

Η μέθοδος λύσης του ανοιχτού προβλήματος

Γιώργος Κόσυβας, Βαρβάκειο Πειραματικό Λύκειο
gkosyvas@yahoo.com

Εισαγωγή

Πρόβλημα είναι κάθε περίπλοκη κατάσταση, κάθε προβαλλόμενο εμπόδιο που ανακόπτει την ομαλή πορεία και πρέπει να αρθεί. Η λύση δεν είναι προφανής ή εύκολη, αλλά κατά βάση υπάρχει διέξοδος. Τα μαθηματικά προβλήματα είναι προτάσεις που παρουσιάζουν μικρότερες ή μεγαλύτερες αντιξοότητες και δυσχέρειες και η λύση τους απαιτεί κατάλληλους συλλογισμούς και συνδυασμούς εμπειριών και γνώσεων, που δίνονται με νέο τρόπο. Αν ο μαθητής αναγνωρίσει άμεσα έναν προδιαγεγραμμένο τρόπο για την ολοκλήρωση της εργασίας τότε πρόκειται για άσκηση ρουτίνας και όχι για πρόβλημα. Συνήθως είναι λεκτικά διατυπωμένα, αλλά μερικές φορές προέρχονται μέσα από εικόνες ή προσφέρονται με εικονιστική μορφή και μοιάζουν με γρίφους. Κατά κανόνα είναι πιο δύσκολα από τις συνήθεις εργασίες της καθημερινής σχολικής πραγματικότητας.

Η διδακτική προσέγγιση της πλειονότητας των μαθηματικών εννοιών επιτυγχάνεται καλύτερα μέσα από τη λύση προβλημάτων. Η λύση μαθηματικών προβλημάτων είναι ένα αποτελεσματικό μέσο για το ξεδίπλωμα του μαθηματικού συλλογισμού των παιδιών και την απόκτηση γνώσεων (Lerch 2004). Απαιτεί την ενεργητική εμπλοκή του μαθητή, τη θερμή αποδοχή μιας ανοιχτής πρόκλησης που συνεπάγεται την κινητοποίηση της φαντασίας και τη δημιουργική χρήση των γνώσεών του. Όταν οι μαθητές και οι μαθήτριες λύνουν προβλήματα, επιστρατεύουν και σφυρηλατούν τις γνώσεις που χρειάζονται πραγματικά, εφευρίσκουν στρατηγικές και ερευνούν τρόπον τινά όπως οι ερευνητές μαθηματικοί (Brown 1997). Έτσι μπορούν να βρεθούν στην προβληματική κατάσταση του ερευνητή αποκτώντας γνήσια μαθηματικά βιώματα. Η λύση μαθηματικών προβλημάτων είναι πηγή και κριτήριο της γνώσης (Vergnaud, 1986), είναι η καρδιά της μαθηματικής δραστηριότητας. Τα προβλήματα προσφέρουν νέα ερεθίσματα και η λύση τους επιβεβαιώνει τις κατακτηθείσες γνώσεις και όχι απλώς τυπικά όπως η λύση ασκήσεων, αλλά ουσιαστικά και περιεκτικά, συμβάλλοντας στην ανάπτυξη νέων μαθηματικών ιδεών και βελτιώνοντας την κατανόηση.

Τα στάδια που πρέπει να διανυθούν για την επίλυση ενός προβλήματος είναι σε γενικές γραμμές τα ακόλουθα: η κατανόηση της διατύπωσης του προβλήματος, η κατάστρωση ενός σχεδίου λύσης του προβλήματος (εύρεση της σωστής σχέσης ανάμεσα στα δεδομένα και τα ζητούμενα), η εκτέλεση του σχεδίου (σωστός υπολογισμός του ζητούμενου) και τέλος ανασκόπηση και επαλήθευση (Polya, 1991).

Αν ο αριθμητικός υπολογισμός βάσει του προαναφερόμενου σχήματος καθώς και η επαλήθευση της λύσης απαιτούν τυπικές γνώσεις που οι μαθητές υποτίθεται ότι έχουν αποκτήσει, η κατανόηση του προβλήματος και η συνακόλουθη μαθηματικοποίηση είναι απρόβλεπτες νοητικές λειτουργίες που δεν μπορούν να διδαχθούν όπως η εκτέλεση ενός πολλαπλασιασμού ή μιας διαίρεσης. Από αυτές τις συχνά πρωτότυπες και οπωσδήποτε δημιουργικές λειτουργίες εξαρτάται και η επιλογή των σωστών πράξεων που πρέπει να εκτελεστούν.

Η αναγκαιότητα του τέταρτου σταδίου, της αναδρομικής διερεύνησης και επαλήθευσης, πρέπει να γίνει κατανοητή στην πορεία της διδασκαλίας, ακόμη και όταν πρόκειται απλώς για συνήθεις ασκήσεις. Η επαλήθευση είναι ένας αυτοέλεγχος που διασφαλίζει τον μαθητή επιβεβαιώνοντας ότι διέτρεξε σωστά όλα τα στάδια. Συνιστά και η ίδια μια μαθησιακή διαδικασία με αυτοτελή αξία. Αν ο μαθητής δεν μπορεί με τη διαδικασία επαλήθευσης, να επιβεβαιώσει τη λύση και να την υποστηρίξει με επιχειρήματα, για τον καθηγητή είναι σαν να μην

έλυσε το πρόβλημα, ακόμη και αν η προτεινόμενη τελική λύση είναι σωστή, ή έλυσε το πρόβλημα τυχαία. Το ενδιαφέρον του διδάσκοντος είναι τότε κυρίως διαγνωστικό, καθώς πρέπει να ανακαλύψει που έγκειται η αδυναμία του παιδιού, δηλαδή σε πιο στάδιο απέτυχε. Ο μαθητής με τη σειρά του πρέπει να συνειδητοποιήσει, μόνος του μέσω της επαλήθευσης ή σε συνεργασία με τον εκπαιδευτικό, τις γνωστικές του ανεπάρκειες σε ένα ή σε περισσότερα στάδια (Margolinas, 1993).

Τα πιο απλά προβλήματα δεν διαφέρουν πολύ από τις ασκήσεις εφαρμογής. Τα δεδομένα είναι προφανή και ο υπολογισμός του ζητούμενου προκύπτει από τη διατύπωση ως αυτονόητη μετάφραση της περιγραφόμενης κατάστασης. Τα πιο δύσκολα προβλήματα απαιτούν συνδυασμό πολλών γνώσεων και δεν έχουν γενικούς κανόνες επίλυσης. Η διατύπωση δεν περιέχει τις λέξεις-κλειδιά που οδηγούν τον λύτη στην επιλογή της σωστής πράξης. Η μαθηματική μαθησιακή διαδικασία αποκτά νόημα μέσα από τη λύση ανοιχτών προβλημάτων. Στο *Βιβλίο Εκπαιδευτικού της Πρώτης Γυμνασίου* γίνεται αναφορά στα λεγόμενα ανοιχτά προβλήματα. «Γενικά θα ονομάζουμε ανοιχτό το πρόβλημα που μπορεί να ερμηνευτεί με πολλούς τρόπους και επομένως δέχεται διαφορετικές λύσεις» (σ. 33). Στα «ανοιχτά προβλήματα» οι μαθητές δεν κατανοούν αμέσως ποια είναι τα δεδομένα και πού πρέπει να στηριχθούν για να βρουν το ζητούμενο. Συχνά πρέπει να επιδοθούν σε μια ερευνητική δραστηριότητα και να βρουν τη λύση μετά από πολλαπλές δοκιμές, αιτιολογήσεις εικασιών και πρωτότυπους συλλογισμούς. Τα ανοιχτά προβλήματα είναι τα πιο ενδεδειγμένα για ομαδική δραστηριότητα (Charney 1993, Arzac & Mante, 2007, Κόσσυβας 1996). Μέσω της ανάθεσης ενός ανοιχτού προβλήματος για ομαδική επίλυση οι μαθητές μπορούν να σκέφτονται και να θέτουν οι ίδιοι εικασίες και ερωτήματα που επιδέχονται μαθηματική απάντηση. Σύμφωνα πάλι με το ίδιο *Βιβλίο Εκπαιδευτικού*, «Το να δίνουμε μερικές φορές, στους μαθητές μας ανοικτές δραστηριότητες αντί για ασκήσεις των δύο ή τριών λεπτών, είναι ένα βήμα προς τη μεταφορά της υπευθυνότητας της διαδικασίας της μάθησης από το δάσκαλο στο μαθητή» (σ. 33). Μέσα στο προαναφερόμενο πλαίσιο, αναθέσαμε ένα ανοιχτό πρόβλημα για ομαδοσυνεργατική λύση για να εξετάσουμε ποιες επιτυχίες στρατηγικές επινοούν οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου αλλά και τις δυσκολίες που συναντούν.

Το διδακτικό πείραμα

Οι 26 μαθητές ενός τμήματος του 1^{ου} Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών κατά τη διάρκεια της φοίτησής τους στην Α΄ (2008-09) ήρθαν σε συστηματική διδακτική επαφή με διδασκαλία μαθηματικών εννοιών μέσω της λύσης προβλημάτων. Με κύριο στόχο τη διερεύνηση της αναλογίας δώσαμε το ακόλουθο πρόβλημα:

Δύο άραβες Α και Β οι οποίοι ταξίδευαν στην έρημο, είχαν 2 ψωμιά ο ένας και 3 ο άλλος. Κατά τη διάρκεια του ταξιδιού τους συνάντησαν ένα πλούσιο ταξιδιώτη Γ, ο οποίος πεινούσε. Αφού έφαγαν μαζί, ο ταξιδιώτης τους άφησε 15 λίρες. Πώς θα έπρεπε να κάνουν τη μοιρασιά;

Η διάρκεια του πειραματισμού ήταν δύο συνεχόμενες διδακτικές ώρες. Ο μαθητές συνεργαζόμενοι στις ομάδες αντάλλαξαν διαφορετικές ιδέες, παρήγαγαν πολλαπλές λύσεις που υποστήριζαν σε ολόκληρη την τάξη. Η λύση απαιτεί αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς ή κλάσματα και την έννοια της αναλογίας. Η επιλογή στρατηγικής εξαρτάται από παράγοντες που συνδέονται με τον τύπο του προβλήματος και τις σχέσεις που εξαρτώνται από τα αριθμητικά δεδομένα (Kaputt & West 1994, Lamou, 1994). Παρότι αρχικά το πρόβλημα μοιάζει με πρόβλημα ρουτίνας, η εκφώνηση το καθιστά ελκυστικό. Αρχικά το πρόβλημα φαίνεται δύσκολο. Παρουσιάζουμε σύντομα τις λύσεις των ομάδων.

Πρώτη σύνταξη (σε διαφάνεια): Οι μαθητές της ομάδας θεώρησαν ότι τα χρήματα έπρεπε να μοιραστούν εξίσου μεταξύ των Α και Β. Έγραψαν: «Δίκαιη μοιρασιά! Λοιπόν 7,5 ο ένας και 7,5 ο άλλος». Είναι φανερό ότι προέβησαν σε μια ακατάλληλη και λανθασμένη αναπαράσταση του προβλήματος. Κατά τη διάρκεια της συζήτησης πολλοί μαθητές διατύπωσαν το

επιχείρημα: «Ο Β έδωσε περισσότερο ψωμιά από τον Α. Γιατί θα έπρεπε να πάρουν το ίδιο χρηματικό ποσό;». Η συζήτηση ήταν πλούσια και οδήγησε στην έννοια της αναλογίας.
Δεύτερη σύνταξη (τρεις διαφάνειες) : Θεώρησαν ότι οι Α και Β έπρεπε να μοιραστούν τις λίρες όχι εξίσου αλλά ανάλογα με τα ψωμιά που είχε ο καθένας. Παρουσιάζουμε δύο λύσεις. Οι άλλες είναι παρόμοιες:

ΟΜΑΔΑ 5

Κατασκευάζουμε ένα πίνακα αναλογίας:

| | | |
|----------------|---------|---|
| | A και B | A |
| Αριθμός ψωμιών | 5 | 2 |
| Αριθμός λιρών | 15 | x |

Έχουμε : $5 \times x = 15 \times 2$ ή $5 \times x = 30$.
 Επομένως ο Α θα πάρει : $x = 30 : 5 = 6$ λίρες.
 Και ο Β : $15 - 6 = 9$ λίρες.

ΟΜΑΔΑ 3

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.

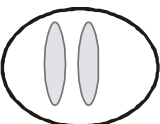
Τα 5 ψωμιά κάνουν 15 λίρες.
 Το 1 ψωμί κάνει $15 : 5 = 3$ λίρες.
 Τα 2 ψωμιά του Α κάνουν $2 \times 3 = 6$ λίρες.
 Τα 3 ψωμιά του Β κάνουν $3 \times 3 = 9$ λίρες.
 Επαλήθευση : $6 + 9 = 15$ λίρες.

Κατά τη διάρκεια της συζήτησης οι μαθητές συζήτησαν τη σωστή εφαρμογή της αναλογίας. «Χρησιμοποίησαν ανάλογα ποσά για τα ψωμιά που είχαν και όχι για τα ψωμιά που έδωσε ο καθένας. Είναι λάθος». Διαπιστώσαμε ότι η εμφάνιση λαθών έδωσε ενδιαφέρον στη συζήτηση.

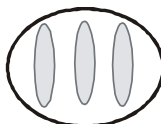
Τρίτη σύνταξη (μία διαφάνεια): Πρώτα πρέπει τα ψωμιά να τα μοιραστούν εξίσου οι Α, Β και Γ και τις λίρες να τις μοιραστούν αναλογικά οι Α και Β (σύμφωνα με την ποσότητα του ψωμιού που έδωσαν στον Γ).

ΟΜΑΔΑ 2

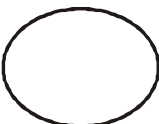
A



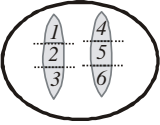
B



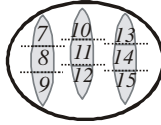
C



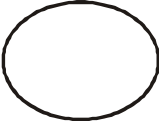
A



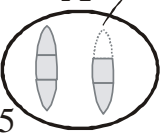
B



C

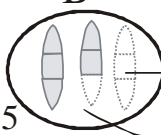


A



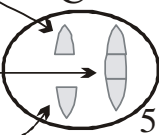
5

B



5

C



5

Στο σχέδιο μετρήσαμε 15 κομμάτια ψωμί, δηλαδή ο καθένας έπρεπε να φάει 5 κομμάτια. Ο Α είχε 6 κομμάτια. Κράτησε τα 5 και έδωσε 1 στον Γ. Ο Β είχε 9 κομμάτια. Κράτησε τα 5 και έδωσε 4 στον Γ. Ο Γ πήρε συνολικά 5 κομμάτια, 1 από τον Α και 4 από τον Β ($1+4=5$). Ο Γ για τα 5 κομμάτια ψωμί πλήρωσε 15 λίρες, δηλαδή 3 λίρες για κάθε κομμάτι. Επομένως ο Α πούλησε 1 κομμάτι και πήρε 3 λίρες και ο Β πούλησε 4 κομμάτια και πήρε $4 \times 3 = 12$ λίρες.

Η λύση που βρέθηκε από την ομάδα ήταν η πιο κατανοητή και η πιο πειστική. Κατά το κόσκινο στην ολομέλεια της τάξης ορισμένοι μαθητές αμφισβήτησαν την καταμέτρηση πάνω στο σχήμα: «Αντί να μετράμε όπως στην πρώτη δημοτικού μπορούμε να υπολογίσουμε: Μοιράζουμε τα ψωμιά του καθενός σε 3 ίσα μέρη. Ο Α έχει $2 \times 3 = 6$ και ο Β έχει $3 \times 3 = 9$. Συνολικά υπάρχουν $6 + 9 = 15$ κομμάτια ψωμί και για τους τρεις. Ο καθένας έφαγε $15 : 3 = 5$ κομμάτια. Ο Α

έδωσε $6-5=1$ και ο Β $9-5=4$ κτλ. ». Οι Resnick & Singer (1993) υποστήριξαν ότι βασικές έννοιες των μαθηματικών, όπως είναι οι λόγοι και οι αναλογίες, μπορούν να αναπτυχθούν με επιτυχία μόνο όταν στηρίζονται στις άτυπες γνώσεις των μαθητών. Οι έννοιες του λόγου και της αναλογίας εντάσσονται στις πολλαπλασιαστικές δομές και σχηματίζονται σε αλληλεπίδραση με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση (Lo & Watanabe 1997, Hart, 1988). Προτού ακόμα τα παιδιά διδαχτούν αυτές τις έννοιες, διαθέτουν ήδη ένα πλούσιο ρεπερτόριο στρατηγικών.

Τέταρτη σύνταξη (μια διαφάνεια) : Έκαναν τη διαίρεση $5:3$ αλλά ήταν αδύνατο να βρουν ένα δεκαδικό αριθμό με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων. Η περιοδικότητα $5:3=1,666\dots$ ήταν ένα μεγάλο εμπόδιο.

Μαθητής: - Μπορούμε να στρογγυλοποιήσουμε και να το κάνουμε $1,7$;
Εκπαιδευτικός: - Θα μπορούσες να σκεφτείς λίγο περισσότερο.

Κατά τη συζήτηση ένας μαθητής έδωσε την ακόλουθη λύση (αναγωγή στη μονάδα):

Τα $5/3$ των ψωμιών (Γ) κάνουν 15 λίρες .

Το $1/3$ του ψωμιού (που ο Α έδωσε στον Γ) κάνει $15:5=3$ λίρες.

Τα $4/3$ των ψωμιών (που ο Β έδωσε στον Γ) κάνουν $4 \times 3=12$ λίρες.

Η αναγωγή στη μονάδα θεωρείται από τους Nesher & Sukeinik (1991) μια πολύ καλή μέθοδος επειδή περιέχει τη σημασία του διαμερισμού που βοηθά στην εννοιολογική κατανόηση του λόγου. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, οι μαθητές βρίσκουν πρώτα την τιμή της ενός αντικειμένου και ύστερα την τιμή πολλών ομοειδών αντικειμένων. Είναι αποτελεσματική όταν η τιμή του ενός αντικειμένου είναι ακέραιος αριθμός, ενώ η αναγωγή στην κλασματική μονάδα λειτουργεί ανασχετικά, και οδηγεί σε αδιέξοδο όταν τα δεδομένα δεν οδηγούν σε μια ακέραιη τιμή της μονάδας.

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης φανερώνουν ότι δύο ομάδες μαθητών έλυσαν σωστά το πρόβλημα. Οι υπόλοιπες ομάδες επέδειξαν λανθασμένες αναπαραστάσεις του προβλήματος. Τρεις ομάδες χρησιμοποίησαν λανθασμένη αναλογία “για τα ψωμιά που είχαν και όχι για τα ψωμιά που έδωσε ο καθένας”, και μια ομάδα προέβη σε “δίκαιη μοιρασιά των λιρών”. Παρότι οι περισσότεροι μαθητές δεν ήταν σε θέση να επινοήσουν κατάλληλες στρατηγικές που οδηγούσαν στη λύση του προβλήματος, μπορούσαν να κατανοούν τις λύσεις των συμμαθητών τους. Επιπλέον, προκύπτει ότι οι αιτιολογήσεις διευρύνοντας τη μαθηματική τους σκέψη. Αναμφισβήτητα πρόκειται για μια ενεργητική και πολύπτυχη δημιουργική διαδικασία που υπογραμμίζει ότι μαθηματικά δεν είναι απομνημόνευση μυστηριωδών τύπων και ανατιολόγητων κανόνων, αλλά ότι σημαντικό κάνουν και σκέφτονται οι μαθητές όταν επικοινωνούν μεταξύ τους. Είναι μια ενδιαφέρουσα πρόκληση με άφθονα κίνητρα για τους μαθητές.

Η κατάσταση προβληματισμού που δημιουργήσαμε συνέβαλε στην ανάπτυξη ενεργητικής στάσης και στην ανάδυση σημαντικών ικανοτήτων: Οι μαθητές συγκεντρώνουν, καταγράφουν και πινακοποιούν δεδομένα, εξετάζουν συμπεράσματα, εκφράζουν τα ευρήματα με σχήμα, συμβολίζουν, γενικεύουν, εξηγούν, αιτιολογούν και κοινοποιούν τα ευρήματα. Ανάλογες στάσεις έχουν παρατηρηθεί σε άλλες εργασίες (Brown & Walter, 1983, Silver 1997, English, 1997, Kosyvas, 2005). Οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούσαν να βρίσκουν πρωτότυπες λύσεις, να εφευρίσκουν πολλαπλές στρατηγικές, να επιχειρηματολογούν, να αιτιολογούν, να αναπτύσσουν υπευθυνότητα στην ατομική και συλλογική εργασία. Επιπλέον, μα-

θαίνουν να παρακολουθούν και να κρίνουν τις ιδέες των συμμαθητών τους και να υπερασπίζονται τη δική τους θέση.

Τα ευρήματα αυτής της έρευνας υπογραμμίζουν ότι κατά τη λύση προβλημάτων στην τάξη θα πρέπει να αποδίδεται βαρύνουσα σημασία όχι στις τυπικές αλγοριθμικές διαδικασίες, αλλά στην ανάπτυξη των πρωτότυπων ιδεών και στρατηγικών των μαθητών και μαθητριών. Τα ανοιχτά προβλήματα δίνουν στους μαθητές ευκαιρίες να αναπτύξουν πολλαπλές λύσεις παρά να εφαρμόζουν άκριτα ετοιμοπαράδοτους κανόνες. Όλα αυτά αποδεικνύουν ότι το εν λόγω ανοιχτό πρόβλημα ήταν ένα πρόσφορο μέσο για την καλλιέργεια της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών. Με την οργάνωση τέτοιων δραστηριοτήτων πετυχαίνουμε να καλλιεργούμε την ερευνητική στάση καθώς και τον μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών.

Βιβλιογραφία

- Arsac G., Mante M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.
- Brown S. I. & Walter M. I. (1983). *The art of problem Posing*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.
- Brown S. I. (1997). Thinking like a Mathematician: A Problematic Perspective. For the Learning of Mathematics, **17**(2), 36-38.
- Charnay R. (1993). Problème ouvert problème pour chercher, *Grand N*, **51**, pp. 77-83.
- English L. (1997). Promoting a Problem Posing Classroom, *Teaching children Mathematics*, **3**, pp. 172-179.
- Kaputt J. & West M. (1994) Missing value proportional reasoning: Factors affecting informal reasoning patterns in: Harel G. & Gonfrey J. (eds.) *Multiplicative reasoning*, Albany: State University of New York, pp. 237-292.
- Kosyvas G. (2005). *Une méthode vécue et communicative d'un problème ouvert: Du problème de la duplication du carré dans la méthode socratique du «Menon» de Platon reformulé en problème ouvert avec une expérimentation didactique en classe*, Mémoire non publié, Université Libre de Bruxelles.
- Lamon S. (1994) Ration and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. in: Harel G. & Gonfrey J. (eds.) *Multiplicative reasoning*, Albany: State University of New York, pp. 89-122.
- Lerch C. M. (2004). Control decisions and personal beliefs: their effect on solving mathematical problems, *Journal of Mathematical Behavior*, **23**, 21-36.
- Lo J. Watanabe T. (1997) Developing ration and proportion schemes: A story of a fifth grader, *Journal for Research in Mathematics Education*, **28**, pp.216-236.
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux*, Pensée sauvage, Grenoble.
- Nesher P. & Sukenik M. (1991). The effect of formal representation on the learning of ratio concept, *Cognition and Instruction*, **1**, pp.161-175.
- Resnick L. & Singer J. (1993) Protoquantitative origins of ratio reasoning. In: Carpenter T, Fennema E, Romberg T. (Eds.) *Rational Numbers. An integration of research*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, pp. 107-130.
- Silver E. A. (1997). Fostering Creativity Through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing, *ZDM* **97**(3), pp. 75-80.
- Vergnaud G. (1986), Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, *Grand N*, **38**, 21-40, INRP, IREM de Grenoble.
- Hart K. (1988) *Ratio and proportion* in: Hiebert I. & Behr M. (eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates, v. 2, pp. 198-219.
- Polya G. (1945/1991), *Πώς να το λύσω*, (μτφρ. Ψυακκή Ξ., επιμ. Πατρώνης Τ.), Καρδαμίτσας, Αθήνα.
- Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου (2007). *Βιβλίο Εκπαιδευτικού*, ΟΕΔΒ, Αθήνα.
- Κόσσυβας Γ. (1996). *Η πρακτική του ανοιχτού προβλήματος στο δημοτικό σχολείο, γόνιμος χαρακτήρας και ανατροπή των παγιωμένων αντιλήψεων*, Gutenberg, Αθήνα.