

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗΣ ΑΠΟ ΕΞΑΧΡΟΝΑ ΠΑΙΔΙΑ

Γιώργος Κόσυβας, Δρ Εκπαιδευτικός¹
e-mail: gkosyvas@yahoo.com.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία έχει ως θέμα τη σχέση της ανάλυσης των αριθμών με τη λύση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Παρουσιάζονται και συζητούνται τα αποτελέσματα μιας έρευνας που διενεργήθηκε σε νήπια ηλικίας από 5 μέχρι 6 ετών. Τα ευρήματα τα οποία προέκυψαν από την εν λόγω έρευνα επαληθεύουν την υπόθεση ότι τα νήπια, τα οποία ακολούθησαν τη διδακτική προσέγγιση του αριθμού την οποία ονομάζουμε «μέθοδο της ανάλυσης του αριθμού» (Ομάδα έρευνας) απέδειξαν καλύτερες επιδόσεις στη λύση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης από την ομάδα των νηπίων τα οποία δέχθηκαν τη διδασκαλία λογικομαθηματικής προσέγγισης του αριθμού (Ομάδα ελέγχου), η οποία δεν συνιστά πλέον το κυρίαρχο χαρακτηριστικό του σημερινού αναλυτικού προγράμματος του ελληνικού νηπιαγωγείου. Επιπλέον, τα νήπια στάθηκαν ικανά όχι μόνο να διαφυλάσσουν αλλά και να υπερβαίνουν τις κατακτήσεις της αρίθμησης εφαρμόζοντας τη γνώση της ανάλυσης, προπάντων με την αναλυτική-συνθετική χρήση των δακτυλικών σχηματισμών, σε άλλες όψεις της έννοιας του αριθμού, δηλαδή ανέπτυξαν ωριμότερη ικανότητα αριθμητικού συλλογισμού από τα παιδιά της Ομάδας ελέγχου.

Θεωρητικό πλαίσιο

Ο φυσικός αριθμός αποτελεί μια πολυκομβική και πολυδιάστατη μαθηματική έννοια. Οι περισσότερες προσεγγίσεις της πρώτης αρίθμησης αγνοούν ένα από τα θεμελιώδη γνωρίσματα του αριθμού: την ανάλυση του αριθμού. Οι παλιότερες έρευνες τονίζουν την απομνημόνευση των πράξεων (Thorndike, 1922) ή τις λογικομαθηματικές δομές (Piaget & Szeminska, 1941). Στις νεότερες ερευνητικές εργασίες η άμεση εκτίμηση, η απαρίθμηση και η νοερή αριθμογραμμή κατέχουν προνομιακή θέση. Παρά τις επιμέρους διαφορές τους, η προφορική αριθμοακολουθία και η νοερή αρίθμηση είναι τόπος σύμπλευσης για πολλούς ερευνητές (Gelman & Gallistel, 1978 – Hughes, 1986 – Resnick, 1983). Ειδικότερα, στο πλαίσιο του κονστρουκτιβισμού, μετά από συστηματικές έρευνες διατυπώθηκαν μοντέλα για τα στάδια οικοδόμησης του αριθμού, την ανοδική και καθοδική αρίθμηση (Steffe et al., 1983 – Steffe & Cobb,

¹ Καθηγητής μαθηματικών στο Ενιαίο Πειραματικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής, Διεύθυνση κατοικίας: Σεβαστουπόλεως 92-94, Αμπελόκηποι 11526, Αθήνα. Τηλ. 210-6928982.

1988 – Μπούφη, 1995 – Wright et al, 2007) και την ανάπτυξη της βάσης του 10 (Cobb & Wheatley, 1988).

Η ανάλυση και σύνθεση του αριθμού εν μέρει βρίσκει θεωρητική στήριξη στο έργο του Piaget παραπέμποντας στη λειτουργική έννοια του αριθμού. Στον εν λόγω ορισμό τα παιδιά προϋποτίθεται ότι είναι ικανά να προσεγγίζουν τις αναλύσεις ενός δεδομένου αριθμού και να τις αναγνωρίζουν μέσα σε αυτόν, ακόμα κι αν δεν αναφέρεται ρητά η απαίτηση για τη γνώση των αναλύσεών του. Η εγγύηση για την πραγματική κατανόηση της έννοιας του αριθμού είναι η επιτυχής ανταπόκριση των παιδιών στα σχετικά πειράματα διατήρησης και εγκλεισμού.

Στις έρευνες της Resnick (1983) το σχήμα μέρους-όλου κατέχει βαρύνουσα σημασία (Resnick 1983). Διάφοροι ερευνητές έχουν ενδιαφερθεί άμεσα ή έμμεσα για προσεγγίσεις που σχετίζονται με την ανάλυση και σύνθεση των αριθμών (Sorphian & Corgray 1994 – Wright et al., 2007). Οι κύριοι λόγοι που θεμελιώνουν τη σημασία της ανάλυσης των αριθμών στη διάρθρωση και εξέλιξη των αριθμητικών γνώσεων των παιδιών είναι: η πολλαπλή και ανοιχτή προσέγγιση, η διευκόλυνση της επινόησης υπολογιστικών στρατηγικών με πρωτότυπη σκέψη, η προετοιμασία της αξίας θέσης και η επίλυση προβλημάτων (Irwin, 1996 – Cobb et al., 1997– McClain & Cobb, 1999 – Baroody, 2004 – Kosynas, 2009a). Αποτελεί πολύτιμη βάση που συνδέεται με άλλα σχήματα της ποσοτικής σκέψης όπως η άμεση εκτίμηση και η απαρίθμηση και επίσης συντείνει στην προαγωγή του ευέλικτου αριθμητικού συλλογισμού των παιδιών και την κατανόηση άλλων περισσότερο προχωρημένων αριθμητικών εννοιών όπως είναι το κλάσμα, το ποσοστό, η πιθανότητα και ο λόγος. Περαιτέρω ανάπτυξη και εμβάθυνση στις πολύμορφες και πολυσχιδείς σχέσεις μεταξύ των αριθμών αναδεικνύει γόνιμες μαθηματικές ιδέες που οργανώνουν και συστηματοποιούν τους αριθμούς σε νέες δομές και κανονικότητες (patterns).

Για τις ανάγκες αυτής της έρευνας διαμορφώσαμε ένα διαρθρωμένο σύνολο διδακτικών καταστάσεων προβληματισμού και επικοινωνίας στο οποίο η ανάλυση και σύνθεση των αριθμών αποτελεί ένα θεμελιώδες γνώρισμα για τη μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών. Εμβαθύνει στην κατανόηση της ίδιας της έννοιας του αριθμού, καθώς και των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, χωρίς ωστόσο να παραμελούνται οι άλλες όψεις των αριθμών ως απόλυτων και τακτικών προκαλώντας φαινόμενα ανισορροπίας. Για την κατανόηση αυτών των πράξεων είναι πολύ σημαντικό το γεγονός ότι οι αριθμοί μπορούν να χωρίζονται σε μικρότερους ή να ενώνονται σε μεγαλύτερους. Σε κάθε αριθμητική σύνθεση οι αριθμοί που αναλύονται και συντίθενται, συγκαθορίζονται μεταξύ τους, έτσι ώστε ένας αριθμός να μπορεί να προκύπτει από τους άλλους με πρόσθεση ή με αφαίρεση. Αυτή η γνώση είναι συνδεδεμένη με το σχήμα μέρους-όλου και διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στη λύση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης (Baroody, 2009), αφού κατά βάση ενυπάρχει στο βάθος των εννοιολογικών σχέσεων κάθε προβλήματος. Η ανάλυση, η πρόσθεση και η αφαίρεση συναποτελούν μια ολόκληρη αντιστρέψιμων λειτουργικών πράξεων. Θεωρούμε ότι μια υποστηρικτική δέσμη διδακτικών δραστηριοτήτων, που έχουν

νόημα για τα νήπια, που καλλιεργούν μελετημένα και συστηματικά την αριθμητική μάθηση των μικρών παιδιών στη ζώνη της επικείμενης εξέλιξης (Vygotsky, 1988), ενταγμένες στο κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο του νηπιαγωγείου, θα μπορούσε να προκαλέσει και να προετοιμάσει ορισμένες από τις προαναφερόμενες ικανότητες. Η μάθηση ως σχέση υποκειμένου-αντικειμένου, αποτελεί μια διαδικασία ενεργητικής ανακάλυψης, πολυαισθητήρια και πολυλειτουργική, όπου ο χειρισμός των αντικειμένων του βιωματικού κόσμου και η γλωσσική επικοινωνία αλληλοϋποστηρίζονται.

Μελετήσαμε προβλήματα προσθετικού τύπου. Τα νήπια τα οποία έλαβαν μέρος στην έρευνα έλυσαν συνολικά 10 προβλήματα. Το ερώτημα το οποίο μάς απασχολεί στην παρούσα εργασία είναι: *μια διδακτική προσέγγιση που βασίζεται στην ανάλυση των αριθμών θα επιφέρει βαθύτερη και ωριμότερη κατανόηση στην επίλυση προβλημάτων σε εξάχρονα νήπια σε σύγκριση με τη συνήθη διδασκαλία και ποιες στρατηγικές προτιμούνται σε κάθε περίπτωση;*

Η μεθοδολογία της έρευνας

Η εν λόγω έρευνα διενεργήθηκε κατά το σχολικό έτος 1992-93, ήταν ετήσιας διάρκειας και σε αυτήν έλαβαν μέρος 258 νήπια από 22 νηπιαγωγεία του νομού Κορινθίας. Περιλάμβανε δύο ομάδες νηπίων, που φοιτούσαν στη μεγάλη τάξη του νηπιαγωγείου: την Ομάδα έρευνας, με 11 τάξεις (O₁, 129 νήπια) και την Ομάδα ελέγχου (O₂, 129 νήπια), επίσης με 11 τάξεις. Η Ομάδα έρευνας ακολούθησε μια νέα προσέγγιση της έννοιας του αριθμού, με έμφαση στην ανάλυση του αριθμού, ενώ η Ομάδα ελέγχου ακολούθησε τη συνηθισμένη μέθοδο προσέγγισης του αριθμού, όπως αυτή περιγραφόταν στο τότε αναλυτικό πρόγραμμα του νηπιαγωγείου, η οποία είχε ως κεντρικό άξονα δραστηριότητες λογικού τύπου.

Διδακτικές δραστηριότητες: Η «μέθοδος ανάλυσης του αριθμού» περιλάμβανε δραστηριότητες διάσπασης, ένωσης και ομαδοποίησης που γίνονται με χρήση των δακτύλων και άλλου κατάλληλου εποπτικού υλικού το οποίο μας παρέχει ο πολιτισμός (μικρές συλλογές, τμήματα του αριθμητηρίου, διαρθρωμένη δεκάδα, ζάρια, πινακίδες ανάλυσης, κυβάρια, εκπαιδευτικά παιχνίδια) και οικείες καταστάσεις προβληματισμού πάνω στο εποπτικό υλικό ή σε άλλα εκφραστικά μέσα (απαγγελία της αριθμοακολουθίας, αρίθμηση, αφηγηματικές ιστορίες, τραγούδια και άλλα διαθεματικά μέσα προσέγγισης των αριθμών), (Κόσυβας, 2001 – Kosyvas, 2009b – Κωτσαλίδου & Κόσυβας, 2004 – Κόσυβας, 2009c).

Τα προβλήματα των δοκιμασιών: Σε όλα τα παιδιά του συνολικού δείγματος δόθηκαν 10 προβλήματα, τα οποία μοιράζονται σε πέντε τύπους (δύο προβλήματα για κάθε τύπο). Στο σχεδιασμό των πειραμάτων δεν προβλέπεται η χρήση χειροπιαστών αντικειμένων (π.χ. μάρκες, κυβάρια). Τα προβλήματα ήταν τα ακόλουθα:

Μεταβολή 1: $2+6=x$ ($3+4=x$), αύξηση με άγνωστη την τελική κατάσταση: *Ο Γιώργος είχε 2 (3) μαρκαδόρους. Επειδή στη ζωγραφιά του θέλει να χρησιμοποιήσει και άλλα χρώματα, ψάχνει και βρίσκει ακόμα 6 (4). Πόσους μαρκαδόρους έχει τώρα ο Γιώργος;*

Μεταβολή 2: $8-6=x$ ($8-4=x$), ελάττωση με άγνωστη την τελική κατάσταση: *Ο παππούς είχε στο κοτέτσι του 8 (8) κοτούλες. Όμως μια μέρα μπήκε μέσα μια πονηρή αλεπού και έφαγε 6 (4) κότες. Πόσες κότες έμειναν στο κοτέτσι;*

Μεταβολή 3: $3+x=7$, ($2+x=8$) αύξηση με άγνωστη τη προστιθέμενη ποσότητα: *Υπήρχαν μέσα στο σχολικό λεωφορείο 3 (2) παιδιά και ανέβηκαν μερικά ακόμα. Τώρα υπάρχουν στο λεωφορείο 7 (8) παιδιά. Πόσα παιδιά ανέβηκαν στο σχολικό λεωφορείο;*

Σύνθεση 1 ή συνένωση: $2+4=x$ ($5+2=x$), εύρεση του όλου: *Ο Νίκος έχει 2 (5) γούνινα γατάκια και 4 (2) γούνινα σκυλάκια. Πόσα είναι όλα τα ζωάκια που έχει ο Νίκος;*

Σύνθεση 2 ή διαμερισμός: $7=4+x$ ($8=6+x$), εύρεση του μέρους: *Στα γενέθλια της Μελίνας υπήρχαν 7 (8) παιδιά. Από αυτά τα 4 (6) ήταν κορίτσια. Πόσα ήταν τα αγόρια;*

Η συλλογή των δεδομένων στηρίχτηκε σε ημιδομημένες συνεντεύξεις. Όλα τα νήπια υποβλήθηκαν στα ερωτήματα των 10 προβλημάτων σε τέσσερις διαφορετικές χρονικές στιγμές τις οποίες ονομάζουμε Α, Β, Γ και Δ. Η κλίμακα μέτρησης των επιδόσεων των νηπίων σε όλα τα προβλήματα ήταν από 0 ως 4. Ο έλεγχος των υποθέσεων και η στατιστική ανάλυση των ευρημάτων έγινε με το πρόγραμμα SPSS.

Συνοπτική παρουσίαση και συζήτηση των αποτελεσμάτων

Οι μέσες επιδόσεις των δύο ομάδων στα 10 προβλήματα κατά τις τέσσερις χρονικές στιγμές εξέτασης είναι: Ομάδα έρευνας: Α: 0,7, Β: 0,98, Γ: 2,24, Δ: 2,18 και Ομάδα ελέγχου: Α: 0,72, Β: 0,82, Γ: 1,5, Δ: 1,56. Στα εν λόγω προβλήματα, τόσο κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του προγράμματος (Α-Β-Γ) όσο και μετά την ολοκλήρωσή του (Δ), οι μέσες επιδόσεις της Ομάδας έρευνας είναι υψηλότερες από τις επιδόσεις της Ομάδας ελέγχου (GLM Repeated Measures-Sphericity Assumed: $F=30,81$, $p<0,01$).

Με βάση τα τις πληροφορίες που αντλούμε από τη διαχρονική εξέλιξη των ποσοστών επιτυχίας των δύο ομάδων στο καθένα από τα 10 προβλήματα μπορούμε να διατυπώσουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Ένα πρώτο εύρημα είναι ότι στην καθεμιά από τις μετρήσεις Β, Γ, Δ τα ποσοστά επιτυχίας των νηπίων της Ομάδας έρευνας είναι υψηλότερα από αντίστοιχα της Ομάδας ελέγχου για όλα τα προβλήματα. Συγκεκριμένα, όταν τα παιδιά άρχιζαν την φοίτησή τους στην Α΄ τάξη του δημοτικού (Οκτώβριος), τα ποσοστά επιτυχίας κυμαίνονταν από 49,6% μέχρι 82,9% στην Ομάδα έρευνας και από 31,8% μέχρι 48,8% στην Ομάδα ελέγχου.
- Ένα δεύτερο εύρημα αφορά την επίδραση της σημασιολογικής δομής στη δυσκολία των προβλημάτων: Στα προβλήματα αύξησης ή ελάττωσης με άγνωστη την τελική κατάσταση και εύρεσης του όλου, τα νήπια της Ομάδας έρευνας επέδειξαν ποσοστά επιτυχίας από 70,5% μέχρι 82,9%, ενώ στα προβλήματα ελλείποντος προσθετέου, εύρεσης του μέρους, τα ποσοστά επιτυχίας ήταν 49,6% μέχρι 67,4%. Στα τελευταία ήταν δύσκολο στα νήπια να παραστήσουν τα δεδομένα με τα δάκτυλά τους. Τα αποτελέσματα αυτά βρίσκονται σε συμφωνία με τα ευρήματα άλλων ερευνών (Sophian & McCogray, 1994 – Fuson, 2004).

- Τέλος, μια περισσότερο διεισδυτική ανάλυση αποκαλύπτει ότι οι στρατηγικές που επινοούν τα παιδιά της Ομάδας έρευνας είναι ωριμότερες από τις αντίστοιχες της Ομάδας ελέγχου. Αυτό φαίνεται τόσο από τα αυξημένα ποσοστά σε όλες τις στρατηγικές όσο και από την υπεροχή της Ομάδας έρευνας στις στρατηγικές ανάλυσης πάνω στα δάκτυλα (O_1 : 23,10%, O_2 : 6,13%), οι οποίες συνιστούν το ενδιάμεσο προνοερό στάδιο για τη μετάβαση από τις διαδικασίες με αντικείμενα στις στρατηγικές χωρίς αντικείμενα. Στις νοερές στρατηγικές (άμεση ανάκληση στη μνήμη μακράς διάρκειας) η επικράτηση της Ομάδας έρευνας (O_1) είναι σαφέστατη (O_1 : 21,40%, O_2 : 16,68%). Το ίδιο συνέβη και με τις στρατηγικές απαρίθμησης με τα δάκτυλα (O_1 : 22,88%, O_2 : 17,68%).

Τα προαναφερόμενα αποτελέσματα καταδεικνύουν ολοζώντανα ότι τα παιδιά είναι ικανά να εφαρμόζουν τη γνώση ανάλυσης σε άλλες όψεις των εννοιών του αριθμού. Τα νήπια σκέφτονται πριν βρουν ένα άθροισμα ή μια διαφορά. Δεν ωθούνται στην απομνημόνευση για να παίζουν τους αριθμούς τους αριθμούς στα δάκτυλα. Απλώς στηρίζονται στα δάκτυλά τους για να υπολογίζουν. Η υπεροχή της πειραματικής ομάδας (O_1) έναντι τη ομάδας ελέγχου (O_2) πρέπει να αποδοθεί στη μοναδική ειδοποιό διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων, δηλαδή στην ειδική διδακτική παρέμβαση που οικοδομεί πάνω στις αριθμητικές προεμπειρίες των νηπίων, τη χρήση των οικείων στα παιδιά ή βιωματικά ελκυστικών εποπτικών μέσων και την ανάλυση-σύνθεση των αριθμών. Μια τέτοια διδασκαλία μπορεί να προμηθεύσει την κατάλληλη βάση για την ερμηνεία των μικρών και των μεγάλων αριθμών και των υπολογισμών. Επομένως, η συστηματική ενασχόληση των νηπίων με την ανάλυση του αριθμού ήταν υποβοηθητική στην ανάπτυξη της πολύπτυχης έννοιας του αριθμού καθώς και της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Αυτές οι πολυποίκιλες σχέσεις συνιστούν ένα σημαντικό θεμέλιο που τονίζει πολλές μαθηματικές έννοιες που αναπτύσσουν τα μικρά παιδιά. Επιπρόσθετα, αυτά τα αποτελέσματα διαρκούν στο χρόνο, όπως αποδείχθηκε από το τεστ που δόθηκε όταν τα παιδιά βρίσκονταν στην Α΄ τάξη.

Με μια πρώτη ματιά τα παραπάνω ευρήματα δεν είναι συμβατά προς τα ευρήματα του Piaget. Η ανάδυση της πολύπλοκης γνώσης των παιδιών στην επίλυση προβλημάτων οφείλεται στις πλούσιες μαθησιακές εμπειρίες τις οποίες απέκτησαν τα νήπια από το πρόγραμμα διδασκαλίας. Η προσέγγιση του αριθμού με έμφαση στην ανάλυση, την οποία εφαρμόσαμε στα νηπιαγωγεία, βρισκόταν σε συμφωνία με τις προϋπάρχουσες γνώσεις των νηπίων. Υποθέτουμε ότι τα νήπια διέθεταν ένα λανθάνον σύνολο αρχών για την προσθετική ανάλυση και σύνθεση μικρών αριθμών, προτού μπορέσουν να αντιμετωπίζουν με επιτυχία το έργο του εγκλεισμού των τάξεων του Piaget. Ακόμα διέθεταν ένα γόνιμο πρόπλασμα αριθμητικής διατήρησης, προτού να είναι σε θέση να απαντούν στο πείραμα της κλασικής διατήρησης του Piaget. Οι γνώσεις αυτές περιορίζονταν στην αριθμητική διατήρηση και τον αριθμητικό εγκλεισμό και δεν επεκτείνονταν γενικά στη διατήρηση και τον λογικό εγκλεισμό τάξεων. Οι προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών είναι χρήσιμες για τη μεταγενέστερη εννοιολογική ανάπτυξη. Σύμφωνα με τη Resnick αυτά είναι πρωτοποσοτικά λογικά

σχήματα και αποτελούν το θεμέλιο της μαθηματικής ανάπτυξης των παιδιών (Resnick, 1983).

Η προσέγγιση των αριθμών στο νηπιαγωγείο σύμφωνα με τη λογική του αναλυτικού προγράμματος (ΥΠΕΠΘ, 1989 – ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1990) παρουσιάζει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: μονομερής προσκόλληση στις προαπαιτούμενες λογικές έννοιες, υποτίμηση της σημασίας της ανάλυσης των αριθμών, μη ανοιχτή προσέγγιση, απουσία χρήσης δακτύλων, δογματική και μηχανική μεταφορά ψυχολογικών πειραμάτων στη διδασκαλία. Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης αποδεικνύουν ότι η διδακτική παρέμβαση, η οποία δίνει έμφαση στην ανάλυση των αριθμών, μπορεί να βοηθήσει στην πολύπλευρη ανάπτυξη των εννοιών του αριθμού και των ικανοτήτων που συνδέονται με αυτές.

Συμπεράσματα

Με ποιες μεθόδους και με ποια μέσα θα επιτύχουμε μια διεύρυνση της κατανόησης των αριθμών; Πώς θα καταφέρνουν τα νήπια να επινοούν κατάλληλες στρατηγικές για να λύνουν νέα προβλήματα; Η παρούσα εργασία μας επιχειρεί να δώσει μερικές πρώτες απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα, προκαλώντας έναν επαναπροσδιορισμό του σχετικού βάρους των συνιστωσών της αριθμητικής εξέλιξης των παιδιών. Παρά τη σπουδαιότητά της, η αριθμητική ανάλυση ελάχιστα εμφανίζεται στη θεωρία του Piaget. Τα παιδιά πρέπει να κατανοούν ότι η διάσπαση και η επανένωση, η κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης έρχονται στα 7 περίπου χρόνια με την ωρίμαση (στάδιο συγκεκριμένης σκέψης). Η ανάλυση απουσιάζει από τον μπεχαβιορισμό, στον οποίο εξαιρείται η τμηματική αποστήθιση αθροισμάτων και διαφορών χωρίς εννοιολογική κατανόηση. Επιπλέον, η ανάλυση του αριθμού δεν αποτελεί αντικείμενο συστηματικής μελέτης στα διδακτικά πειράματα της σχολής του κονστρουκτιβισμού, όπου κατά βάση οι σχέσεις μέρους-όλου εξετάζονται στο πλαίσιο της αριθμοακολουθίας (Steffe, 2004). Τα τελευταία χρόνια έρχονται στο φως σύγχρονα προγράμματα σπουδών σύμφωνα με τα οποία τα νήπια καταγίνονται με την ανάλυση των αριθμών μέχρι το 10 σε άθροισμα δύο προσθετέων με χρήση αντικειμένων (Καρούση, & Σκουμπουρδή, 2008, Wright et al., 2007– Clements, 2004 –Fuson, 2004– Baroody, 2004). Παραταύτα, σύμφωνα με την προσιτή σε εμάς βιβλιογραφία, δεν υπάρχει ένα επεξεργασμένο μοντέλο που να συναρθρώνει την ανάλυση με τις άλλες αριθμητικές έννοιες.

Στην προσέγγισή μας, παράλληλα με την αναγνώριση της αξίας των πολυποίκιλων άτυπων βιωματικών γνώσεων που παρέχει ο πολιτισμός, θεωρήσαμε ότι η προοδευτική μαθηματικοποίηση πρέπει να συνδέεται με τα μαθηματικά του σχολείου. Γι' αυτό αποδεσμευτήκαμε από τις δοκιμασίες διατήρησης και εγκλεισμού. Η απόκτηση ποικιλίας εμπειριών με τις αναλύσεις των αριθμών ξεχωριστά συνεργεί στο σχηματισμό ενός σύνθετου πλέγματος από έννοιες, πράξεις και σχέσεις. Η χρήση καθενός αριθμού σε πολλές και διαφορετικές περιπτώσεις συντελεί στην κατάκτηση μιας ευέλικτης έννοιας του αριθμού που δεν ταυτίζεται με την απαρίθμηση. Με την

παρούσα εργασία μας προτείνουμε μια μέθοδο προσέγγισης των αριθμητικών εννοιών στο περιβάλλον του νηπιαγωγείου, η οποία βασίζεται στην ανάλυση του ίδιου του αριθμού. Καταρτίστηκε μια διευκολυντική δέσμη πρόσφορων διδακτικών δραστηριοτήτων που απέβλεπε στην αριθμητική ανάπτυξη των νηπίων. Οι επιδόσεις των νηπίων που μνήθηκαν στον κόσμο των αριθμών, φανερώνουν την τελεσφόρηση της μεθόδου. Ωστόσο, μόνο από την διαφορά των μαθησιακών επιδόσεων δεν μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η προσέγγιση της ανάλυσης είναι καλύτερη. Αυτή είναι η μία όψη του προβλήματος. Μεγαλύτερη αξία έχει η θεμελίωση της ίδιας της προσέγγισης και το περιεχόμενο της δέσμης των μαθησιακών δραστηριοτήτων (Κόσυβας, 2001).

Όπως καταμαρτυρούν τα ευρήματα μας, η ανάλυση και ανασύνθεση των αριθμών εμπλουτίζει και επεκτείνει τις στρατηγικές που επινοούν τα νήπια στη λύση προβλημάτων. Το πλούσιο και διαπτυσσόμενο δίκτυο των ιδεών που συνδέονται με τους αριθμούς διαφυλάσσει αλλά ταυτόχρονα υπερβαίνει τις κατακτήσεις της αρίθμησης (Kosynas G., 2010). Καθώς τα μικρά παιδιά είναι απορροφημένα από δραστηριότητες απαρίθμησης δε σκέφτονται ότι οι συλλογές που καταμετρούν μπορεί να απαρτίζονται από δύο συνθετικά μέρη, ούτε τις πληθυκότητες αυτών των μερών. Η μακροχρόνια και αποκλειστική προσκόλλησή τους στη μονοτονία της αρίθμησης μπορεί να στεγνώσει τη βιωματική της αξία και να αδυνατίσει την προοπτική ανάδυσης νέων γόνιμων ιδεών.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Baroody, A.J. (2004). The developmental bases for early childhood number and operations standards. In D. H. Clements & J. Sarama (eds.), *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 173-219). LEA Publishers.
- Clements, D. H. (2004). Major Themes and Recommendations. In D. H. Clements & J. Sarama (eds.), *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 7-72). LEA Publishers.
- Cobb, P. & Wheatley, G. (1988). Children's initial understandings of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 10, pp. 1-28.
- Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, pp. 261-265.
- Fuson, K.C. (2004). Pre-K to Grade 2 Goals and Standards: Achieving 21st-Centoury Mastery for All. In D. H. Clements & J. Sarama (eds.), *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 105-148). LEA Publishers.
- Gelman, R. & Gallistel, G. R. (1978). *The children's understanding of number*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Hughes, M. (1986). *Children and Number, Difficulties in learning mathematics*. Oxford: Basil Blackwell.

- Irwin, K. C. (1996). Children's understanding of the principles of compensation and covariation in part-whole relationships, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, pp. 25-40.
- Kosyvas, G. (2009a). Number analysis and solution of addition and subtraction problems in 6-year-old children. In: A. Gagatsis & S. Grozdev (eds), *Proceedings of the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education*, (pp. 439-450). Plovdiv, Bulgaria: Cyprus Mathematical Society, University of Plovdiv.
- Kosyvas, G. (2009b). Number analysis in the kindergarten. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5, (p. 465), Thessaloniki, Greece: PME.
- Kosyvas, G. (2010). Dépassement-maintien du comptage au cours de l'analyse et de la synthèse des nombres à l'école maternelle, *Quaderni di Ricerca in Didattica Matematica (QRDM)*, 20, 40-52, G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy).
- McClain, K. & Cobb, P. (1999). Patterning and partitioning: Early number concepts. In J. Copley (ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 112 – 118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Piaget, J., Szeminska, A. (1941/1991). *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel-Paris : Delachaux et Niestlé.
- Resnick, L. -B. (1983). A developmental theory of number understanding. In: H.-P. Ginsburg (ed), *The development of mathematical thinking*, (pp. 109-151). New York: Academic Press.
- Sophian, C.& McCorgray P. (1994). Part-Whole Knowledge and Early Arithmetic Problem Solving, *Cognition and Instruction*. 12, pp. 3 – 33.
- Steffe, L (2004). PSSM From a Constructivist Perspective. In D. H. Clements & J. Sarama (eds.), *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 221-251). LEA Publishers.
- Steffe, L.- P., von Glasersfeld, E., Richards, J., Cobb P. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory, and application*. New York: Praeger Scientific.
- Steffe, L.-P. & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.
- Thorndike, E.L. (1922). *The psychology of arithmetic*. New York: Macmillan.
- Vygotsky L. (2008). *Σκέψη και γλώσσα*. Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση.
- Wright, R. J., Martland, J., Stafford, A., & Stanger, G. (2007). *Teaching number: Advancing children's skills and strategies*. London: Paul Chapman Publishing.
- Καφούση, Σ., & Σκουμπουρδή, Χ. (2008). *Τα μαθηματικά των παιδιών 4-6 ετών*. Αθήνα Εκδόσεις Πατάκη.
- Κόσυβας Γ. (2009c). Οι Αριθμοί στο Νηπιαγωγείο: Γνωριμία των νηπίων με την αριθμοακολουθία, *Εκπαιδευτική Κοινότητα*, 89, σσ. 17-23, Αθήνα.

- Κόσσυβας, Γ. (2001). *Η βιωματική διδασκαλία των αριθμητικών εννοιών στο νηπιαγωγείο, η επίδραση της ανάλυσης των αριθμών με δακτυλικούς σχηματισμούς και άλλα εποπτικά και εκφραστικά μέσα του πολιτισμού στην ανάπτυξη της αριθμητικής σκέψης των νηπίων 5-6 χρονών*. ΑΠΘ: Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή.
- Κωτσαλίδου Δ. & Κόσσυβας Γ. (2004). Οι αριθμοί στο νηπιαγωγείο: καταστάσεις προβληματισμού και επικοινωνίας με την αριθμογραμμή και την αριθμοσκάλα, *Σύγχρονο Νηπιαγωγείο*, 39, σσ . 6-13, Αθήνα.
- Μπούφη, Α. (1995). Αρχικές αντιλήψεις των παιδιών της πρώτης δημοτικού για τον αριθμό: Διδακτικές συνέπειες, *Ευκλείδης*, ΕΜΕ, Αθήνα, Γ', 42, pp. 17-39.
- ΥΠΕΠΘ - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1990). *Βιβλίο δραστηριοτήτων για το νηπιαγωγείο, βιβλίο νηπιαγωγού*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.
- ΥΠΕΠΘ (1989). *Αναλυτικό και ημερήσιο πρόγραμμα του νηπιαγωγείου*. Αθήνα: Προεδρικό διάταγμα υπ' αριθ 486, ΦΕΚ 208/1989 τ. Α'.

Abstract

In this paper we present and discuss the findings of an experimental research, which was carried out on 6-year-old children. These particular findings verify the assumption that the infants who were tried in the "approach of number analysis" (research team) have demonstrated a more mature ability of solving problems of addition and subtraction than those who were tried in the usual teaching approach (control group). Moreover, the former group has been able to apply the knowledge of analysis, especially through the analysis-synthesis use of finger patterns in many aspects of the number concept. Therefore, they demonstrated a more mature way of thinking than the children in the control team.