ακόλουθα σχήματα:




Θεωρούμε τη διαφορά των εμβαδών δύο τετραγώνων με πλευρές α και β. Στο αριστερό σχήμα το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι $\alpha^2 - \beta^2$. Στο δεξιό σχήμα το ίδιο χωρίο με ένα μικρό χειρισμό γίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α+β και α-β. Έτσι το γινόμενο εκφράζει πάλι το ίδιο εμβαδόν: $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$.

Τα άλλα ερωτήματα στηρίζονται στην ταυτότητα. Σύμφωνα με την ταυτότητα η μορφή μιας διαφοράς δύο τετραγώνων είναι ισοδύναμη με ένα γινόμενο. Κάθε αριθμός κ γράφεται ως γινόμενο 1×κ. Αν α-β=1, η ισότητα κ=1×κ επιτρέπει να γράψουμε τον κ στη μορφή διαφοράς δύο τετραγώνων. Αρκεί να προσδιορίσουμε δύο φυσικούς αριθμούς α και β έτσι ώστε α-β=1 και α+β=κ. Στην περίπτωση αυτή, οι αριθμοί α και β είναι η αλγεβρική λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \alpha + \beta = \kappa \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = \left( \frac{\kappa + 1}{2},\ \frac{\kappa - 1}{2} \right)$$

Επομένως, οι φυσικοί αριθμοί α και β είναι διαδοχικοί και ο α+β=κ είναι περιττός. Αυτή η ειδική περίπτωση όπου α-β=1, μάς επιτρέπει να λύσουμε το πρόβλημα για τους περιττούς αριθμούς. Αυτή η ανάλυση καταλήγει πράγματι στη λύση για όλους του περιττούς; Ναι, διότι αυτοί είναι όλοι άθροισμα δύο διαδοχικών αριθμών ( α και β). Για παράδειγμα:

$$11 = 1 \cdot 11 = (6 - 5)(6 + 5) = 6^2 - 5^2.$$

Γενικά, αν κ είναι περιττός αρκεί να πάρουμε $\alpha = \frac{\kappa + 1}{2}$ και $\beta = \frac{\kappa - 1}{2}$. Επομένως κάθε περιττός είναι κατασκευάσιμος.

Αν ο αριθμός κ είναι άρτιος, η ισότητα κ=1×κ δεν μας βοηθά να γράψουμε τον κ με τη μορφή της διαφοράς δύο τετραγώνων, όπως κάναμε παραπάνω με όλους τους περιττούς αριθμούς. Μπορούμε όμως να γράψουμε κ=2×λ. Θέτουμε τώρα α-β=2 και εξετάζουμε αν το α+β είναι άρτιος ή περιττός.

Αν οι α και β διαφέρουν κατά δύο (α-β=2), τότε αυτοί οι αριθμοί θα είναι ή δύο διαδοχικοί άρτιοι ή δύο διαδοχικοί περιττοί (α=β+2) . Και στις δύο περιπτώσεις το α+β θα είναι άρτιος, αφού ισχύει:

$$\alpha+\beta=(\beta+2)+\beta=2\beta+2=2(\beta+1)=2\rho.$$

Επίσης το (α+β)(α-β) είναι πολλαπλάσιο του 4:

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)= (2\beta+2)\cdot 2=4\beta+4=4(\beta+1)=4\mu.$$

Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε όλα τα μη μηδενικά πολλαπλάσια του 4.

$$\begin{cases} \alpha-\beta=2 \\ \alpha+\beta=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta+2 \\ 2\beta+2=\dfrac{\kappa}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \ (\alpha,\ \beta)=\left(\frac{\kappa}{4}+1,\ \frac{\kappa}{4}-1\right)$$

Επιπλέον λόγω της ισοδυναμίας κάθε πολλαπλάσιο του 4 είναι κατασκευάσιμο, δηλαδή μπορεί να τεθεί στη μορφή (α+β)(α-β).

Για παράδειγμα, αν κ=12 βρίσκουμε $\alpha=\frac{12}{4}+1=4$ και $\beta=\frac{12}{4}-1=2$. Οπότε:

$$12=2\cdot 6=(4-2)(4+2)=4^2-2^2.$$

**Συμπέρασμα: Ένας ακέραιος θετικός αριθμός γράφεται με μορφή διαφοράς δύο τετραγώνων φυσικών αριθμών αν και μόνο αν είναι περιττός ή πολλαπλάσιο του 4.**

Η προηγούμενη διαδικασία είναι αποτελεσματική για την εύρεση μιας μόνο λύσης του προβλήματος. Όμως πώς μπορούμε να βρούμε όλους τους τρόπους με τους οποίους ένας θετικός ακέραιος μπορεί να εκφραστεί ως διαφορά τετραγώνων δύο άλλων θετικών ακεραίων; Θα απαντήσουμε στο ερώτημα με τις ακόλουθες εφαρμογές. Σε αυτές η αξιοσημείωτη ταυτότητα έχει βεβαίως τον πρώτο λόγο.

**Πρόβλημα 10:** *Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι αριθμοί x και y ώστε:*

***α)*** $x^2-y^2=45$; ***β)*** $x^2-y^2=6$; ***γ)*** $x^2-y^2=3599$; ***δ)*** $x^2-y^2=13837$;

**α)** Για να λύσουμε τη διοφαντική εξίσωση προσδιορίζοντας τις δυνατές ακέραιες τιμές των x και y, υπάρχουν δύο τρόποι.

**Πρώτος τρόπος:** Χρησιμοποιούμε την εξίσωση $x^2-y^2=45$ και ψάχνουμε για δύο τέλεια τετράγωνα που να έχουν διαφορά 45. Δοκιμάζουμε διαφορετικές τιμές για το y και εξετάζουμε αν οι τιμές που προκύπτουν για το x είναι ακέραιοι αριθμοί.

| Τιμές του y | Διαδικασία εύρεσης του x | Απάντηση |
|---|---|---|
| y=1 | $x^2-1=45 \Rightarrow x^2=46$ | όχι |
| y=2 | $x^2-4=45 \Rightarrow x^2=49$ | (x, y)=(7, 2) |
| y=3 | $x^2-9=45 \Rightarrow x^2=54$ | όχι |
| y=4 | $x^2-16=45 \Rightarrow x^2=61$ | όχι |
| y=5 | $x^2-25=45 \Rightarrow x^2=70$ | όχι |
| y=6 | $x^2-36=45 \Rightarrow x^2=81$ | (x, y)=(9, 6) |

| | | |
|---|---|---|
| y=7 | $x^2 - 49 = 45 \Rightarrow x^2 = 94$ | όχι |
| … | … | … |

**Δεύτερος τρόπος:** Παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσης: $(x+y)(x-y)=45$. Στη συνέχεια αναζητούμε δύο αριθμούς της μορφής (x+y) και (x-y) που να έχουν γινόμενο 45. Βρίσκουμε:

- $45 = 45\times 1 = (23+22)(23-22) \Rightarrow (x, y) = (23, 22)$.
- $45 = 15\times 3 = (9+6)(9-6) \Rightarrow (x, y) = (9,\ 6)$.
- $45 = 9\times 5 = (7+2)(7-2) \Rightarrow (x, y) = (7,\ 2)$.

Υπάρχουν τρεις τρόποι παραγοντοποίησης του 45 σε ακέραιους παράγοντες, από τους οποίους προκύπτουν ισάριθμες λύσεις του προβλήματος (με δοκιμές ή με λύση κατάλληλων συστημάτων). Στο παράδειγμα $x^2 - y^2 = 1997$, αν παρατηρήσουμε ότι ο αριθμός 1997 είναι πρώτος, εύκολα βρίσκουμε τη μοναδική λύση: $1997 = 999^2 - 998^2$. Όμως σε άλλες εξισώσεις μόνο μερικές από τις παραγοντοποιήσεις οδηγούν σε ακέραιες λύσεις (π.χ. $x^2 - y^2 = 72$ ή $x^2 - y^2 = 60$ ).

Με την πρώτη μέθοδο μπορούμε να βρούμε μία ή δύο λύσεις της εξίσωσης εκτός κι αν επιμείνουμε (στον προηγούμενο πίνακα απαιτείται να φτάσουμε στο y=22). Η δεύτερη μέθοδος είναι γενικά συντομότερη και βοηθά στην εύρεση όλων των λύσεων.

**β)** Για την εύρεση των ακέραιων θετικών λύσεων της εξίσωσης $x^2 - y^2 = 6$ θα βασιστούμε στο δεύτερο τρόπο. Τότε:

$$6 = (x-y)(x+y) \text{ και } x-y < x+y.$$

Αναζητούμε δύο αριθμούς της μορφής (x+y) και (x-y) που να έχουν γινόμενο 6. Βρίσκουμε: $6 = 6\times 1$ και $6 = 3\times 2$, και λύνουμε τα συστήματα:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow (x,\ y) = (3{,}5,\ \ 2{,}5) \text{ και } \begin{cases} x-y=2 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow (x,\ y) = (2{,}5,\ \ 0{,}5).$$

Επομένως, η εξίσωση είναι αδύνατη στο σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών.

**γ)** Για τη λύση της εξίσωσης $x^2 - y^2 = 3599$ η δεύτερη μέθοδος απαιτεί την ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων του αριθμού 3599 και το συνδυασμό τους για την καταγραφή όλων των πολλαπλασιαστικών αναλύσεων του 3599, εργασία ιδιαίτερα επίπονη. Όμως αν χρησιμοποιήσουμε την πρώτη μέθοδο, φτάνουμε αμέσως στη λύση! Για y=1 βρίσκουμε:

$$x^2 - 1 = 3599 \Rightarrow x^2 = 3600 \Rightarrow x = 60 \Rightarrow (x, y) = (60, 1). \text{ Άρα: } 3599 = 60^2 - 1^2.$$

Αυτό μας δείχνει επίσης ότι η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων του 3599 είναι:

$$3599 = (60+1)(60-1) = 61\times 59.$$

**δ)** Με ανάλογους συλλογισμούς βρίσκουμε $13837 = 137\times 101$.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι μια διοφαντική εξίσωση της μορφής $x^2 - y^2 = \kappa$ μπορεί να έχει μοναδική λύση, δύο ή περισσότερες λύσεις ή να είναι αδύνατη. Η ποικιλία είναι αξιοθαύμαστη. Όμως για μια πολύ μεγάλη τιμή του κ, αν υπάρχει λύση, μπορεί να βρεθεί; Ποια είναι η απάντηση που μας δίνει η Ιστορία των Μαθηματικών στο ερώτημα αυτό;

## 7. Η Ιστορία των Μαθηματικών: διεύρυνση με τη μέθοδο του Pierre de Fermat

Όλες οι προηγούμενες διδακτικές δραστηριότητες παραπέμπουν σε θεμελιώδεις προβληματισμούς της Θεωρίας Αριθμών: πώς θα αναγνωρίσουμε αν ένας θετικός ακέραιος αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος και αν είναι σύνθετος, πώς θα τον γράψουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων; Για τη μελέτη αυτού του ερωτήματος οργανώσαμε μια ακόμα δραστηριότητα στην τάξη, με τη συνεπικουρία της ιστορικής συνιστώσας.

Το 1643, ο R. P. Mersenne έθεσε στον Pierre de Fermat (1601-1665) την πρόκληση: «*μέσα σε χρονικό διάστημα μιας ημέρας αποφάσισε αν ο ακέραιος αριθμός 100 895 598 169 είναι πρώτος ή όχι*». Ο Fermat του απάντησε στις 7 Απριλίου 1643 ότι «*αυτός ο αριθμός είναι σύνθετος και είναι γινόμενο των αριθμών 898.423 και 112.303 που είναι και οι δύο πρώτοι*». Η μέθοδος παραγοντοποίησης μεγάλων ακεραίων αριθμών που εφευρέθηκε από τον Fermat εκτίθεται αναλυτικά σε μια άλλη από τις επιστολές του, από την οποία επέζησε ένα απόσπασμα. Ούτε η ημερομηνία ούτε ο παραλήπτης αυτής της επιστολής έχουν γίνει γνωστά. Υποθέτουμε ότι θα απευθυνόταν στον Mersenne ή στον Frenicle. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα απόσπασμα από τη μέθοδο του Fermat.

Έστω ότι θέλουμε να ξέρουμε αν ένας ακέραιος αριθμός ν > 1 είναι πρώτος ή σύνθετος και αν είναι σύνθετος να τον αναλύσουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση που ο ν είναι περιττός (στην περίπτωση που είναι άρτιος έχουμε αμέσως έναν πρώτο παράγοντα, αφού οι άρτιοι ακέραιοι αναγνωρίζονται με μια ματιά). Εάν ο ν είναι σύνθετος, έχει έναν πρώτο παράγοντα $p \leq \sqrt{\nu}$. Θα μπορούσαμε επομένως να διαιρέσουμε το ν με καθέναν από τους πρώτους αριθμούς $p \leq \sqrt{\nu}$. Αν μια από τις διαιρέσεις δεν αφήνει υπόλοιπο, τότε ο ν είναι σύνθετος και γνωρίζουμε ήδη έναν πρώτο παράγοντα. Διαφορετικά, ο ν είναι πρώτος.

Αν ο ν έχει 31 ψηφία ως προς βάση 10 (δηλαδή, αν $10^{30} \leq \nu \leq 10^{31}$), στη λιγότερο ευνοϊκή περίπτωση το πλήθος των διαιρέσεων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των πρώτων αριθμών του διαστήματος $\left(1,\ 10^{15}\right)$. Υπάρχουν περίπου $29.844 \cdot 10^{9}$ πρώτοι αριθμοί για $p < 10^{15}$. Ένας υπολογιστής που θα εκτελούσε $10^{9}$ διαιρέσεις το δευτερόλεπτο θα χρειαζόταν περισσότερα από 29844 δευτερόλεπτα (πάνω από 8 ώρες) για να τις εκτελέσει όλες.

Η μέθοδος του Fermat, που περιγράφεται σε ένα γράμμα (που ίσως έστειλε το 1643 στον Mersenne), βασίζεται στην ταυτότητα $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Αυτή επιτρέπει να προσδιοριστεί αν ο ν είναι πρώτος ή σύνθετος. Αν είναι σύνθετος, μπορεί να βρεθεί ένας μη τετριμμένος διαιρέτης δ (1<δ<ν).

Έστω ν >1, περιττός. Αν γράψουμε τον ν ως γινόμενο δύο θετικών ακεραίων (περιττών), έχουμε:

ν=αβ, όπου α≥β≥1 (α και β περιττοί) ,

Τότε:

$$\nu = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2, \text{ με } \frac{\alpha\pm\beta}{2} \text{ ακέραιοι και } \frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\alpha-\beta}{2} \geq 0$$

Κάθε παραγοντοποίηση του ν ανάγεται στη μορφή $\nu = x^2 - y^2$ όπου $x > y \geq 0$, ακέραιοι.

Ένας θετικός σύνθετος περιττός μπορεί να γράφεται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους ως γινόμενο δύο θετικών ακεραίων. Μπορεί επομένως να γράφεται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους ως διαφορά δύο τετραγώνων μη αρνητικών ακεραίων. Με άλλα λόγια, ένας περιττός ακέραιος μεγαλύτερος του 1, ο οποίος γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως διαφορά δύο τετραγώνων μη αρνητικών ακεραίων, είναι πρώτος αριθμός.

Και αν $\nu = x^2 - y^2$ με ακεραίους $x > y \geq 0$, τότε $\sqrt{\nu} \leq x \leq \frac{1}{2}(\nu+1)$. Πράγματι έχουμε από το ένα μέρος $\nu = x^2 - y^2 \leq x^2$ και από το άλλο μέρος $\nu = x^2 - y^2 \geq x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$.

Έτσι προκύπτει η ακόλουθη μέθοδος: παίρνουμε τον μικρότερο ακέραιο t έτσι ώστε $t \geq \sqrt{\nu}$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $x^2 - \nu$ για x=t, t+1, t+2, … για να δούμε αν προκύπτει τέλειο τετράγωνο. Η πιο ευνοϊκή περίπτωση εμφανίζεται όταν ο ν είναι τετράγωνο ακεραίου. Τότε θα έχουμε: $t^2 - \nu = 0$. Διαφορετικά, βρίσκουμε ένα κοντινό τετράγωνο για $x = \frac{1}{2}(\nu+1)$, εφόσον

$$\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2 - \nu = \left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2$$

αλλά αυτό δίνει την τετριμμένη παραγοντοποίηση

$$\nu = \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2 = \nu \cdot 1.$$

Αν ο ν είναι σύνθετος, θα βρούμε ακέραιο $x < \frac{1}{2}(\nu+1)$ για τον οποίο το $x^2 - \nu$ είναι τετράγωνο, δηλαδή $x^2 - \nu = y^2$, και θα μπορέσουμε να παραγοντοποιήσουμε $\nu = (x-y)(x+y)$, με 1<x-y<ν.

Και αν μετά από αυτές τις διαδοχικές δοκιμές βρίσκουμε μόνο την παραγοντοποίηση ν=ν·1, τότε ο ν είναι πρώτος.

Ο Fermat προσθέτει δύο ιδέες οι οποίες συντομεύουν τους υπολογισμούς. Η πρώτη συνίσταται στην κατασκευή ενός πίνακα τετραγώνων με χρήση της ταυτότητας $\mu^2 + (2\mu+1) = (\mu+1)^2$. Αρκεί να κάνουμε τις προσθέσεις χωρίς να εκτελέσουμε τους πολλαπλασιασμούς (θα γράψουμε στη συνέχεια 2μ+3=(2μ+1)+2, κτλ.).

Έτσι, θα ξεκινήσουμε με τον υπολογισμό του $t^2 - \nu$, έπειτα θα προσθέτουμε, διαδοχικά, 2t+1, 2t+3, 2t+5,… για να υπολογίζουμε $(t+1)^2 - \nu$, $(t+3)^2 - \nu$, $(t+5)^2 - \nu, \ldots$.

Η δεύτερη ιδέα συνίσταται στο γεγονός ότι το τελευταίο ψηφίο ενός τετραγώνου ακεραίου δεν μπορεί να είναι 2, 3, 7, ή 8. Επιπλέον ορισμένα ζεύγη ακεραίων (για παράδειγμα 35) δεν μπορούν να αποτελούν τα δύο τελευταία ψηφία (τα “τελικά”, όπως τα ονομάζει ο Fermat) ενός τετραγώνου. Επομένως, αν το $x^2 - \nu$ καταλήγει σε έναν από αυτούς του τρόπους θα περάσουμε στη συνέχεια στον $(x+1)^2 - \nu$.

Στη χειρότερη των περιπτώσεων κατά την οποία ο ν είναι πρώτος και δέχεται μόνο μια τετριμμένη παραγοντοποίηση ν=ν·1, πρέπει να δοκιμάσουμε τους ακέραιους από x=t μέχρι $x = \frac{1}{2}(\nu+1)$, κάνοντας περίπου $\frac{1}{2}(\nu+1) - \sqrt{\nu}$ δοκιμές.

Αντίθετα, η μέθοδος τερματίζεται γρήγορα, αν ο ν παραγοντοποιείται ως γινόμενο δύο “κοντινών” ακεραίων (γιατί οι ακέραιοι είναι τότε κοντά στο $\sqrt{\nu}$ ).

Ο Fermat σκιαγραφεί τη μέθοδό του με το παράδειγμα για ν=2.027.651.281, που ανήκει σε αυτόν τον τελευταίο τύπο. Αρχίζουμε τους υπολογισμούς για αυτό το παράδειγμα. Ο πιο μικρός ακέραιος $t \geq \sqrt{\nu}$ είναι t=45030. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} t^2 - \nu = 49\,619 \\ 2t+1 = 90\,061 \end{array}\right\} (t+1)^2 - \nu = 139\,680 \quad \text{δεν τέλειο είναι τετράγωνο (αφού τελειώνει σε 80)}$$

$$\left.\begin{array}{r} (t+1)^2 - \nu = 139\,680 \\ 2t+3 = 90\,063 \end{array}\right\} (t+2)^2 - \nu = 229\,743 \quad \text{μη τέλειο τετράγωνο (αφού τελειώνει σε 3)}$$

$$\left.\begin{array}{r} (t+2)^2 - \nu = 229\,743 \\ 2t+5 = 90\,065 \end{array}\right\} (t+3)^2 - \nu = 319\,808 \quad \text{μη τέλειο τετράγωνο (αφού τελειώνει σε 8)}$$

…..

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε: $(t+11)^2 - \nu = 1\,040\,400 = 1020^2$.

Εφόσον $t+11 = 45041$, έχουμε:

$$\nu = 45041^2 - 1020^2 = (45041-1020)(45041+1020), \text{ ή } \nu = 44021 \cdot 46061.$$

Η ανάλυση τερματίζεται σε αυτούς τους δύο διαιρέτες, «*επειδή και ο ένας και ο άλλος είναι πρώτος*». Όπως παρατηρεί ο Fermat, αρκούν 11 προσθέσεις, αντί να δοκιμάζουμε να διαιρούμε με ν όλους τους πρώτους αριθμούς μέχρι το $\sqrt{\nu}$ , δηλαδή μέχρι το 44029.

Στο 1920 ο Maurice Kraitchik ανέπτυξε μια βελτίωση της μεθόδου της «διαφοράς τετραγώνων», η οποία σήμερα αποτελεί τη βάση για τους περισσότερους αλγόριθμους ανάλυσης ενός ακέραιου θετικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Οι Μαθητές κλήθηκαν να κατανοήσουν την προαναφερόμενο μέθοδο και να την εφαρμόσουν. Γι’ αυτό δόθηκε το ακόλουθο πρόβλημα.

**Πρόβλημα**: *Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο του Fermat για να παραγοντοποιήσετε τους ακέραιους αριθμούς: α)119 143, β) 2 027 651 281.*

Η ενσωμάτωση όχι απλώς διανθιστικών πληροφοριών αλλά αποδείξεων από την Ιστορία των Μαθηματικών είναι μια συναρπαστική πρόκληση που, φωτίζοντας τα μονοπάτια σχηματισμού των εννοιών στο χρόνο, από εποχή σε εποχή και από πολιτισμό σε πολιτισμό, εμπλουτίζει την καθημερινή διδασκαλία. Μπορεί έτσι να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών, να τούς καταστήσει ενθουσιώδεις ερευνητές σε μια ανθρώπινη δραστηριότητα και να αποτελέσει ένα συμπληρωματικό συστατικό για την βαθύτερη μαθηματική κατανόηση.

## 8. Συμπεράσματα

Οι μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου που ασχολήθηκαν με το πρόβλημα επέδειξαν δημιουργικότητα και φαντασία. Το πρόβλημα, κινώντας την περιέργεια των μαθητών και φανερώνοντας καταιγισμό εικασιών, ήταν ένα κίνητρο για συλλογική έρευνα και πολλαπλές προσεγγίσεις από τη διδακτική ομάδα. Σε όλες τις τάξεις οι μαθητές καταγίνονταν με ζωντανό ενδιαφέρον για τη λύση. Εμφανίστηκαν πολλές γόνιμες ιδέες και στρατηγικές. Οι διάφορες ιδέες ανταλλάσσονται, διασταυρώνονται, δοκιμάζονται, αξιολογούνται. Κατά την πλούσια επιστημονική διαμάχη οι μαθητές βιώνουν ένα ανάμεικτο κλίμα βεβαιότητας και αμφιβολίας. Η αμφιβολία αφυπνίζει την περιέργεια και το ενδιαφέρον τους και η βεβαιότητα τούς δίνει τη δύναμη να προβάλουν και να υποστηρίξουν τα επιχειρήματά τους. Πολλά από αυτά μπορούν να αξιοποιηθούν στην αναζήτηση των πυθαγόρειων τριάδων αλλά και σε άλλα προβλήματα Αριθμητικής και της Θεωρίας Αριθμών.

Οι μαθητές αξιοποίησαν πολλές από τις γνώσεις που είχαν αποκτήσει στην Αριθμητική, τη Γεωμετρία και την Άλγεβρα, όπως: αριθμητικές πράξεις, εμβαδά επίπεδων σχημάτων, γεωμετρική παράσταση ενός γινομένου, άρτιοι και περιττοί αριθμοί, λύση ενός συστήματος, αξιοσημείωτες ταυτότητες, απλή παραγοντοποίηση, Ευκλείδεια διαίρεση κτλ. Όλες οι μέθοδοι που μνημονεύσαμε στις προηγούμενες σελίδες οδηγούν στη λύση. Παραταύτα σπάνια οι μαθητές ακολούθησαν με συνέπεια μια μέθοδό μέχρι το τέλος. Ορισμένοι αξιοποίησαν τη μέθοδο των εικονιστικών αριθμών για να αποδείξουν ένα μέρος της εικασίας τους, αλλά την εγκατέλειπαν προς όφελος μιας άλλης μεθόδου, πιο αλγεβρικής κτλ. Άλλοι εργάστηκαν αντίστροφα.

Το πρόβλημα γεννά φωτεινούς δρόμους με πλούσια επιχειρηματολογία, και η λύση του τερματίζεται με μια απόδειξη. Κατά την ανοιχτή αντιπαράσταση των ιδεών σε ολόκληρη την τάξη, οι μαθητές διερωτώνται και αναστοχάζονται πάνω στις εμπειρίες τους. Έτσι σταδιακά μαθαίνουν να αναγνωρίζουν τα λάθη τους, να βελτιώνουν την απόδειξή τους, να κατανοούν και να κρίνουν τα επιχειρήματα και τις αιτιολογήσεις των συμμαθητών τους, να εμπλουτίζουν τις μαθηματικές τους γνώσεις με μεθόδους από την Ιστορία των Μαθηματικών. Αφού πρώτα παρατηρήσουν αριθμητικές κανονικότητες προχωρούν στην ανακάλυψη μαθηματικών σχέσεων ή ιδιοτήτων, προοδευτικά μαθαίνουν να διακρίνουν τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες (ευθύ και αντίστροφο) και να ξετυλίγουν το κουβάρι της απόδειξης με διάφορους τρόπους, όπως είναι η μέθοδος αντιπαραδείγματος, η μέθοδος διάκρισης περιπτώσεων, η ευθεία απόδειξη καθώς και η απαγωγή στο άτοπο. Ποικίλες μεθοδολογικές ικανότητες μεσολαβούν στην έρευνα, όπως να διατυπώνουν εικασίες και να τις ελέγχουν, να εξετάζουν ειδικές περιπτώσεις, να διερευνούν καταστάσεις αριθμητικών μοτίβων, να απλοποιούν το πρόβλημα, να συμβολίζουν με μεταβλητές, να γενικεύουν, να χρησιμοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις, να αντιπαραθέτουν και να εμπλουτίζουν τα επιχειρήματά τους καλλιεργώντας τη γόνιμη συνύφανση αριθμητικού, αλγεβρικού και γεωμετρικού συλλογισμού. Όλα αυτά τα ευχάριστα και δημιουργικά επιτεύγματα καταδεικνύουν σε διδάσκοντες και διδασκόμενους αμυδρές αναλαμπές από την ομορφιά των Μαθηματικών που δίνουν την αίσθηση ότι η μαθηματική διδασκαλία και μάθηση γίνεται για όλους χαρά και παιγνίδι.

ΒΙΒΙΟΓΡΑΦΙΑ

ARSAC G., CHAPIRON G., COLONNA A., GERMAIN G., GUICHARD Y., MANTE M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses Universitaires de Lyon.

ARSAC G., MANTE M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

BARBIN E. (1991). The reading of original texts: how and why lo introduce a historical perspective, *For the learning of mathematics* **Il (2)**,12-13

BURTON D. (1997). *Elementary Number Theory*, New York: McGraw-Hill.

CHABERT J. L., BARBIN E., GUILLEMOT M. MICHEL-PAJUS A., BOROWCZYK J., DJEBBAR A., MARTZLOFF J. C. (1994). *Histoires d'Algorithmes - du caillou à la puce*, Belin.

CHEVALLARD Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, *petit x*, **19**, pp. 43-72 .

CHEVALLARD Y. (1992). Le caractère expérimental de l'activité mathématique, *petit x*, **30**, pp. 5-15.

DEVLIN K. (1994). *Mathematics: The science of Patterns*. New York: W. H. Freeman.

ENGLISH L., WAPPEN E. (1998). Introducing the Variable through, Pattern Exploration. *The Mathematics Teacher*, **vol 91, 2**, pp. 166-170.

GAGATSIS A., PATRONIS T. (1990). Using geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **21**, pp. 29-54.

GILBERT T. (2005). La différence des deux carrés, *Mathématique et Pédagogie*, **150**, pp. 69-79.

GODEFROY G. (1998). *L'aventure des nombres*, Odile Jacob.

GUICHARD J. -P. (2003). D'un problème de Diophante aux identités remarquables, *Pépères-IREM*, **53**, IREM de Poitiers, pp. 5-19.

LAKATOS I. (1986). *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge.

LANNIN J., BARKER D., TOWNSEND B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection, *Mathematics Education Research Journal*, **18(3)**, 3–28.

LINS R., KAPUT J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In STACEY K., CHICK, H.& M. KENDAL (Eds.), *The future of teaching and learning algebra: The 12th ICMI study* (pp. 47–70), Kluwer, Boston.

LOPEZ-REAL F. (2004) Using the history of mathematics as a starting point for investigations: some examples on approximations. *Teaching Mathematics and its Applications.* **23(3)**

MAHONEY M. S. (1994). *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*, Princeton: Princeton University Press.

MASON J., GRAHAM A., JOHNSON-WILDER S. (2005). *Developing thinking in algebra. London*, The Open University.

MASON M. (1994). *L'esprit mathématique*, De Boeck Université.

NATHANSON M. B. (1996). *Additive Number Theory: Inverse Problems and the Geometry of Sumsets*, Springer-Verlag.

POLYA G. (1991/1954). *Πώς να το λύσω*, Καρδαμίτσας, Αθήνα.

RASHED R. (1984). *Entre Arithmétique et algèbre*, Les Belles Lettres, pp. 17-29.

RECIO A. & GODINO G. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational studies in Mathematics*, **48**, 83–99.

RODDIER J.-A. (2002). Conjectures en arithmétique, *Repères IREM*, **46**, pp. 91-106, IREM de Clermont-Ferrand.

SCHOENFELD A. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, New York.

STINSON D. (2005). *Cryptography: Theory and Practice*, Third Edition, CRC, 2005.

TANNERY P., FERMAT P. (1999). *Œuvres de Pierre Fermat*, A. Blanchard.

ZAZKIS R., LILJEDAHL P. CHERNOFF E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations, *ZDM Mathematics Education*, **40**, pp. 131-141.

AEBI C., STEINIG J. (2004). Activité autour des “identités remarquables” et “Factorisation des entiers: la méthode de FERMAT”, *Math Ecole*, **210**.

ΚΟΣΥΒΑΣ Γ. (1996). *Η πρακτική του ανοιχτού προβλήματος στο δημοτικό σχολείο, γόνιμος χαρακτήρας και ανατροπή των παγιωμένων αντιλήψεων*, Gutenberg, Αθήνα.

ΚΟΣΥΒΑΣ Γ.(2008). Εικασίες και μαθηματική συζήτηση στην τάξη, *Πρακτικά 25ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας,* 434-448, ΕΜΕ.

ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ Γ., ΔΙΑΛΕΤΗΣ Δ. (2006). *Διαμάχες για την ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.