Η ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΤΗΣ ΕΚΠΛΗΞΗΣ ΜΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Γιώργος Δ. Κόσυβας, Βαρβάκειο Πειραματικό Λύκειο
gkosyvas@yahoo.com

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, η οποία υπάγεται στη Θεματική Ενότητα «*Ο δάσκαλος των Μαθηματικών στο περιβάλλον της τάξης*» (04), παρουσιάζονται και αναλύονται δεδομένα με μαθηματικά παράδοξα από τάξεις του Λυκείου. Η εργασία επικεντρώνεται στους συλλογισμούς και τις γνωστικές ασυμφωνίες των μαθητών που παρατηρούνται τόσο σε ατομικό επίπεδο όσο και κατά τις μαθηματικές αλληλεπιδράσεις στην τάξη. Από τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας προκύπτει ότι το εκάστοτε παράδοξο προκαλεί έκπληξη στους μαθητές, κεντρίζει το ενδιαφέρον τους και λειτουργεί ως κίνητρο ενασχόλησης για την ανίχνευση του λάθους και την εμβάθυνση στις μαθηματικές έννοιες.

Εισαγωγή

> «*Και από το τίποτε μπορεί να γίνει κάτι, αλλά αυτό πρέπει να προϋπάρχει μέσα στο τίποτε σε εμβρυακή κατάσταση. Έτσι λοιπόν δεν μπορούμε να δώσουμε σε έναν άνθρωπο κάτι που δεν το έχει ήδη. Τουλάχιστον πρέπει να το έχει με τη μορφή της επιθυμίας, αλλιώς δεν θα το αισθανθεί ως δώρο. Πρέπει να το έχει ζητήσει, έστω και αν η ζήτηση είναι απλώς μια θολή αίσθηση. Τίποτε δεν δίνει την εντύπωση μιας απάντησης, αν δεν ανταποκρίνεται σε ένα προϋπάρχον ερώτημα. Γι' αυτό μένουν τόσα φωτεινά πράγματα απαρατήρητα σαν να μην υπήρχαν καν*».
>
> Έρνστ Μπλοχ

Όταν ο μαθητής συνεχίζει τη φοίτησή του στο Λύκειο, ποτέ δεν είναι άγραφος χάρτης. Το «κάτι» που μέλλει να γεννηθεί, στην προκειμένη περίπτωση οι προχωρημένες μαθηματικές γνώσεις, προϋπάρχει έστω σε σπερματική ή εμβρυακή κατάσταση. Άρα ο δάσκαλος των μαθηματικών θα προσπαθήσει να του δώσει κάτι που «το έχει ήδη»: ως επιθυμία, ως ζήτηση, έστω ως θολή αίσθηση. Ωστόσο ο μαθητής, που μάλλον αποστηθίζει παρά κατανοεί πολλές από τις μαθηματικές έννοιες, δεν μπορεί να «αισθανθεί ως δώρο» την προσφερόμενη διδασκαλία. Η προσφορά του δασκάλου παραμένει δώρο-άδωρο, τα φωτεινά πράγματα που μένουν «απαρατήρητα» σαν να ήταν ανύπαρκτα. Η ζήτηση για μαθηματική γνώση, που έχει αναπτυχθεί στην κοινωνική ζωή (στην οικογένεια, στην επαφή με τους συνομήλικους ή τους μεγαλύτερους, στις προηγούμενες εκπαιδευτικές βαθμίδες), έχει συντελέσει σε αρκετή μάθηση, η οποία με τη σειρά της τονώνει αυτή τη ζήτηση. Όσο η διδασκαλία στο σχολείο παραμένει συνδεδεμένη με την πρότερη άτυπη ή τυπική γνώση και το ζωντανό ενδιαφέρον του μαθητή, η ζήτηση και η μάθηση θα τρέφονται αμοιβαία και τα μαθηματικά θα είναι μια γόνιμη εμπειρία.

Αν ο μαθητής δεν είναι άγραφος χάρτης από γνωστική άποψη, δεν είναι επίσης ούτε από μια άλλη σκοπιά, που αφορά την ψυχολογική στάση του απέναντι στα μαθηματικά. Τόσο στο Δημοτικό σχολείο όσο και στο Γυμνάσιο οι μαθητές συμπορεύονται με τα μαθηματικά. Αυτή η συμπόρευση είναι υποχρεωτική για όλους, όμως δεν φαίνεται αληθινά επιθυμητή για πολλούς μαθητές. Έτσι, ενώ στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού όλοι οι μαθητές εμπλέκονται εθελοντικά στις δραστηριότητες της τάξης και έχουν ζωηρή επιθυμία για την πρόσκτηση μαθηματικών γνώσεων, καθώς μεταβαίνουν από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο παρατηρείται εξασθένιση της επιμονής τους και μεταβολή των μαθησιακών κινήτρων (Αθανασίου & Φιλίππου 2007). Επιπλέον, εμφανίζονται τα πρώτα ίχνη ανησυχίας και φόβου για τα μαθηματικά (Καγκουρά κ. ά. 2009). Σταδιακά καθώς οι μαθητές προχωρούν στις μεγαλύτερες τάξεις ο ζήλος τους ατονεί και το αρχικό ενδιαφέρον εξατμίζεται, ενώ η ανία και αντιπάθειά τους προς τα μαθηματικά αυξάνεται (Τουμάσης 1999). Σε αυτό συμβάλλουν συχνά οι δάσκαλοι και οι γονείς, ιδιαίτερα αν οι ίδιοι ένιωσαν συναισθήματα ταπείνωσης κατά την αυταρχική μαθηματική διδασκαλία που δέχτηκαν ή αντιπαθούν τα μαθηματικά (Καλαβάσης 2005). Μεταφέρουν στα παιδιά την αποθαρρυντική αντίληψη ότι εφόσον δεν διαθέτουν το φυσικό χάρισμα της μαθηματικής ευφυΐας δεν θα κατανοήσουν ποτέ τα μαθηματικά. Οι μαθητές ανάλογα με τον κοινωνικό τους περίγυρο και τις επιδόσεις τους στο σχολείο έχουν σχηματίσει και εξακολουθούν να πλάθουν και να αναπλάθουν μια ευχάριστη ή δυσάρεστη εικόνα για τη φύση των μαθηματικών, όπως βέβαια και το ρόλο του μαθηματικού και το δικό τους ρόλο (Schoenfeld 1982). Έτσι φθάνουν στο Λύκειο, έχοντας ήδη σφυρηλατήσει οι περισσότεροι μια μάλλον αρνητική εικόνα για τα μαθηματικά, τα οποία θεωρούν ως μια δυσνόητη επιστήμη η οποία θα καθορίσει την εκπαιδευτική τους εξέλιξη. Πολλά συνηγορούν υπέρ της υπόθεσης ότι η διδασκαλία των μαθηματικών αφήνει μακροπρόθεσμα τα πιο οδυνηρά τραύματα στους μαθητές. Αυτή η αρνητική εικόνα, τα μαθηματικά ως φόβος και τρόμος, μεταδίδεται από γενιά σε γενιά.

Είναι πικρή και ανησυχητική η διαπίστωση ότι η διδασκαλία των μαθηματικών παράγει συχνά υπερβολική αδιαφορία και αποστροφή των μαθητών του Λυκείου. Μπροστά στον κίνδυνο περιθωριοποίησής τους ακόμα και ικανοί μαθητές προσαρμόζουν τα ενδιαφέροντά τους προς τις γενικές τάσεις που επικρατούν στις εφηβικές ομάδες. Έτσι σπάνια υπάρχουν μαθητές που επιμένουν να εμπλέκονται σε καταστάσεις προβληματισμού με αυτοπεποίθηση και πολύ λιγότεροι με ενθουσιασμό και περιέργεια. Στην καλύτερη περίπτωση ένα μέρος από αυτούς αποκτούν ένα ωφελιμιστικό εξωτερικό κίνητρο, ενδιαφέρονται να πάρουν καλούς βαθμούς, έχουν εκπαιδευτικές και επαγγελματικές βλέψεις, αλλά δεν εργάζονται με πραγματική ευχαρίστηση.

Στο Λύκειο η μάθηση υποτάσσεται στην εξεταστική χρησιμότητα. Έτσι, η καθημερινή διδασκαλία των μαθηματικών σύρεται σε μια προδιαγεγραμμένη πορεία, χωρίς παρεκκλίσεις και εκπλήξεις, όπου οι μαθητές ακολουθώντας οδηγίες παγιώνουν μια κομφορμιστική παθητικότητα που αχρηστεύει το νοητικό οπλισμό τους. Τις περισσότερες φορές, ο τυποποιημένος χειρισμός συμβόλων αρκεί για να πετύχουν υψηλές επιδόσεις κολακεύοντας τη βαθμοθηρία των γονέων τους, ενώ στη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών υπάρχουν σοβαρές ελλείψεις. Επιπλέον, με τον παραμερισμό του νοήματος θυσιάζεται το μόνο γνήσιο μαθησιακό κίνητρο για τα μαθηματικά, η χαρά της ανακάλυψης. Η προαναφερόμενη αρνητική εικόνα των μαθητών για τα μαθηματικά σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες προσδοκίες, καθορίζει προσωρινά τις πεποιθήσεις και τις στάσεις τους, αλλά δεν είναι πολύ βαθιά χαραγμένη και μπορεί να μεταβληθεί ανάλογα με τις εμπειρίες τους στο σχολείο. Μπορεί δηλαδή να επιβεβαιωθεί και να ενισχυθεί ή να τροποποιηθεί από τα πραγματικά βιώματα (McLeod 1992, Viau 2003). Τίθεται τότε το ερώτημα *πώς θα εμφυσήσουμε την επιθυμία των μαθηματικών σε μαθητές που ίσως ποτέ δεν είχαν την έφεση ή το ενδιαφέρον για αυτά*.

Εκτός από την ομορφιά και τη μαγεία των μαθηματικών, μπορεί να σκεφτεί κανείς ότι είναι απεριόριστη η δύναμή τους να μάς καταπλήσσουν, να μάς υποχρεώνουν να μεταθέτουμε τα όρια του νοητού κόσμου προκαλώντας ακαταμάχητη γοητεία. Τα μαθηματικά μάς συναρπάζουν διαταράσσοντας τη σκέψη μας, μάς ενθουσιάζουν και μάς παρωθούν να εφευρίσκουμε απροσδόκητες σχέσεις (Delahaye 2004). Πώς θα ήταν δυνατό η διδασκαλία να αφήσει ένα μικρό απόσταγμα θαυμασμού στους μαθητές; Η ευχάριστη έκπληξη θα μπορούσε να γεννήσει στους μαθητές μια πνευματική έλξη για τα μαθηματικά;

Από τους Πυθαγόρειους με την ανακάλυψη των αρρήτων και τη διατύπωση των άλυτων προβλημάτων της αρχαιότητας, τους ιταλούς αλγεβρίστες της Αναγέννησης με την εφεύρεση των αρνητικών και των μιγαδικών αριθμών (16^{ος} αιώνας), έπειτα στις εργασίες του Cantor για το άπειρο (αρχή του 20ού αιώνα), τα μαθηματικά αναπτύχτηκαν συχνά ξεκινώντας με νέες έννοιες που θεωρήθηκαν τόσο «τερατώδεις» την εποχή που επινοήθηκαν, που προκάλεσαν την κοινή μαθηματική λογική. Συνεπιφέροντας γόνιμες αναθεωρήσεις, συνέβαλαν σε σημαντική πρόοδο της επιστήμης. Μεταξύ αυτών των όμορφων «τεράτων» εμφανίζονται και παράδοξα τα οποία υποχρέωσαν τους μαθηματικούς να εφεύρουν νέες έννοιες και να εγκαταλείψουν άλλες ξεπερασμένες (Falletta 1998, Genard 2001).

Τέτοια παράδοξα, θεμελιώδη στοιχεία μαθηματικών κατασκευών, αλλά και άλλα που είναι πιο προσιτά στην καθημερινή διδασκαλία θα μπορούσαν να έχουν ενδιαφέρον για τους μαθητές, ως κίνητρο στοχασμού. Γι’ αυτό λοιπόν ένα από τα κύρια μελήματα μιας σύγχρονης παιδαγωγικής, θα ήταν η συντονισμένη και επίμονη προσπάθεια για την ανάπτυξη θετικών στάσεων την παρακίνηση και διέγερση του ενδιαφέροντος όλων των μαθητών. Ελπίζουμε οι μαθητές του Λυκείου να αισθανθούν κάποια έκπληξη, να ανακτήσουν την έφεση της παιδικής ηλικίας για το παράξενο, το ασυνήθιστο και την καινοτομία αποκτώντας μια ακατάλυτη και παντοτινή επιθυμία εξερεύνησης και πνευματικής περιπέτειας.

Παιδαγωγική της έκπληξης και μαθηματικά παράδοξα

Τα τελευταία χρόνια αποδίδεται βαρύνουσα σημασία από τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης στο ρόλο του συναισθήματος στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών (De Bellis & Goldin 2006, Hannula 2006, Zan et *al*. 2006). Οι ρευστές αντιλήψεις των παιδιών για τη σημασία των Μαθηματικών στη ζωή, για το εύρος εφαρμογής τους, για το βαθμό δυσκολίας στη μάθησή τους, για το κύρος και το γόητρό τους, διαμορφώνουν ψυχολογικούς μηχανισμούς άμυνας και αποτελούν συχνά πηγή χαράς ή φόβου (Φερεντίνος 2005). Συναισθηματικοί παράγοντες των μαθητών, όπως οι στάσεις και οι συγκινήσεις, οι αυτοεικόνες και οι ετεροεικόνες, τα κίνητρα και οι προσδοκίες, οι πεποιθήσεις και οι αξίες είναι εξίσου σημαντικοί με τη μάθηση του γνωστικού αντικειμένου και επηρεάζουν τις σχολικές επιδόσεις και την αποτελεσματική λύση προβλήματος (Gomez-Chacon 2000, Φιλίππου & Χρίστου 2001). Ειδικότερα, η έκπληξη, ο θαυμασμός και η περιέργεια θεωρούνται ως ελκυστικά παιδαγωγικά τεχνάσματα του δασκάλου για τη διέγερση του ενδιαφέροντος των μαθητών, την προαγωγή της μάθησης και την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης (Legrand 1969, Gardner 1986, Malone & Lepper 1987, Varnava-Skoura 1988, Brown & Walter 1990, Arsac & Mante 2007, Κόσυβας 1996, Τουμάσης 1999). *Η έκπληξη είναι αναμφισβήτητα ένα ευχάριστο συναίσθημα. Θα μπορούσε να αξιοποιηθεί ώστε η διδασκαλία των μαθηματικών να είναι ευχάριστη και γόνιμη για όλους τους μαθητές*;

Η έκπληξη αποτελεί ένα παγκοσμίως κοινό συναίσθημα: δεν αποκτιέται με την εκπαίδευση, αλλά μάλλον είναι έμφυτη σε όλους τους ανθρώπους. Είναι κατά βάση το ευχάριστο ξάφνιασμα ή η αίσθηση της περιέργειας από ένα ασυνήθιστο ή απρόοπτο γεγονός και εμπεριέχει τα γνωρίσματα της χαράς, του θαυμασμού, της διασκέδασης και της ικανοποίησης (Berlyne 1960, Knuth 2002, Johnson 2007). Καθώς οι μαθητές εκπλήσσονται βιώνουν μια έντονη και καθολική έλξη και εμπλέκονται υπαρξιακά και συναισθηματικά. Το εν λόγω συναίσθημα συνοδεύει πνευματικές ενασχολήσεις, όπως η συγκίνηση που παράγεται κατά τη διάρκεια ερευνητικών μαθησιακών διαδρομών καθώς η διάνοια καταγίνεται με ένα αντικείμενο που φαντάζει παράξενο ή ασυνήθιστο (Artemenko 1977, Johnson 2007). Οι ευχάριστες εικόνες και στάσεις που καλλιεργεί αποτελούν ένα προληπτικό φάρμακο, που βοηθά να μη ριζώσει πρόωρα η μαθηματικοφοβία.

Επιπλέον, η έκπληξη μπορεί να εκδηλώνεται όταν υπολανθάνει μια περίεργη υπόνοια μη κατανόησης ή όταν κάτι οικείο εμφανίζεται κάτω από μια άγνωστη ή ασυνήθιστη οπτική γωνία. Συνήθως αποκαλύπτει την ασυμφωνία της σκέψης και είναι απαραίτητη στην ανάπτυξη προβληματισμού. Αναδεικνύει την αποτυχία λογικής σύλληψης του κόσμου, ωθώντας την ανάγκη κριτικού στοχασμού. Με την έκπληξη, «*το ίδιο το υποκείμενο μαθαίνει να κρίνει τις καταστάσεις τις οποίες βιώνει*», σημειώνει ο Louis Legrand στο βιβλίο του *Για μια παιδαγωγική της έκπληξης*. Αποτελεί μια δημιουργική μετάβαση για την πρόσκτηση της γνώσης, αλλά και τον αναστοχασμό. Εφόσον ο ρόλος της στη μαθησιακή διαδικασία είναι γόνιμος, απομένει να εξετάσουμε πώς μπορεί να γεννηθεί η έκπληξη στις τάξεις των μαθηματικών.

Η πρόκληση γνωστικής σύγκρουσης θεωρείται συχνά ως διδακτική στρατηγική η οποία μπορεί να συμβάλλει στη μάθηση (Behr & Harel 1990, Tirosh & Graeber 1990). Η δόμηση των νοητικών ικανοτήτων των μαθητών περιγράφεται συνήθως από το πρότυπο του Piaget που χαρακτηρίζεται από τις διαδικασίες της αφομοίωσης, της προσαρμογής και της ισορροπίας. Καθώς οι μαθητές έρχονται σε γνωστική σύγκρουση, συνειδητοποιούν ότι οι γνώσεις τους είναι ανεπαρκείς και πρέπει να τις αναθεωρήσουν, να τις συμμορφώσουν. Αμφιβάλλοντας για τις βεβαιότητές τους, τις επανεξετάζουν σε βάθος και τις αναδομούν. Αυτή η αντίληψη απορρέει από τη θεωρία της γνωστικής ασυμφωνίας (Festinger 1957) που στηρίζεται στην υπόθεση ότι η γνωστική σύγκρουση προκαλεί μια ψυχική ασυμφωνία στο άτομο που προσπαθεί να την περιορίσει, διατηρώντας τη μεγαλύτερη δυνατή εσωτερική συμφωνία. Η σύγκρουση οδηγεί σε αποσταθεροποίηση των βεβαιοτήτων και αναδόμηση των νοητικών τους δομών (Giordan 1998). Την αρχική έκπληξη διαδέχεται η γνωστική διατάραξη και έπειτα η πολυσύνθετη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής (Posner et *al*. 1982).

Επομένως, ο δάσκαλος πρέπει να αναζητά κατάλληλες διδακτικές καταστάσεις που ενδέχεται να δημιουργήσουν έκπληξη. Τα παράδοξα προβλήματα παρέχουν μια τέτοια δυνατότητα. Τα μαθηματικά παράδοξα είναι προτάσεις που περιέχουν αντίφαση, συλλογισμοί χωρίς φανερό ρήγμα που όμως καταλήγουν σε παράλογο συμπέρασμα, ή γενικότερα καταστάσεις αντίθετες προς τη διαίσθηση. Συνήθως σε μια συνδυασμένη ακολουθία ορθών ισχυρισμών υπολανθάνουν λάθη που οφείλονται στην παραβίαση μαθηματικών ιδιοτήτων, την εσφαλμένη εφαρμογή κανόνων ή την εκτέλεση αλγεβρικών υπολογισμών χωρίς νόημα. Τα παράδοξα αφθονούν στα μαθηματικά και αποτελούν πρόσφορα διδακτικά μέσα: αποφεύγουν προφανή συμπεράσματα προκαλώντας τη γεφύρωση αντιφάσεων και ασυμφωνιών. Γεννιέται έτσι αναπόφευκτα στους μαθητές, η διερώτηση, ο προβληματισμός, η αμφιβολία, η αμφισβήτηση.

Κάθε φορά που καλούμαστε να διδάξουμε μια νέα μαθηματική έννοια στο Λύκειο ψάχνουμε να βρούμε κατάλληλα προβλήματα που να απαντούν στις απορίες των μαθητών. Αναζητούμε εύστοχες περιπτώσεις που ενισχύουν τη βαθύτερη μαθηματική κατανόηση και προσφέρονται για γόνιμες μαθηματικές συζητήσεις στην τάξη. Ένα μέρος από αυτά αποτελούν προβλήματα με αντιφάσεις, πλάνες και παράδοξα. Τα ακόλουθα παραδείγματα συχνά εκπλήσσουν τους μαθητές:

$$\sqrt{3}-1=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=1-\sqrt{3}\text{ , άρα }\sqrt{3}=1.$$

$$1=\sqrt{1\cdot 1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{(-1)}=i\cdot i=-1\text{, άρα }1=-1.$$

Η διασάφηση τέτοιων παραδόξων στην τάξη είναι συχνά διασκεδαστική. Επιπλέον, μάς καθιστούν πιο προσεκτικούς όταν εφαρμόζουμε «συνηθισμένους» κανόνες της άλγεβρας. Η πρόθεσή μας συνοψίζεται στη διδακτική χρήση μαθηματικών παραδόξων στις τάξεις του Λυκείου. Παίρνοντας αφορμές από τα βιώματα και τα ενδιαφέροντα των μαθητών εντάσσουμε στο μάθημα παράδοξες εκπλήξεις με λεπτή προσοχή. Η δημιουργία ενός υποστηρικτικού μαθησιακού περιβάλλοντος που ευνοεί τη συμμετοχή και ενθαρρύνει την ανάπτυξη των ιδιαίτερων κλίσεων και ικανοτήτων των μαθητών αποκτά βαρύνουσα παιδαγωγική σημασία.

Η δύναμη των παραδόξων, επέφερε αξιοσημείωτη πρόοδο στην ιστορία των επιστημών, αποκαλύπτοντας λογικές αδυναμίες, ανεπάρκειες ή επιστημολογικά εμπόδια. Γι' αυτό αποτελούν ένα πολύτιμο εργαλείο που εμπλουτίζει την καθημερινή διδασκαλία. Η πρόκληση έκπληξης, μπορεί να κινητοποιήσει ακόμα και μαθητές που δεν αισθάνονται άνετα ή φοβούνται τα μαθηματικά, να λύσουν τα παράδοξα προβλήματα. Αρκεί να ψάξουν για εξηγήσεις που φωτίζουν τις αντιφάσεις και συνθέτουν σχέσεις με λογική συνοχή. Με την προβολή ενός παραδόξου δεν υπάρχει υπεκφυγή παρά μόνο η λύση της σύγκρουσης: το γνωστικό εμπόδιο δεν μπορεί να παρακαμφθεί, πρέπει να διασχιστεί. Προτείνοντας στους μαθητές μαθηματικά παράδοξα μελετούμε τις παιδαγωγικές επιπτώσεις των προβλημάτων στην τάξη.

Η παρούσα εργασία

Στόχος της εργασίας: Σε αυτή την εργασία διερευνώνται οι μαθηματικοί συλλογισμοί των μαθητών του Λυκείου καθώς αυτοί καταγίνονταν με τη λύση μαθηματικών παραδόξων και την εξεύρεση των λαθών. Στα μαθηματικά παράδοξα ενυπάρχει το στοιχείο της έκπληξης που κεντρίζει την κρίση. Στα εν λόγω διδακτικά πειράματα συγκεντρώνουμε το ερευνητικό ενδιαφέρον τόσο στις ασυμφωνίες που παρατηρούνται σε ατομικό επίπεδο στους μαθητές όσο και στις μαθηματικές αλληλεπιδράσεις στην τάξη. Διατυπώνουμε την υπόθεση ότι τα παράδοξα έχουν παιδαγωγικό ενδιαφέρον για τα μαθηματικά στο Λύκειο (μαθησιακό, συναισθηματικό, μεθοδολογικό, μεταγνωστικό).

Πλαίσιο έρευνας και συμμετέχοντες: Η έρευνα εκτυλίχτηκε σε διάφορες τάξεις του Βαρβακείου Πειραματικού ΓΕΛ, στην Αθήνα, κατά τα διδακτικά έτη 2009-10 και 2010-11. Ο εκπαιδευτικός είναι καθηγητής μαθηματικών του σχολείου. Το διδακτικά πειράματα αναφέρονται σε μαθηματικά παράδοξα που εκτίθενται παρακάτω μαζί με τα αποτελέσματα.

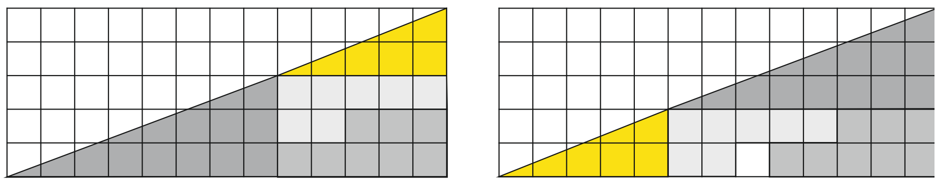
Συλλογή και ανάλυση δεδομένων: Παρατηρήθηκαν οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στους μαθητές κατά τη διάρκεια της συνεργασίας τους ανά δύο και κατά τη διάρκεια της κοινής συζήτησης σε όλη την τάξη. Επίσης, λήφθηκαν υπόψη οι γραπτές σημειώσεις κάθε μαθητή κατά τη διάρκεια της λύσης των προβλημάτων. Η ανάλυση των δεδομένων είναι ποιοτική και αφορά τη συμμετοχική παρατήρηση της τάξης. Εξετάζουμε κυρίως την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων (Erickson 1986, Cobb et *al*. 2003, Collins et *al*. 2004).

Οι μαθηματικές δραστηριότητες: Τα παράδοξα που επιλέχτηκαν είναι αλγεβρικού και γεωμετρικού τύπου. Μια δυσκολία ήταν η εύρεση παραδόξων που περιέχουν μια προφανή αντίφαση και συγχρόνως υποκρύπτουν μαθηματικές έννοιες συμβατές με το σχολικό πρόγραμμα. Τα προβλήματα κατασκευάστηκαν ή αντλήθηκαν από διάφορες πηγές και προσαρμόστηκαν: βιβλία εξειδικευμένα στα παράδοξα, ιστότοποι στο διαδίκτυο που συγκεντρώνουν διασκεδαστικά προβλήματα, άρθρα από παιδαγωγικά περιοδικά, διδακτικά εγχειρίδια κλπ. (Northrup 1944, Kleiner & Movshovitz-Hadar 1994, Abiteboul 1998, Movshovitz-Hadar & Webb 1998, Σπανδάγος & Σπανδάγου, 2003). Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ορισμένα προβλήματα που δοκιμάστηκαν στις τάξεις με μια προκαταρκτική ανάλυση και μια σύνοψη των συλλογισμών των μαθητών κατά τη μαθηματική επικοινωνία.

Παρουσίαση και συζήτηση των αποτελεσμάτων

1. *Το τριάντα δύο είναι ίσο με το τριάντα τρία ! (Β Λυκείου)*

Εκφώνηση: *Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν δύο πάζλ που έχουν κατασκευαστεί από τα ίδια κομμάτια. Αν αναδιατάξουμε τα κομμάτια του πρώτου πάζλ, τότε* *σχηματίζεται το δεύτερο στο οποίο όμως περισσεύει ένα λευκό τετράγωνο. Πώς εξηγείτε αυτό το αποτέλεσμα;*



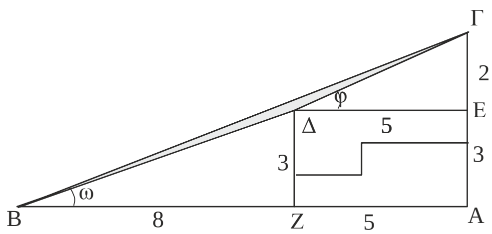
Ο στόχος αυτού του προβλήματος είναι να θέσουμε τους μαθητές σε μια κατάσταση έκπληξης (τα δύο πάζλ καλύπτουν φαινομενικά «ίσα τρίγωνα» των οποίων το εμβαδόν διαφέρει!). Το εν λόγω πάζλ αποτελεί μια εκδοχή ανάλογου πάζλ που εφευρέθηκε από τον Lewis Carroll, και αναμένεται να προκαλέσει γνωστική σύγκρουση στους μαθητές ανάμεσα στην οπτική αντίληψη και τις γνώσεις τους για τα εμβαδά.

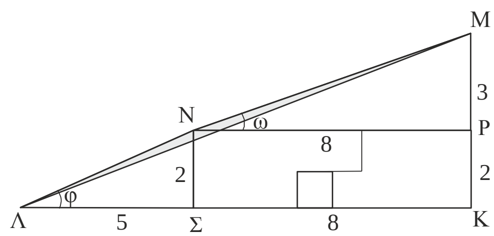
Η πλειονότητα των μαθητών θεώρησε παράξενο τα ίδια κομμάτια στο δεύτερο πάζλ να αφήνουν ένα μικρό λευκό τετράγωνο. Ορισμένοι μαθητές με χαμηλή μαθηματική αυτοπεποίθηση δεν έψαξαν για τη λύση επειδή θεώρησαν ότι δεν θα τη βρουν. Όμως, δήλωσαν ότι επιθυμούν να τη γνωρίσουν. Οι συναισθηματικές αντιδράσεις των μαθητών ποικίλουν: από τη μια μεριά είναι εκείνοι που εξέφρασαν την επιθυμία να λύσουν το πρόβλημα εκδηλώνοντας έκπληξη, αμηχανία, περιέργεια, γοητεία και ανακούφιση όταν έβρισκαν κάποια εξήγηση και από την άλλη εκείνοι που εξέφρασαν δυσαρέσκεια, ανησυχία, νευρικότητα, έλλειψη κατανόησης, αμφιβολία, άγνοια και φόβο.

Το πρόβλημα προκάλεσε βαθειά γνωστική σύγκρουση στους μαθητές και ο διασκεδαστικός χαρακτήρας τούς ώθησε να ψάξουν για μια εξήγηση. Ορισμένες εξηγήσεις που έδωσαν οι μαθητές για να αιτιολογήσουν τη διαφορά των εμβαδών αποκαλύπτουν αποσταθεροποίηση: «*το αποτέλεσμα εξαρτάται από τον τύπο του εμβαδού*», «*όταν αλλάζουμε τη διάταξη των κομματιών, το εμβαδόν αλλάζει*». Είναι αξιοσημείωτο ότι δύο μαθητές έδειξαν έστω προσωρινά αδυναμία διατήρησης του εμβαδού.

Οι περισσότεροι μαθητές στα φύλλα εργασίας βρήκαν τα εμβαδά των δύο υποτιθέμενων τριγώνων από τα κομμάτια τους με χρήση τύπων και απαριθμήσεις τετραγώνων: 32 cm^2 και 33 cm^2. Λιγότεροι μαθητές υπολόγισαν το εμβαδόν του μισού ορθογωνίου: 32,5 cm^2. Μόνο τρεις δυάδες μαθητών ανέφεραν ότι *δεν έχουμε τρίγωνα, αλλά τετράπλευρα αφού το ένα «μπαίνει μέσα» και το άλλο «βγαίνει έξω»*. Έτσι, διατύπωσαν την εικασία ότι δεν σχηματίζεται «*ένα κανονικό ορθογώνιο τρίγωνο, αφού τα τρία σημεία στην υποτιθέμενη υποτείνουσα δεν ευθυγραμμίζονται*». Για την απόδειξη της εικασίας χρησιμοποιήθηκαν: όμοια τρίγωνα, χρήση διανυσμάτων και τριγωνομετρία. Μόνο η τριγωνομετρία τελεσφόρησε:

Ονομάζουμε: $\Delta\hat{B}Z = M\hat{N}P = \omega$ *και* $\Gamma\hat{\Delta}E = N\hat{\Lambda}\Sigma = \varphi$.





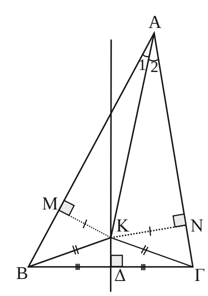
Και στα δύο σχήματα για τις οξείες γωνίες φ και ω ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{3}{8}$ *και* $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{2}{5}$. *Οπότε* $\varepsilon\varphi\omega \neq \varepsilon\varphi\varphi \Rightarrow \omega \neq \varphi$. *Επομένως τα σημεία Β, Δ, Γ και Λ, Ν, Μ δεν είναι συνευθειακά. Στο πρώτο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν μισό τετραγωνάκι περισσότερο από το πάζλ (32,5-32=0,5), ενώ στο δεύτερο, το τρίγωνο ΚΛΜ είναι μισό τετραγωνάκι λιγότερο από το πάζλ μαζί με το λευκό τετράγωνο (33-32,5=0,5). Αυτά τα δύο μισά εξηγούν την παράξενη παρουσία του λευκού τετραγώνου.*

Έτσι συμπέραναν ότι οι κορυφές των κομματιών που οπτικά τοποθετούνται στην «υποτείνουσα του τριγώνου» δεν αποτελούν συνευθειακά σημεία.

2. *Κάθε τυχόν τρίγωνο είναι ισοσκελές! (Β Λυκείου)*

Εκφώνηση: *Έστω τυχόν* τρίγωνο ΑΒΓ, όπου ΑΒ>ΑΓ. Παρακάτω ακολουθεί μια απόδειξη από την οποία συνάγεται ότι κάθε τυχόν τρίγωνο είναι υποχρεωτικά ισοσκελές.

Στο εν λόγω πρόβλημα η απόδειξη εμφανίζεται αδιάψευστη, όμως το λάθος ενυπάρχει στο σχήμα. Αναμένεται ότι κατά τη διάρκεια της έρευνάς τους, οι μαθητές θα κάνουν ένα δικό τους σχήμα και θα αντιληφθούν ότι το σχήμα που δίνεται δεν συμφωνεί με την εκφώνηση.



Νο	**Φύλλο απαντήσεων: Προτάσεις**	**Σ**	**Λ**
(1)	*Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας Α, και η μεσοκάθετος στην πλευρά ΒΓ τέμνονται στο σημείο Κ (έχουν χαραχθεί και φαίνονται στο σχήμα).*		
(2)	*Έστω Μ η ορθή προβολή του Κ στην ΑΒ. Τότε το τρίγωνο ΑΜΚ είναι ορθογώνιο στο Μ.*		
(3)	*Έστω Ν η ορθή προβολή του Κ στην ΑΓ. Τότε το τρίγωνο ΑΝΚ είναι ορθογώνιο στο Ν.*		

(4)	*Επειδή το Κ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α, θα ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, οπότε ΚΜ=ΚΝ.*		
(5)	*Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΚ.* **(2)** *Τότε:* $AK^2 = MK^2 + AM^2$.		
(6)	*Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΝΚ.* **(3)** *Τότε:* $AK^2 = NK^2 + AN^2$.		
(7)	*Επειδή ΚΜ=ΚΝ* **(4)***, από τις δύο προηγούμενες ισότητες, συμπεραίνουμε ότι:* $AM^2 = AN^2$ *, άρα ΑΜ=ΑΝ.*		
(8)	*Από την κατασκευή του το Κ, βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο της ΒΓ* **(1)***. Επομένως από τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου προκύπτει: ΚΒ=ΚΓ.*		
(9)	*Έφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΒΜ. Τότε:* $BK^2 = MK^2 + BM^2$.		
(10)	*Έφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΝ. Τότε:* $\Gamma K^2 = NK^2 + \Gamma N^2$.		
(11)	*Άρα, ξέρουμε ότι ΚΒ =ΚΓ (***8***) και ότι ΚΜ=ΚΝ (***4***). Οπότε από τις* **(9)** *και (***10***), προκύπτει:* $BM^2 = \Gamma N^2$ *, οπότε ΜΒ =ΓΝ.*		
(12)	*Από το* **(7)***, έχουμε ΑΜ =ΑΝ και από το* **(11)** *ΜΒ =ΝΓ . Άρα: ΑΒ=ΑΜ+ΜΒ και ΑΓ=ΑΝ+ΝΓ=ΑΒ . Οπότε, ΑΒ=ΑΓ και το τυχόν τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές .*		

Ορισμένοι μαθητές της τάξης δεν συνειδητοποίησαν ότι η έκφραση «*κάθε τυχόν τρίγωνο είναι ισοσκελές*» είναι πάντοτε ψευδής παρότι ένα απλό αντιπαράδειγμα τριγώνου αρκεί να πείσει για το αντίθετο! Οι περισσότεροι μαθητές θεωρούσαν προκαταβολικά ότι μια τέτοια απόδειξη είναι παράλογη. Όμως, δεν κατάφεραν να εντοπίσουν το λάθος και χωρίς κριτική διάθεση τσεκάρισαν όλα τα βήματα της απόδειξης ως σωστά ή μόνο ένα λάθος. Έτσι το παράδοξο τούς διέφυγε. Ωστόσο, για την πλειονότητα των μαθητών, είναι αναμφισβήτητο ότι υπάρχουν τυχόντα τρίγωνα, αλλά θεωρούν ότι η απόδειξη είναι επίσης σωστή αφού δεν βρήκαν κανένα λάθος. Ήταν δύσκολο να συμφιλιώσουν δύο αντιφατικούς ισχυρισμούς! Αυτή η κατάσταση τους αποσταθεροποίησε πολύ, σε σημείο που ένας μαθητής δήλωσε: «*Πώς είναι δυνατόν ένα τρίγωνο με 2, 4 και 5 cm να είναι ισοσκελές;*».

Ελάχιστοι μαθητές κατασκεύασαν μόνοι τους ένα σχήμα. Το διδακτικό συμβόλαιο (Brousseau 1986) σε ένα πρόβλημα γεωμετρίας, προαπαιτεί το σχήμα να συμφωνεί με τα δεδομένα της εκφώνησης. Για τη λύση του παραδόξου απαιτείται αμφισβήτηση της γεωμετρικής κατασκευής που εκτίθεται στην εκφώνηση, δηλαδή ρήξη του διδακτικού συμβολαίου. Αυτό αποτέλεσε ένα ανυπέρβλητο εμπόδιο για τους μαθητές.

Κατά τη διάρκεια της φάσης της ανοιχτής συζήτησης με ολόκληρη την τάξη, οι μαθητές κλήθηκαν να κάνουν με προσοχή την κατασκευή. Τότε αντιλήφθηκαν ότι οι προβολές Μ και Ν είχαν διαφορετικές θέσεις και το σημείο Κ βρισκόταν στο εξωτερικό του τριγώνου. Επανέλαβαν στη συνέχεια την απόδειξη λαμβάνοντας υπόψη το νέο σχήμα. Το παράδοξο εξανεμίστηκε: ένα τυχόν τρίγωνο παραμένει πάντα τυχόν τρίγωνο. Το σωστό σχήμα δεν επιτρέπει πλέον να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Ωστόσο δεν μπόρεσαν να αποδείξουν την εικασία ότι το σημείο τομής Κ της μεσοκαθέτου και της διχοτόμου βρίσκεται πάντα στο εξωτερικό του τριγώνου (Τουμάσης 1999). Η απόδειξη έγινε από τον διδάσκοντα.

Το εν λόγω πρόβλημα ήταν αφορμή για ένα μέρος των μαθητών να σκεφτούν ότι ένα ανακριβές σχήμα μπορεί να οδηγήσει σε αποδεικτικές πλάνες που μας εκπλήσσουν. Γι’ αυτό απαιτείται πρώτιστα ο κριτικός έλεγχος των υποθέσεων του προβλήματος. Έθεσαν ερωτήματα σχετικά με τις έννοιες του σωστού και του λάθους στα μαθηματικά καθώς και τη σημασία της απόδειξης. Οι μαθητές συμπέραναν ότι έπρεπε να επιδείξουν κριτικό πνεύμα προς την εκφώνηση και το δικό τους συλλογισμό. Τέλος το πρόβλημα αποδείχτηκε πλούσιο από την άποψη των γεωμετρικών γνώσεων που αξιοποιήθηκαν στην απόδειξη.

3. *Το πέντε είναι ίσο με το ένα ! (Α Λυκείου)*

Εκφώνηση: *Να βρεθεί το λάθος στη σειρά των συλλογισμών:*
Έστω δύο θετικοί αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε x=2y. Τότε έχουμε:

$(y-x)^2=(y-2y)^2=(-y)^2=y^2$	(1)	*Οπότε:* $5x=2y$	(5)
$(2y+x)^2=(2y+2y)^2=(4y)^2=16y^2$	(2)	*Επειδή* $x=2y$, *προκύπτει* $5y=y$	(6)
Οπότε: $(2y+x)^2=16(y-x)^2$	(3)	*και εφόσον* $y\neq 0$, $\mathbf{5=1}$.	(7)
Δηλαδή: $(2y+x)=4(y-x)$	(4)		

Η σειρά των συλλογισμών που εκτίθενται παραπάνω αρχίζει με δύο αληθείς αλγεβρικές ισότητες, τις (1) και (2), αλλά καταλήγει σε ένα προφανώς ψευδές συμπέρασμα (5 = 1!). Πώς να εξηγήσουμε αυτό το αποτέλεσμα; Ο στόχος είναι να σκεφτούν οι μαθητές την ψευδή απόδειξη για να βρουν το βήμα με τον λανθασμένο συλλογισμό. Αυτή η άσκηση μπορεί ενδεχομένως να αποτρέψει τους μαθητές από τη διάπραξη του συχνού λάθους: $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\beta$.

Αυτό το αλγεβρικό πρόβλημα δυσκόλεψε τους μαθητές πάρα πολύ: Αρχικά ήταν αδύνατο να βρουν τον εσφαλμένο συλλογισμό. Οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να αντικρούσουν μια απόδειξη που οδήγησε σε λάθος και βυθίστηκαν σε μια κατάσταση σοβαρής γνωστικής ασυμφωνίας. Η γνωστική σύγκρουση ανάμεσα στη βεβαιότητά τους ότι το πέντε δεν είναι ίσο με ένα και την πεποίθησή τους ότι οι υπολογισμοί που παρουσιάζονται είναι ακριβείς προκάλεσε έντονες αντιδράσεις. Αρκετοί μαθητές έδειχναν ενοχλημένοι, ταραγμένοι ή άφωνοι. Η αιτία που πρόβαλαν οι μαθητές για να εξηγήσουν το πρόβλημα είναι ότι πιθανώς έκαναν λανθασμένες πράξεις. Η μετάβαση στο βήμα (3) ήταν το δυσκολότερο σημείο της απόδειξης για την πλειονότητα των μαθητών της τάξης, αφού αδυνατούσαν να συνδυάσουν τα βήματα (1) και (2) και να καταλήξουν στο βήμα (3). Έτσι θεώρησαν ότι το πιθανό αλγεβρικό λάθος υπάρχει στο στάδιο της απόδειξης που δεν κατείχαν καλά. Παρόλα αυτά, καμία αιτιολόγηση δεν προσκόμισαν για να αιτιολογήσουν το λάθος. Εξαίρεση παρουσιάζει το ακόλουθο απόσπασμα από τη συζήτηση στην τάξη:

Παναγιώτης: *Εγώ νομίζω ότι η ισότητα $2y+x=4(y–x)$ είναι σωστή. Απλά διώχνουμε τα τετράγωνα.*

Δημήτρης: Μισό! *Ξέρουμε ότι $x=2y$. Αν βάλουμε $y=1$ και $x=2$ τότε το αριστερό μέλος είναι $2y+x=2·1+2=4$ και το δεξιό $4(y–x)= 4(1–2)= 4(–1)= -4$. Οπότε το βήμα (4) είναι λάθος.*

Παναγιώτης: *Σβήνουμε τα τετράγωνα. Τότε : $(2y+x)=4(y–x)$. Έτσι το βήμα (4) είναι σωστό.*

Δημήτρης: *Μπορείς να εξηγήσεις τι έκανες;*

Παναγιώτης: *… Ναι! Βγάζουμε τις τετραγωνικές ρίζες των δύο μελών: $(2y+x)^2=16(y–x)^2$ οπότε …* (σιωπή) $\sqrt{(2y+x)^2}=\sqrt{\left[4(y-x)\right]^2}$ *και βρίσκουμε $(2y+x)=4(y–x)$.*

Δημήτρης: *Είναι λάθος. Το -4 και το 4 δεν μπορούν να είναι ίσα.*

Παναγιώτης: *Ναι…* (Σιωπή). *Νομίζω έπρεπε να πάρω απόλυτα…*

Ο Δημήτρης με ένα αντιπαράδειγμα εντόπισε το βήμα (4) που περιέχει το λάθος. Ο Παναγιώτης ενώ αρχικά έδωσε λανθασμένη εξήγηση μετά το διάλογο αναστοχάστηκε και αιτιολόγησε το λάθος του.

4. *Ισχύει $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$ για $\alpha,\beta\in C$; (Γ Λυκείου)*

Εκώνηση: *Αν $z,w\in C$ να λυθεί η εξίσωση: $z^2+w^2-2i(2z-3w)=13$ (1).*

Ισχύει: $(1)\Leftrightarrow z^2+w^2-4zi+6wi-4-9=0\Leftrightarrow\left(z^2-4zi-4\right)+\left(w^2+6wi-9\right)=0$ *(2)*

$$\Leftrightarrow\left[z^2-2\cdot z\cdot(2i)+(2i)^2\right]+\left[w^2+2\cdot w\cdot(3i)+(3i)^2\right]=0\Leftrightarrow(z-2i)^2+(w+3i)^2=0. \quad (3)$$

Δηλαδή: $(z-2i)^2+(w+3i)^2=0\Leftrightarrow z=2i$ *και* $w=-3i.$ *(4)*

Επίσης αν θέσουμε στην (1) $z=2i+4$ *και* $w=i$ *ισχύει:* $(2i+4)^2+i^2-2i\left[2(2i+4)-3i\right]=13$ *(5)*

$$\Leftrightarrow 4i^2+16i+16+i^2-8i^2-16i+6i^2=13\Leftrightarrow -4+16i+16-1+8-16i-6-13=0\Leftrightarrow 0=0. \quad (6)$$

Το παράδοξο συνίσταται στο ότι για $z = 2i + 4$ *και* $w = i$ *, η εξίσωση ικανοποιείται, ενώ οι λύσεις αυτές δεν βρέθηκαν. Να βρείτε πού είναι το λάθος.*

Το λάθος βρίσκεται στο βήμα (4), όπου χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $a^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \ \textit{και} \ \beta = 0$, η οποία δεν ισχύει στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών. Η σωστή λύση που βρέθηκε από ένα μαθητή είναι η ακόλουθη:

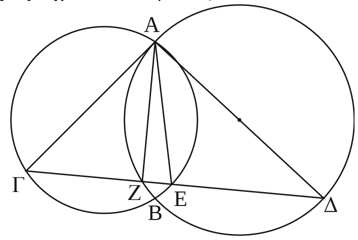
$$(z-2i)^2 + (w+3i)^2 = 0 \Leftrightarrow (z-2i)^2 - i^2(w+3i)^2 = 0 \Leftrightarrow (z-2i)^2 - \left[i(w+3i)\right]^2 = 0$$

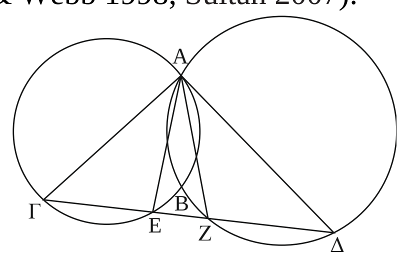
$$\Leftrightarrow \left[(z-2i) + i(w+3i)\right]\left[(z-2i) - i(w+3i)\right] = 0 \Leftrightarrow (z-2i+iw-3)(z-2i-iw+3) = 0.$$

$z_1 = -iw + 2i + 3$ *ή* $z_2 = iw + 2i - 3$, *όπου w είναι τυχαίος μιγαδικός αριθμός.*

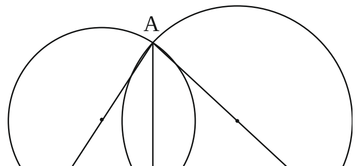
5. ***Από σημείο εκτός ευθείας χαράσσονται δύο κάθετες προς την ευθεία! (Β Λυκείου)***

Είναι δυνατό να χαράξουμε δύο κάθετες από το ίδιο σημείο προς την ίδια ευθεία; Βεβαίως. Είναι δυνατό εφόσον δεχτούμε την ακόλουθη επιχειρηματολογία (Movshovitz-Hadar & Webb 1998, Sultan 2007):





Δύο κύκλοι με διαμέτρους ΑΓ και ΑΔ τέμνονται στα σημεία Α και Β. Η ΓΔ τέμνει τους δύο κύκλους στα Ε και Ζ (υπάρχουν δύο δυνατότητες). Τότε και για τις δύο περιπτώσεις έχουμε: Επειδή οι γωνίες $\mathrm{A\hat{E}\Gamma}$ και $\mathrm{A\hat{Z}\Delta}$ βαίνουν σε ημικύκλια θα είναι ορθές. Επομένως, οι ΑΕ και ΑΖ είναι δύο κάθετες προς τη ΓΔ που διέρχονται από το σημείο Α.



Στην προηγούμενη επιχειρηματολογία δεν υπάρχει κάποιο λάθος. Μια τρίτη δυνατότητα φαίνεται στο διπλανό σχήμα, όπου τα σημεία Ε, Β, Ζ συμπίπτουν. Έτσι η ΓΔ διέρχεται υποχρεωτικά από το σημείο Β. Πράγματι:

$$\mathrm{A\hat{B}\Gamma} + \mathrm{A\hat{B}\Delta} = 90^0 + 90^0 = 180^0.$$

Επομένως η ΓΒΔ είναι ευθεία. Σημειώνουμε ότι παρότι στην τάξη δημιουργήθηκε κλίμα έκπληξης και προβληματισμού, κανένας μαθητής δεν βρήκε το λάθος στο προηγούμενο πρόβλημα. Αυτό οφείλεται κυρίως στην έλλειψη συστηματικής διδασκαλίας της γεωμετρίας.

Συμπεράσματα

Η διδακτική πρακτική με τα μαθηματικά παράδοξα στις τάξεις του Λυκείου αποδείχτηκε μαθησιακά γόνιμη. Οι μαθητές κατάφεραν να προσεγγίσουν οικείες μαθηματικές έννοιες με ένα νέο και ασυνήθιστο τρόπο που τούς προκάλεσε εκπλήξεις, ασυμφωνίες και γνωστικές αποσταθεροποιήσεις. Τα προαναφερόμενα διδακτικά πειράματα, αποκαλύπτουν τη σημασία της παιδαγωγικής της έκπληξης και αναδεικνύουν διάφορες πλευρές της, όπως μεθοδολογικές, μεταγνωστικές, συναισθηματικές και κυρίως γνωστικές. Στις καταστάσεις προβληματισμού και έκπληξης που εκτέθηκαν, οι μαθητές αναγκάζονται να σκεφτούν σε βάθος, να πάρουν ενεργό μέρος στις μαθηματικές συζητήσεις της τάξης, αμφισβητώντας συνήθεις εσφαλμένους αυτοματισμούς, υπερβαίνοντας αντιφάσεις και προβάλλοντας πειστικά αποδεικτικά επιχειρήματα. Οι μαθηματικές παραδοξότητες χρησιμοποιήθηκαν ως διδακτικά τεχνάσματα που προκάλεσαν γνωστικές συγκρούσεις προωθώντας αναδομήσεις που οδήγησαν σε μεγαλύτερη εσωτερική συνοχή των γνώσεων των μαθητών. Σε ανάλογα συμπεράσματα κατέληξαν και άλλες έρευνες (Movshovitz-Hadar & Hadass 1990, Movshovitz-Hadar & Hadass 1991). Ωστόσο, υπήρξαν και περιπτώσεις μαθητών που η διδακτική τεχνική της γνωστικής σύγκρουσης τούς προξένησε πρόσκαιρη σύγχυση και απογοήτευση. Με την ενθάρρυνση επιδιώχτηκε, ενίσχυση της αυτοπεποίθησης και ανάκτηση της ελπίδας.

Οι παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι η έκπληξη τονώνει θαυμάσια κίνητρα για τη λύση παράδοξων προβλημάτων και προκαλεί στους μαθητές αναστοχασμό και κριτική επανεξέταση των μαθηματικών γνώσεων που απαιτούνται για την προαγωγή της μάθησης που βασίζεται στο νόημα. Τελικά, θα πρέπει να υπογραμμιστεί ότι ο στόχος της έκπληξης αντιστράφηκε κατά τρόπο απρόβλεπτο: ενώ τα παράδοξα προβλήματα προκάλεσαν έκπληξη στους μαθητές, εκείνοι με τη σειρά τους εξέπληξαν πολλαπλά και τον διδάσκοντα: *όσο πιστεύαμε ότι θα εκπλήξουμε τόσο πιο έκπληκτοι μέναμε!* Οι αντιδράσεις των μαθητών και οι αναθεωρήσεις των αντιλήψεών τους αποτελούν έναν ανεκτίμητο διδακτικό θησαυρό.

Πώς θα μπορούσε να αλλάξει η άχαρη και άνυδρη διδασκαλία των μαθηματικών στο Λύκειο; Αναμφισβήτητα, η έκπληξη είναι ένα μαθησιακό κίνητρο για τους μαθητές που ως εκπαιδευτικοί δεν πρέπει αγνοήσουμε ή να υποτιμήσουμε. Εκτυλίσσεται σε λίγο χρόνο και συνδυάζει «*το τερπνόν μετά του ωφελίμου*». Αποτελεί ένα ισχυρό μέσο εσωτερικής παρακίνησης για μάθηση που κρατά αμείωτο το ενδιαφέρον των μαθητών, γεννά νέες ιδέες και συνιστά ένα πρόσφορο διδακτικό εφεύρημα για περαιτέρω μαθησιακές αναζητήσεις. Επιπλέον, καθώς «*η έκπληξη περικλείει το στοιχείο της απορίας και της ευχαρίστησης, μπορεί να δώσει μια ανεξάρτητη και συμπληρωματική συνεισφορά στη διαδικασία της αναστοχαστικής αφαίρεσης*», (Varnava-Skoura 1988) ανοίγοντας απεριόριστα πεδία κριτικού στοχασμού. Τι μπορούμε να κάνουμε για να υπάρχει στην τάξη μας το στοιχείο της έκπληξης; Πρώτον, να επιλέγουμε ερεθίσματα που δεν είναι αυθαίρετα, αλλά απαντούν στα προϋπάρχοντα ερωτήματα και τη θολή αίσθηση ζήτησης των μαθητών μας. Δεύτερον, να αξιοποιήσουμε παράδοξα ή άλλες παρεμφερείς ιδέες που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια. Οι εκπλήξεις βρίσκονται παντού και μπορούν να εμπλουτίσουν τη διδασκαλία προκαλώντας τους μαθητές να σκεφτούν σε βάθος και να ανακαλύψουν τη γνώση. Αλλά υπάρχει ένα πρόβλημα: *οι περισσότεροι δάσκαλοι των μαθηματικών είμαστε τόσο εξοικειωμένοι με το περιεχόμενο του μαθήματος που όταν διδάσκουμε δεν μας προξενεί πλέον πραγματική «έκπληξη»*. Η τεχνική της έκπληξης βελτιώνει το καθημερινό μάθημα με δημιουργικές κοιτίδες εναλλακτικών προσεγγίσεων που ανακουφίζουν από το φόβο και το άγχος, διεγείρουν μια χαρούμενη διάθεση και εμβαθύνουν στην κατανόηση. Θα μπορούσαμε να την δοκιμάσουμε.

Βιβλιογγαφία

Abiteboul, O. (1998). *Le paradoxe apprivoisé*, Paris: Flammarion.

Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, Villeurbanne : IREM de Lyon, CRDP.

Artemenko, P. (1977). *L'étonnement chez l'enfant*, Paris: Vrin.

Behr, M. & Harel, G. (1990). Students' Errors, Misconceptions, and Cognitive Conflict in Application of Procedures. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **12(3 & 4)**, 75-84.

Berlyne, D. N. (1960). *Conflict, arousal, and curiosity*. New York : McGraw-Hill.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques des mathématiques,* **7(2)**, 33-115.

Brown, S.-I. & Walter, M. (1990). *The Art of Problem Posing*. Hillsdale, N.J.: LEA.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, **32(1)**, 9-13.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, **13(1)**, 15–42.

Debellis, V.A. & Goldin, G. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, **63**, 131-147.

Delahaye, J.-P. (2004). *Les inattendus mathématiques,* Paris: Belin.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M.C. Merlin (Ed.), *Handboock of research on teaching* (pp. 119-161). New York: Macmillan Publishing Company.

Falletta, N. (1998). *Le livre des paradoxes*, Paris: Diderot.

Festinger, L.(1957). *A Theory of Cognitive Dissonance.* Evanston, 111: Row, Peterson.

Genard, S. (2001). Rôles des paradoxes dans l'évolution des mathématiques, *Expressions : Publication de l'IUFM de la Réunion*, **18**, 67-86.

Giordan, A. (1998). *Apprendre !* Paris: Belin.

Gomez-Chacon, I. M. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **43**, 149-168.

Hannula, M. S. (2006). Affect in Mathematical Thinking and learning. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 209-232. Rotterdam: Sense.

Johnson, D.-R. (2007). The Element of Surprise: An Effective Classroom Technique. *Mathematics Teacher*, **100**, (special issue), 56–59.

Kleiner, I. & Movshovitz-Hadar N. (1994). The role of paradoxes in the evolution of mathematics, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 101, **10**, pp. 963-974.

Knuth, E. (2002). Fostering Mathematical Curiosity. *Mathematics Teacher*, **95**, 126–30.

Legrand, L. (1969). *Pour une pédagogie de l'étonnement*. Neuchâtel (Suisse): Delachaux et Niestlé.

Malone, T.W. & M.R. Lepper (1987). Making Learning Fun: A Taxonomy of Intrinsic Motivations for Learning. In R.E. Snow and M.J. Farr (Eds), *Aptitude, Learning and Instruction: III. Conative and affective process analyses*, (pp. 223-253). Erlbaum: Hilsdale, NJ.

McLeod, D. B. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 575-596). New York: Macmillan.

Movshovitz-Hadar N. & Webb J. (1998). *One Equals Zero and Other Mathematical Surprises: Paradoxes, Fallacies and Mind Bogglers*. Emeryville (USA): Key Curriculum Press.

Movshovitz-Hadar, N. & Hadass, R. (1990). Preservice education of math teachers using paradoxes, *Educational Studies in Mathematics*, **21**, 265-287.

Movshovitz-Hadar, N. & Hadass, R. (1991). More about Mathematical Paradoxes in Preservice Teacher Education. *Teaching & Teacher Education*, **7(1)**, 79-92.

Northrup, E.- P. (1944). *Riddles in Mathematics: A Book of Paradoxes.* New York: D. Van Nostrand.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W. & Gertzog, W. A. (1982). Accomodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change. *Science Education*, **66(2)**, 211-227.

Schoenfeld, A.H. (1982). Sex, grade level, and the relationship between mathematics attitude and achievement in children. *Journal of Educational Psychology,* **75(5)**, 280-284.

Sultan, A. (2007). Some Interesting and Thought-Provoking Geometric Fallacies. *Mathematics Teacher*. **101(2)**, 114–119.

Tirosh, D. & Graeber, A. (1990). Evoking Cognitive Conflict to Explore Preservice Teachers' Thinking About Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21(2)**, 98-108.

Varnava-Skoura, G. (1988). Surprise and reflective abstraction: a study of learning, Athens: Papazissis Publishers.

Viau, R. (2003). *La motivation en contexte scolaire*. Bruxelles: De Boeck.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics,* **63(2)**, 113-121.

Gardner, M. (1986). *Το πανηγύρι των μαθηματικών*. Αθήνα: Τροχαλία.

Αθανασίου, Χ. & Φιλίππου, Γ. (2007). Τα κίνητρα των μαθητών στα μαθηματικά κατά τη μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο και οι διαφορές με βάση το φύλο. Στο Χ. Σακονίδης, & Δ. Δεσλή (Επιμ.), *Πρακτικά του 2ου συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ*, (σσ. 99-109). Εκδόσεις Τυπωθήτω.

Καγκουρά, Θ., Γαγάτσης, Α., Μονογυιού, Α., & Ηλία, Ι. (2009). Επίλυση ασυνήθιστων προβλημάτων και πεποιθήσεις των μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου Ελλάδας για τα μαθηματικά. Στο Α. Γαγάτσης, Α. Φιλίππου, Π. Δαμιανού & Ε. Αυγερινός (Επιμ.), *Πρακτικά του 11ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης* (σσ. 445–468). Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Καλαβάσης Φ., κ. ά (2005). *Φοβίες και άγχος στο μάθημα των μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Ατραπός.

Κόσυβας, Γ. (1996). *Η πρακτική του ανοιχτού προβλήματος στο δημοτικό σχολείο, γόνιμος χαρακτήρας και ανατροπή των παγιωμένων αντιλήψεων*, Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Σπανδάγος, Ε. & Σπανδάγου, Ρ. (2003). *Μαθηματικά παράδοξα και μαθηματικά παιχνίδια*. Αθήνα: Αίθρα.

Τουμάσης, Μπ. (1999). *Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των μαθηματικών*. Χαλκίδα: Κωστόγιαννος.

Φερεντίνος, Σ. (2005). *Μαθηματικά. Αγάπη ή φόβος; Ψυχολογικές λειτουργίες των μαθηματικών στην εκπαίδευση*. Χαλκίδα: Κωστόγιαννος.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2001). *Κείμενα Παιδείας: Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Ατραπός.