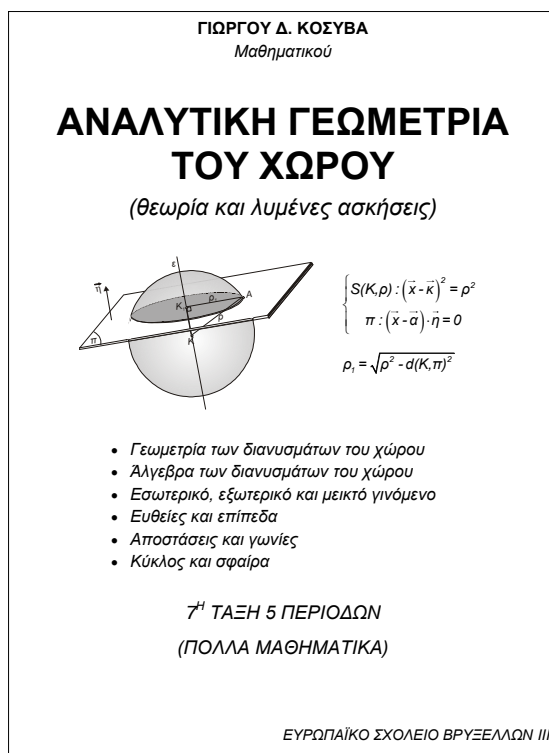


“Αναλυτική Γεωμετρία του Χώρου”



Το εν λόγω βιβλίο αποτελεί αυτοέκδοση. Δεν αποτελεί βοήθημα με ασκήσεις εκγύμνασης όπως τα συνήθη του εμπορίου, αλλά είναι ένα σύγχρονο βιβλίο, επιστημονικά και διδακτικά μελετημένο. Περιέχει εκτενή βιβλιογραφία, αναπτύσσει πλήρως τη θεωρία και απευθύνεται σε μαθηματικούς, φοιτητές και μαθητές.

Το εν λόγω έργο είναι διδακτικό βιβλίο 337 σελίδων που πραγματεύεται την ύλη των εξετάσεων του Ευρωπαϊκού Μπακαλορεά και απευθύνεται κατά βάση στους μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων του Ευρωπαϊκού Σχολείου (έκτη και εβδόμη τάξη). Η ύλη που αναπτύσσεται δεν διδάσκεται στα Λύκεια της ημεδαπής. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί να από τους φοιτητές του πρώτου και δεύτερου έτους του Πολυτεχνείου και των Πανεπιστημίων (κυρίως των θετικών επιστημών).

Το βιβλίο πραγματεύεται την ομορφιά της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Σήμερα η Αναλυτική Γεωμετρία είναι βασικός κλάδος του μαθηματικού στερεώματος με ποικίλες εφαρμογές στις επιστήμες του σύγχρονου κόσμου. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία μελετά τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων με τη θεώρηση απλών σχέσεων που συσχετίζουν τα μέρη των σχημάτων. Η προσέγγιση αυτή, που χρησιμοποιεί ως μέθοδο επαλήθευσης την αποδεικτική διαδικασία, αποκαλείται συχνά και ως «συνθετική γεωμετρία». Η Αναλυτική Γεωμετρία

του επιπέδου και του χώρου συνδυάζει την εποπτεία και το γεωμετρικό συλλογισμό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τις αλγεβρικές μεθόδους.

Παρότι οι απαρχές της Αναλυτικής Γεωμετρίας βρίσκονται στις εργασίες των Ελλήνων γεωμετρών της Αλεξανδρινής περιόδου, η θεμελίωσή της οφείλεται στον φιλόσοφο και μαθηματικό Rene Descartes (1596-1650), ο οποίος με το έργο του *La Géométrie* μετέφερε όλο το πεδίο της κλασικής γεωμετρίας στην οπτική των αλγεβριστών και συνέβαλε στη δημιουργία ενός νέου μαθηματικού κλάδου της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Έτσι διεύρυνε τις δυνατότητες εφαρμογής τους Άλγεβρας. Μια ευθεία ή μια καμπύλη μπορούν να θεωρηθούν ως σημειοσύνολα, τα οποία βρίσκονται απείρως κοντά τοποθετημένα μεταξύ τους. Τα σημεία αυτά μπορούν να συσχετιστούν με τη βοήθεια μιας εξίσωσης, η οποία εξαρτάται από τη φύση της γραμμής. Η Αναλυτική Γεωμετρία έχει ως αντικείμενο τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων με τη βοήθεια αλγεβρικών μεθόδων ή ακριβέστερα την αναγωγή τους σε προβλήματα της Άλγεβρας.

Η μέθοδος των συντεταγμένων είναι η θεμελιώδης ανακάλυψη, που οφείλει την προέλευσή της στον Descartes και σηματοδότησε την ανάπτυξη της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Είναι η μέθοδος που μας επιτρέπει να ορίσουμε τη θέση ενός σημείου, σχήματος ή στερεού σώματος με πραγματικούς αριθμούς ή άλλα σύμβολα. Η υιοθέτηση συστημάτων αναφοράς και οι διατεταγμένες τριάδες αριθμών με τις οποίες ορίζεται η ακριβής θέση σημείων ή υλικών σωμάτων στον τρισδιάστατο χώρο ονομάζονται συντεταγμένες των σημείων και συμβάλλουν στην «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας, δηλαδή στη μελέτη των γεωμετρικών αντικειμένων με αλγεβρικές μεθόδους.

Η διανυσματική ανάλυση είναι ένα εργαλείο πολύ σημαντικό για την περιγραφή διαφορετικών εννοιών. Στην αρχή ο διανυσματικός λογισμός χρησίμευσε στην περιγραφή φυσικών φαινομένων. Σήμερα τα διανύσματα χρησιμοποιούνται σε πληθώρα καταστάσεων. Με την επινόηση της άλγεβρας των διανυσμάτων η μέθοδος των συντεταγμένων και γενικότερα οι αναλυτικές μέθοδοι αποκτούν κομψότητα και αυστηρότητα και βρίσκουν γόνιμο πεδίο εφαρμογής στο διανυσματικό λογισμό εμπλουτίζοντας τις προσεγγίσεις. Ως συνισταμένη των προηγούμενων μορφοποιείται η σύγχρονη προσέγγιση της Αναλυτικής-Διανυσματικής Γεωμετρίας.

Η ιδιαιτερότητα του μαθήματος των Μαθηματικών 5 περιόδων την εβδομάδα στις δύο τελευταίες τάξεις των Ευρωπαϊκών σχολείων αποδίδει στην Αναλυτική Γεωμετρία βαρύνουσα σημασία αναδεικνύοντας δύο κύριους στόχους:

- Ο πρώτος στόχος είναι ότι αποτελεί μέσο έρευνας για την ανάπτυξη των ίδιων των μαθηματικών ή την καλλιέργεια της γεωμετρικής σκέψης και,
- Ο δεύτερος ότι αποτελεί εργαλείο μάθησης στην υπηρεσία άλλων επιστημών.

Έτσι από τη μια πλευρά τα μαθήματα της Αναλυτικής Γεωμετρίας της έκτης και της εβδόμης επιδιώκουν να καταστήσουν τους μαθητές ικανούς όχι να απορροφούν παθητικά ετοιμοπαράδοτες γνώσεις, αλλά να κατανοούν και να επινοούν μαθηματικές ιδέες και να επιχειρηματολογούν με ακρίβεια και λογική συνοχή στην επιστημονική γλώσσα να θέτουν ερωτήματα ή προβλήματα και να καταγίνονται με την επεξεργασία ή τη σύνθεση των λύσεων. Γίνονται μικροί ερευνητές που υπερβαίνουν τα γνωστικά εμπόδια και προάγουν το επιστημονικό πνεύμα.

Από την άλλη πλευρά οι μαθητές συμπλέουν σε ένα ταξίδι με διεπιστημονικές προεκτάσεις όπου τα μαθηματικά έχουν ένα τεράστιο εύρος εφαρμογής σε όλους τους τομείς της κοινωνικο-οικονομικής ζωής και του πολιτισμού. Έτσι θα τους είναι απαραίτητα όταν θα φοιτήσουν στο πανεπιστήμιο.

Τα προαναφερόμενα ισχύουν και για τον ειδικό κλάδο των μαθηματικών, την Αναλυτική Γεωμετρία, που στην παρούσα εργασία με τίτλο «ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ» σκιαγραφούμε μόνο ένα μικρό μέρος τους. Παιδαγωγικοί μας στόχοι για αυτά τα μαθήματα είναι η συσχέτιση των νέων μαθηματικών εννοιών με τις προϋπάρχουσες γνώσεις και η ανάπτυξη της αυτονομίας όλων των μαθητών, ακόμη και αυτών που έχουν μαθησιακά κενά. Η ενεργητική ανακάλυψη της γνώσης δεν εξασφαλίζει μόνο την επιτυχία στις εξετάσεις, αλλά επιπλέον θέτει τις βάσεις για τη διαμόρφωση της μαθηματικής σκέψης τους.

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με σκοπό να προσφέρει στους μαθητές που φοιτούν στις δύο τελευταίες τάξεις των Ευρωπαϊκών σχολείων τις έννοιες και τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας του τρισδιάστατου χώρου, η οποίες προσδιορίζονται από το επίσημο Αναλυτικό πρόγραμμα. Κατά βάση η ύλη περιλαμβάνει: σημεία, ευθείες, επίπεδα, σφαίρες και τις μεταξύ τους σχέσεις. Προεξάρχουσα θέση στη σύγχρονη προσέγγιση των εννοιών της Αναλυτικής Γεωμετρίας έχουν τα διανύσματα. Η έννοια του διανύσματος είναι θεμελιώδης και χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη των επόμενων εννοιών της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Το εσωτερικό, το εξωτερικό και το μεικτό γινόμενο, και γενικότερα το σύνολο του διανυσματικού λογισμού αναδεικνύονται ως τα βασικά εργαλεία για την προσέγγιση της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Η κατανόηση της ύλης της Αναλυτικής Γεωμετρίας του Χώρου και η συνακόλουθη επιτυχία στις εξετάσεις του Ευρωπαϊκού Απολυτηρίου, προαπαιτούν την καλή κατοχή των μαθηματικών γνώσεων που διδάχτηκαν στις προηγούμενες τάξεις και τη μεταφερσιμότητά τους σε νέες καταστάσεις. Απαραίτητες είναι οι γνώσεις που προέρχονται από τα ακόλουθα μαθηματικά πεδία:

- Ευκλείδεια Γεωμετρία του χώρου.
- Διανυσματικός λογισμός.
- Αναλυτική Γεωμετρία των δύο διαστάσεων.
- Τριγωνομετρία.
- Γραμμική Άλγεβρα.
- Άλγεβρικός λογισμός.

Αν υπάρχουν κενά ή δυσκολίες κατανόησης στα προηγούμενα πεδία η προσφυγή στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων κρίνεται αναγκαία. Στην παρούσα εργασία καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια ώστε η παρουσίαση των εννοιών να είναι σαφής και διεξοδική και προπάντων κατανοητή από το μαθητή. Η ύλη του παρόντος εγχειριδίου, διαρθρώνεται σε πέντε κεφάλαια στα οποία έχουν ενσωματωθεί επιλεγμένα θέματα εξετάσεων ΒΑC προηγούμενων ετών, τα οποία δόθηκαν στο Ευρωπαϊκό σχολείο. Περιέχει τρία συστατικά μέρη: τα μαθήματα θεωρίας, τις λυμένες ασκήσεις και τις άλυτες ασκήσεις.

Τα μαθήματα θεωρίας: Επιδεικνύουν σεβασμό στο πλαίσιο των γενικών επιδιώξεων του Αναλυτικού προγράμματος των Ευρωπαϊκών σχολείων. Καταβλήθηκε προσπάθεια να δοθούν οι βασικές έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας, χωρίς περιττές μαθηματικές λεπτομέρειες ή αυστηρό συμβολισμό έτσι ώστε να διευκολυνθεί η ανάπτυξη της διαίσθησης των μαθητών. Δίνεται ιδιαίτερη σημασία στις προαπαιτούμενες γνώσεις οι οποίες θα επιτρέψουν σε κάθε μαθητή να προσεγγίσει αποτελεσματικά τη μελέτη των νέων εννοιών. Όλες οι έννοιες αναπτύσσονται αναλυτικά με κατάλληλες εξηγήσεις και πρόσφορα παραδείγματα, απλά και εύστοχα, που ελπίζουμε μαζί με τη μαθηματική συζήτηση στην τάξη θα ευνοήσουν τον σχηματισμό μαθηματικών παραστάσεων στη σκέψη των παιδιών.

Οι λυμένες ασκήσεις: Μια ιδιαιτερότητα που χαρακτηρίζει τον κλάδο της Αναλυτικής Γεωμετρίας είναι η τεράστια ποικιλία μεθόδων. Οι αντιπροσωπευτικές ασκήσεις και τα λυμένα προβλήματα εισάγουν τους

μαθητές στην επιχειρηματολογία και την ειδική μεθοδολογία που βοηθά στη λύση ασκήσεων διαφόρων κατηγοριών. Οι ασκήσεις που παρατίθενται είναι πολυάριθμες και πλούσιες, ταξινομημένες κατά θέματα και εμφανίζουν αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας. Υπάρχουν ποικίλες ασκήσεις τόσο άμεσης εφαρμογής των μαθημάτων όσο και άλλες που κινούνται στη στάθμη που απαιτούν οι εξετάσεις του Ευρωπαϊκού Απολυτηρίου. Ανταποκρίνονται σε όλα τα επίπεδα ικανοτήτων των μαθητών και ενδείκνυται για τη διαφοροποίηση της μαθησιακής διαδικασίας. Με τις λυμένες ασκήσεις οι μαθητές μπορούν να εργαστούν χωρίς άγχος, να διευκολυνθούν στη σύνταξη της δικής τους λύσης και να τις συγκρίνουν με τα δικά τους συμπεράσματα. Επαληθεύοντας την ενδιαφέρουσα προσπάθειά τους αναπτύσσουν ωφέλιμες και γόνιμες εμπειρίες και ικανότητες που συμβάλλουν στην αυτοδιόρθωση και την αυτοαξιολόγησή τους. Είναι καλύτερα οι μαθητές να επιχειρήσουν να λύσουν μόνοι τους τις λυμένες ασκήσεις. Αν δεν μπορούν να τα καταφέρουν, τότε πρέπει να καταπιαστούν πιο συστηματικά με τη θεωρία και να συμπληρώσουν πρώτα τα κενά και τις ελλείψεις που ίσως υπάρχουν. Μόνο αν συναντήσουν ανυπέρβλητες δυσκολίες και εξαντλήσουν κάθε περιθώριο προσπάθειας μπορούν να καταφύγουν στην ανάγνωση του τμήματος της λύσης που τους χρειάζεται για να συνεχίσουν μόνοι.

Οι άλυτες ασκήσεις: Κάθε ενότητα συνοδεύεται με άλυτες ασκήσεις, οι οποίες επιζητούν την αυτενέργεια των μαθητών. Είναι πολυάριθμες και επιπλέον δίνουν στο διδάσκοντα, κάθε σχολική χρονιά και ανάλογα με τη γνωστική υποδομή των μαθητών, μεγάλη ελευθερία επιλογών. Οι περισσότερες ασκήσεις συνοδεύονται με απαντήσεις και έτσι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να επαληθεύουν την ορθότητα του αποτελέσματος.

Προτείνεται η προσεκτική μελέτη της θεωρίας και η επιχειρηματολογία που αναπτύσσεται διεξοδικά στα παραδείγματα και στις υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις. Η γνώση μόνο των τυποποιημένων συμπερασμάτων και η εφαρμογή τους με μορφή «ετοιμοπαράδοτων συνταγών» δεν οδηγούν στα καλύτερα αποτελέσματα. Το αντίθετο μάλιστα: παγιώνουν την αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι μόνο απομνημόνευση και κανόνων και χειρισμός τυπικών τεχνικών. Έτσι χάνεται το βαθύτερο νόημα των εννοιών, η ομορφιά των μαθηματικών στεγνώνει και μαζί εξαχνώνεται και η χαρά της προσωπικής δημιουργίας. Γιατί ισχύουν οι κανόνες και οι τύποι με την ποικιλία των συμβόλων; Πώς ανακαλύφθηκαν; Πώς λύνεται ένα ανοιχτό ή ασυνήθιστο πρόβλημα που δεν ταιριάζει σε κανέναν από τους γνώριμους τύπους; Τι πρέπει να κάνει ο μαθητής για να επινοήσει πρωτότυπες λύσεις;