LES STRATÉGIES DES ÉLÈVES D'AUJOURD' HUI SUR LE PROBLÈME DE LA DUPLICATION DU CARRÉ

Georgios KOSYVAS

Professeur de mathématiques à la 1ère école expérimentale d'Athènes, gkosyvas@yahoo.com

Georgios BARALIS

Professeur à l'Université Nationale et Kapodistriène d'Athènes, gmparalis@primedu.uoa.gr

Dans cette étude, nous allons présenter et analyser les stratégies et les arguments d'une classe contemporaine d'élèves âgés de 12 ans environ au cours de la résolution du problème de la duplication du carré, ce qui apparaît pour première fois dans le dialogue platonicien "Ménon". (Ce se trouve en annexe). Parmi les résultats, on peut citer l'erreur classique : « si on double le côté du carré, on double son aire », la stratégie numérique (calcul approximatif du côté du carré et construction de la figure avec un décimètre) et la stratégie géométrique (découpage du carré initial, expérimentation avec des images mentales dynamiques du nouveau carré avec une aire double et construction géométrique avec règle et compas). La confiance d'un groupe d'élèves dans la stratégie géométrique révèle une préférence primordiale à la géométrie. À une époque où la culture géométrique se trouve en déclin, tandis que domine l'arithmétisation excessive, la figure géométrique, comme dans la Grèce ancienne, constitue un cadre pour la production de conjectures fécondes et de preuves variées, et pour le déroulement progressif de la réflexion mathématique des élèves, et il peut aider à l'amélioration de l'enseignement scolaire moderne.

Introduction

Dans ce travail, on va étudier le problème de la duplication du carré. Ce problème est connu du dialogue de Platon *"Ménon"*. L'énoncé de ce problème mathématique, un peu transformé, est le suivant :

Construire un carré avec un côté égal à 2 centimètres et ensuite un deuxième avec une aire double. Quelle est la longueur du côté du carré qui a une aire double de l'aire d'un carré donné avec un côté égal à 2 centimètres ?

Nous avons expérimenté ce problème dans une classe contemporaine avec des élèves de 12 ans. Dans cette étude, l'attention est centrée sur le conflit cognitif entre les élèves et les stratégies de résolution du problème. Avant d'analyser les arguments et les stratégies des élèves de la classe d'aujourd'hui, nous commençons par une approche théorique sur les éléments les plus essentiels qui sont liés au problème de la duplication du carré.

Le fameux problème de "Ménon" et ses aspects didactiques actuels

"Ménon" est un des textes fondateurs de la philosophie de la connaissance et aussi le dialogue où Platon traite l'idée qu'apprendre n'est que se ressouvenir (Théorie des idées et Théorie de la Réminiscence). D'où l'importance centrale de l'épisode avec l'esclave en mesure de résoudre la question de la duplication d'un carré (Platon, 1993). Le fameux dialogue de Socrate dans *"Ménon"* est considéré à juste titre comme la forme exemplaire de la méthode socratique de l'enseignement (Marchive, 2002 ; Pihlgren, 2008).

Au cours des recherches contemporaines, le problème de la duplication du carré révèle la même erreur que dans le dialogue classique de *"Ménon"*. Les élèves de 11-14 ans ont tendance à considérer que, lorsque l'on double la longueur des côtés d'un carré, alors son aire est multipliée par deux. Ce phénomène se caractérise comme une « illusion » de proportionnalité (Brousseau, 1998 ; Modestou et Gagatsis, 2007). Les élèves, bien qu'ils présentent de forts taux de réussite dans la résolution de problèmes proportionnels formels, échouent dans la résolution de problèmes non proportionnels (De Bock et *al.*, 1998). Les erreurs dans la pensée proportionnelle des élèves ne sont pas des phénomènes occasionnels et isolés, mais se répètent de façon systématique et persistante. On les observe dans un large éventail de situations de la vie quotidienne et elles créent des associations erronées chez les élèves. Souvent, les élèves se trompent et traitent machinalement chaque relation numérique comme si elle était proportionnelle sans donner d'importance aux restrictions du problème posé (Freudenthal, 1973). Les élèves ont des difficultés à distinguer les situations proportionnelles et non proportionnelles, de sorte qu'ils utilisent des stratégies proportionnelles pour résoudre des problèmes non proportionnels.

La raison principale pour laquelle les mathématiciens donnent une importance primordiale au dialogue de *"Ménon"* est le fameux problème de l'incommensurabilité ou de l'irrationalité : le côté du carré doublé est incommensurable au côté du carré initial. En d'autres termes le côté et la diagonale du carré sont incommensurables. C'est-à-dire qu'il n'existe aucune unité commune de mesure pour que le côté et la diagonale aient tous les deux des mesures entières ou rationnelles (Thuillier 1985).

La découverte des irrationnels est attribuée aux pythagoriciens et se situe environ au milieu du 4ème siècle avant J. C. Il est probable que les pythagoriciens, en faisant des observations systématiques sur les nombres, ont découvert que toutes les grandeurs n'ont pas de mesure commune. Les Pythagoriciens pensaient que les rapports des distances des nombres géométriques sont des rapports de nombres entiers, c'est-à-dire que les grandeurs ont toujours une mesure commune. Autrement dit, une grandeur pouvait toujours s'écrire comme la fraction d'une autre grandeur. Cette conception fut mise en échec par les Pythagoriciens : il n'existe pas de mesure commune entre la longueur du côté d'un carré et la longueur de la diagonale de ce même carré (Heath, 1981). Bertrand Russel dans son *Introduction à la Philosophie Mathématique*, explique très simplement comment Pythagore a découvert ce qui aujourd'hui est considéré comme la première rupture profonde dans l'histoire des mathématiques : les irrationnels[1]. «*C'est lui (Pythagore) qui s'aperçut de l'existence des incommensurables, et en particuliers de l'incommensurabilité du côté du carré avec la diagonale. Si la longueur du côté est, disons, de 1 cm, le nombre de centimètres de la diagonale est égal à la racine carré de 2 et il semblait que cela n'était d'aucune manière un nombre*». (Russel, 1920/1991, p. 40). Ainsi, il est impossible de compter certaines longueurs si on place de nombreuses longueurs unitaires l'une à côté de l'autre. La procédure de la mesure d'un segment de droite qui est asymètre à l'unité de mesure révèle l'importance de la continuité de la droite (Caveing, 1982). Les grandeurs qui ont une mesure commune sont nommées commensurables (symètres) et celles qui

[1] Aujourd'hui, au cours de l'enseignement, nous soulignons aux élèves que le nombre irrationnel est un nombre qui ne peut pas être calculé ou ne peut s'exprimer en tant que fraction avec des termes entiers. C'est le nombre qui *ne peut pas être dit* (*alogos* ou *arrhétos*). Chez les pythagoriciens, c'était le nombre interdit qu'il *ne fallait pas dire*. La divulgation du secret détruirait la cosmologie pythagoricienne.

n’en ont pas, sont nommées incommensurables (asymètres). En représentant les nombres par un segment de droite, on peut manier les nombres rationnels et irrationnels de la même manière. Le rapport de deux grandeurs mesurées avec la même unité s’appelait « logos » et est proche de la notion actuelle de nombre réel, sans être si abstrait. De plus, il est probable que Pythagore a prouvé le théorème pythagoricien dans le cas particulier du triangle rectangle et isocèle (Maor, 2007). Le problème de la duplication du carré et la découverte de $\sqrt{2}$ renvoie à plusieurs démonstrations déductives (Harris, 1971). Par exemple, pour résoudre ce problème, on peut démontrer que les surfaces de deux carrés sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés ou que le deuxième carré a comme côté la diagonale du premier.

Cette découverte a des implications profondes dans l’évolution des mathématiques. Dans le dialogue de Platon *Théétète* (147c-148d), on trouve pour la première fois le concept de l’incommensurabilité. En Grèce ancienne, le traitement des irrationnels s’est développé avec subtilité[2]. Une autre méthode qui est décrite au livre X des *Eléments d’Euclide* est l’algorithme d’Euclide, connu aussi sous le nom d’anthyphérèse (ou soustraction réciproque) (Le Berre, 2002), en tentant un encadrement des valeurs et en proposant une démarche de détermination de rapport (logos). Cette méthode constitue un critère d’incommensurabilité dans le cas particulier de la diagonale d’un carré avec son côté et un processus de transposition du continu au discret. Il s’agit d’une démonstration qui met en évidence le caractère infini des opérations possibles et, de ce fait, l’impossibilité de trouver un élément ultime qui serait mesure commune (Friedelmeyer, 2001). Il s’agit d’une méthode reconnue pour l’arithmétisation du continu, où la suite infinie des décimales est construite (Courant et Robbins, 1996 ; Toeplitz, 2007). De plus, Eudoxe de Cnide a développé le concept du rapport pour n'importe quelle grandeur. Le livre V des éléments d’Euclide est attribué à Eudoxe.

La notion de nombre irrationnel est en elle-même difficile et cela est lié aux obstacles épistémologiques ou cognitifs qui renvoient aux démonstrations mathématiques (Sirotic et Zazkis, 2007 ; Sierpinska, 1994). Certaines conceptions erronées sont liées à la notion d’infini et au processus de limite qui est considéré comme la source majeure des difficultés. D’après des recherches, les élèves de tous les niveaux ne sont pas capables de définir correctement les concepts de rationnel, d’irrationnel et de nombre réel. Beaucoup d’élèves ne peuvent pas distinguer entre les nombres entiers, rationnels, irrationnels et réels. (Fischbein et *al.*, 1995).

Contrairement à la théorie platonicienne, on pourrait émettre l’hypothèse que les mathématiques, comme les autres créations de la pensée, sont des constructions culturelles qui sont créées par l’homme lui-même. De plus, elles constituent des constructions qui renvoient aux approches modernes, socio-constructivistes, de l’épistémologie des mathématiques, qui considèrent que la connaissance mathématique est une activité sociale humaine qui n’est pas constituée par des vérités éternelles, objectives et absolues, mais provisoires, précaires et

[2] Dans ce dialogue, Théétète décrit à Socrate sa discussion avec Théodore, où ce dernier présente la découverte des irrationnels de $\sqrt{3}$ jusqu'à $\sqrt{17}$ (les symboles mathématiques sont contemporains). Plus précisément dans *Théétète* 147d, il est dit que Théodore a analysé les nombres en distinguant ceux qui sont directement commensurables et ceux qui ne sont commensurables que par leurs carrés, et cela jusqu’au nombre 17, où il se serait arrêté.

incertaines. Dans le cadre de cette conception, on peut garder les avantages de la méthode socratique et surmonter les inconvénients.

Les stratégies et les arguments chez les élèves d'aujourd'hui. Analyse des résultats de l'expérimentation du problème.

Nous avons organisé une situation adidactique (Brousseau, 1998), c'est-à-dire une situation de réflexion, de recherche et de communication dans la classe sans l'intention d'enseigner mais plutôt de susciter l'engagement les élèves à leur activité propre. Nous avons choisi trois temps pour le scénario dans la classe : recherche individuelle, travail en groupe et rédaction des diapositives, débat (Arsac et Mante, 2007 ; Arsac et *al.*, 1992).

Ce problème a été expérimenté le 21 juin 2004 à la première classe hellénique de l'école européenne de Bruxelles III, qui correspond à la 6ème en France (élèves âgés de 12 ans environ). Pour cette expérimentation, nous avons disposé de deux séances consécutives d'une heure. La première a été consacrée à la recherche individuelle et collective et à la composition des diapositives, et le deuxième au débat ouvert en classe. Lors de la première séance, nous avons pris des notes et nous avons considéré les écrits individuels et collectifs. Toute l'expérimentation a été enregistrée sur vidéo et certains épisodes des données produites par les méthodes audiovisuelles sont présentés ici.

Avant l'expérimentation de ce problème, nous nous sommes occupés des quatre autres problèmes ouverts proposés dans la classe. C'est pourquoi les élèves étaient déjà familiarisés avec les problèmes ouverts et le travail en groupe.

Plus précisément, avec ce problème, nous visions les objectifs spécifiques suivants :

- Observer si les enfants commettent l'erreur classique décrite par Platon dans le dialogue de *"Ménon"*. (L'esclave soutient que si on double la longueur du côté du carré, l'aire aura doublé) ;

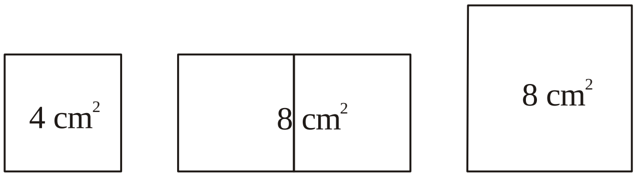
- Voir si les enfants préfèrent une solution arithmétique ou une solution géométrique. Plus précisément, il y a deux stratégies possibles : les enfants, après avoir calculé la longueur du côté du carré en essayant différents calculs ou en calculant la racine carrée de 8, construisent le carré demandé par approximation (stratégie arithmétique) ; les enfants, après avoir séparé le carré en triangles rectangles et isocèles, créent un carré avec les triangles rectangles et isocèles, égaux aux précédents, par essais, tracements ou déplacements (peut-être comme un puzzle). Pour la construction, il suffit de constater que le côté du carré demandé n'est que la diagonale du carré donné (Stratégie géométrique). La longueur du carré peut être trouvée en utilisant un décimètre. En tout cas, les problèmes d'aires relient de manière essentielle le cadre numérique avec le cadre géométrique (Perrin & Douady, 1988).

- Comparer la méthode socratique à la méthode de notre problème (gestion du dialogue, argumentation géométrique ou arithmétique, conflit cognitif, restructuration des connaissances à un niveau plus élevé).

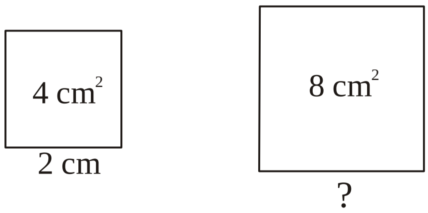
Nous allons maintenant examiner et analyser les stratégies et les arguments de la classe contemporaine des enfants âgés de 12 ans.

L'erreur classique de "Ménon" et des enfants d'aujourd'hui (si on double le côté du carré, on double son aire).

Lorsque nous juxtaposons le carré initial à lui même, nous obtenons la figure d'un rectangle. Le problème de la duplication du carré consiste à construire un carré qui ait une aire égale à celle de ce rectangle (figure ci-dessous). Il s'agit donc de transformer la figure en une autre de même surface, mais carrée. Les dessins ci-dessous sont destines aux lecteurs :



Les élèves doivent trouver un carré d'aire double du carré de 2 cm de côté. En d'autres termes, on pose la question suivante : « Quel est le côté de ce nouveau carré ? ».



Pendant la phase d'investigation du problème dans des groupes, qui a pour objectif la création d'une diapositive collective (première période d'enseignement), au début, la plupart des enfants (de la classe) pensaient que le fait de doubler la longueur du côté du carré, conduit automatiquement à doubler l'aire de ce carré. Sur leurs feuilles individuelles improvisées, il y avait des esquisses de ces premières idées spontanées. Le raisonnement erroné des élèves est semblable au raisonnement de *"Ménon"*. En utilisant les symboles mathématiques contemporains, leur réflexion pourrait être la suivante :

$$\begin{cases} 2\times 2 = 4 & \text{(longueur: juste)} \\ 4^2 = 4\times 4 = 16 \neq 8 & \text{(surface: fausse)} \end{cases}$$

Ils ont tendance à voir partout des relations linéaires et à appliquer la linéarité même dans des situations où cela n'est pas justifié. Ce comportement au début semble spontané et quasi automatique. La présence et la persistance de ce phénomène est appelée « illusion de linéarité » (Van Dooren et *al.* 2004). Au lieu d'appliquer un modèle non linéaire du type $f(x)=ax^2$, ils utilisent incorrectement un modèle de fonction linéaire[3] de type $f(x)=ax$. Une raison possible est que le raisonnement proportionnel (règle de trois) est déjà bien établi et les relations proportionnelles sont enracinées par la force de l'habitude, de l'expérience et de la pratique. Ils ne rencontrent que peu de situations où la linéarité ne fonctionne pas ou de contre-exemples pertinents. De cette façon, l'erreur s'installe et devient acquise. Habituellement, l'erreur est considérée comme un phénomène isolé, réduit presque exclusivement aux faiblesses et aux

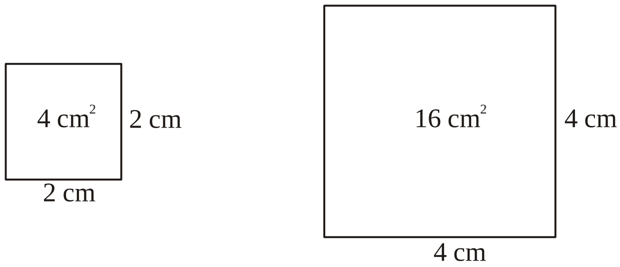
[3] Une fonction linéaire a les propriétés suivantes : $f(a+b)=f(a)+f(b)$ et $f(ka)=kf(a)$. Cette fonction correspond à une situation de proportionnalité et est représentée graphiquement par une droite qui passe par l'origine du repère.

insuffisances de l’élève. Conformément aux interprétations modernes, l’erreur est une forme de connaissance qui a un sens pour l’élève. Elle tient son origine dans le système des connaissances antérieures de l’élève et fonctionne en tant que schéma cognitif affirmé qui fait obstacle à l’acquisition de nouvelles connaissances (Brousseau, 1983).

Dans la classe, une partie du dialogue se déroule de la manière suivante :

PROFESSEUR : *On a les deux derniers groupes. Maintenant on va examiner le travail du groupe A. Voyez la première partie de la diapositive du groupe A. Discutez-en et réfléchissez. Est-ce correct?* (Le travail du groupe A est projeté et tous les élèves de la classe peuvent lire la rédaction du groupe).

De plus, ces idées ont été écrites sur une diapositive :



ENFANTS : *Non. Faux !*

PROFESSEUR : *Non, pas comme ça. Il faut expliquer votre opinion. Discutez et réfléchissez.*

JESSICA : *Moi je pense que la solution que nous voyons sur la diapositive est correcte.*

PROFESSEUR : *C’est-à-dire ?*

JESSICA : *Ils ont construit le carré correctement et ils ont trouvé la longueur de son côté.*

PROFESSEUR : *Combien est la longueur du côté du carré que nous cherchons?*

JESSICA : *4 cm.*

PROFESSEUR : *Qu’est-ce que disent les élèves des autres groupes ?*

ALICE : (Groupe D) *Je ne suis pas d'accord. Ce n'est pas 4 cm le côté du carré que nous demandons.*

PROFESSEUR : *C’est-à-dire ?*

ALICE : (Groupe D) *Nous ne voulons pas construire un autre carré avec un côté double, mais avec une aire double.*

PROFESSEUR : *C’est-à-dire que le groupe A nous dit que si on double le côté, l’aire sera multipliée par 2 ?*

LÉONIDAS : *Non! 16 est le quadruple de 4.*

ALEXANDRA : (Groupe B) *Ils ont multiplié le côté par deux pour trouver l’aire double. Premièrement, il faudrait trouver l’aire et après le côté. Ils ont fait le contraire. Ils ont multiplié chaque côté par 2.*

STERGIOS : (Il explique la diapositive projetée) *Je ne comprends pas. Comment trouvent-ils ici 16 cm² et ici le côté de 2,8 cm.*

PROFESSEUR : *Ils nous expliqueront.*

ENFANTS : (du groupe A) *Nous n’y sommes pas arrivés !*

MARIA : *L’aire n’est pas 16, c’est 8.*

MICHEL : (du groupe A) *Monsieur ce n’est pas la solution !*

PROFESSEUR : *Qui va présenter le travail du groupe ?*

Il est évident que les élèves considèrent que la stratégie précédente est fausse. L’extrait suivant est caractéristique.

STERGIOS : (Il vient pour expliquer). *Sur la première diapositive, ils écrivent le double et sur la deuxième le quadruple.*

MICHEL : (du groupe A) *Tu n'a pas compris. Nous ne présentons pas cela comme une solution. Nous disons que quand on double le côté, la surface est quadruplée. Nous avons écrit sur la diapositive que «L'aire du deuxième carré est le quadruple du premier». La solution correcte c'est la deuxième, pas la première.* (On la présente ci-dessous)

La façon de raisonner de manière proportionnelle s'avère extrêmement forte chez les enfants durant la phase d'examen collectif du problème et peu marquée au cours de la phase de débat dans toute la classe. La discussion entre groupes aide les élèves qui ont fait l'erreur à changer d'avis. Ils constatent que, si nous multiplions par 2 la longueur des côtés du carré, alors l'aire n'est pas multipliée par 2 mais par 4, puisque $2^2=4$, tandis que $4^2=16$. L'erreur classique qui est présentée par Socrate est résolue par l'enseignement même. La progression des élèves exige la compréhension des relations proportionnelles et non proportionnelles et la distinction des situations didactiques qui peuvent être modélisées linéairement ou non.

La stratégie numérique du problème.

La stratégie numérique consiste à traiter les données numériques du problème avec pour but l'arithmétisation de la longueur du côté du carré doublé. Le nombre que les élèves trouvent correspond à la longueur du côté demandé du carré. Après avoir déterminé le côté, ils ont dessiné le carré demandé. Pendant la phase de la recherche individuelle, les enfants ont fait au moins un essai. Certains s'attendaient à trouver un nombre entier. Peut être avaient-ils la conception intuitive que tous les nombres pairs des longueurs sont commensurables (l'hypothèse qui a causé la crise chez les Pythagoriciens). Puisqu'il leur était impossible de trouver un nombre entier ou rationnel (le rapport entre la diagonale et le côté du carré est irrationnel), ils concluaient que le problème n'avait pas de solution.

ÉLÈVE : *Monsieur ! On ne peut pas résoudre ce problème. C'est insoluble.*

PROFESSEUR : *Pourquoi ?*

ÉLÈVE : *Parce que $2\times2=4$ et $3\times3=9$.*

PROFESSEUR : *Donc ?*

ÉLÈVE : *Nous ne trouvons pas 8.*

PROFESSEUR : *Pourquoi ?*

ÉLÈVE : *Il n'y a aucun nombre pour trouver 8. Le problème n'est pas résolu.*

PROFESSEUR : *Discutez avec votre groupe pour trouver une solution. Réfléchissez pour donner une explication.*

Les enfants devaient trouver la longueur du côté du carré avec une aire de 8 cm^2. En utilisant des symboles mathématiques, leurs réponses renvoyaient à la racine carrée de 8 : $\sqrt{8}$. Mais au début la majorité des élèves considéraient que la solution devait être un nombre entier, puisqu'ils avaient la perception primaire intuitive que chaque longueur peut être comptée exactement. On a un obstacle épistémologique qui est lié à l'évolution historique de la notion de l'irrationalité et aux difficultés qu'elle a rencontré (Brousseau, 1983).

La diagonale d'un carré de côté 2 cm a pour longueur $\sqrt{8}$, comme il résulte du théorème de Pythagore. Comme $\sqrt{8}$ n'est pas rationnelle, il y avait une difficulté de percevoir la quantité (Freudenthal, 1967). En d'autres termes, on devait trouver la solution positive de l'équation suivante :

$$x^2 = 8$$

Les enfants ont fait plusieurs essais. Ils ont compris que certains essais pouvaient aboutir à des nombres décimaux. Nous citons quelques exemples qu'ils ont trouvés à l'aide d'une calculatrice :

$$\begin{cases} 2^2 = 4 \\ 3^2 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2,8)^2 = 7,84 \\ (2,9)^2 = 8,41 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2,82)^2 = 7,9524 \\ (2,83)^2 = 8,0089 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2,828)^2 = 7,997584 \\ (2,829)^2 = 8,003241 \end{cases}$$

En faisant des opérations successives consécutives, ils s'étaient approchés de la racine carrée du 8 : $2,8, \quad 2,83, \quad 2,828$. C'est-à-dire :

$$\sqrt{8} \simeq 2,8 \quad \sqrt{8} \simeq 2,83, \ \sqrt{8} \simeq 2,828.$$

Trois des 5 groupes ont écrit une réponse numérique sur la diapositive collective. Les élèves, après avoir calculé la longueur du côté du carré demandé en trouvant une approximation de la racine carrée de 8, ont construit le carré demandé en utilisant le décimètre. Ils se sont contentés d'une valeur approchée, parce que leur travail devait se terminer par une solution arithmétique. Ils ne savaient pas qu'il n'existe pas un nombre décimal fini dont le carré est égal à 8, c'est-à-dire le nombre $\sqrt{8}$. Pour les élèves, la racine carrée n'ayant pas été enseignée, ce n'était qu'un nombre décimal avec un nombre fini de chiffres. Il était impossible de comprendre la différence entre des approximations rationnelles des nombres irrationnels et les irrationnels eux-mêmes (Fischbein et *al.*, 1995). Ils n'avaient pas considéré que la valeur exacte du côté du carré avec une aire double puisse être la racine carrée de 8. Ils disaient qu'il faut trouver la racine carrée de 8 pour qu'ils aboutissent à l'aire. Ainsi, ils ont élaboré des essais de multiplications. Dans les notes improvisées des enfants, il y avait de nombreuses tentatives par essais et erreurs. La discussion s'est poursuivie dans toute la classe : Les points de vue suivants expliquent les stratégies numériques des enfants :

ALICE : *L'aire du premier carré est 4 cm^2 et l'aire du deuxième carré est de 8 cm^2. Il faut donc trouver la racine carrée de 8, et deviner un nombre qui, si on le multiplie par lui-même, nous donne 8.*

MARIA : *Le premier carré a une aire de $2\times2=4$ cm^2 et nous voulons construire un carré avec une aire double, c'est-à-dire 8 cm^2. Il faut trouver les côtés du carré avec une aire double. On trouve la racine carrée de 8. Chaque côté du carré a une longueur de 2,8 cm.*

STERGIOS : *Notre ami Yannis a trouvé la réponse. Au début, nous ne l'avons pas bien compris. On a expérimenté beaucoup de nombres. Le nombre 2,8 est la solution juste. On a appliqué une autre méthode. La racine carrée de 8 est 2,8 cm puisque $2,8\times2,8=7,84$. On a donc trouvé le côté et on peut écrire que la racine carrée de 8 est égale à 2,8. Nous avons trouvé le même résultat que le groupe E.*

ALEXANDRA : *Nous avons trouvé, comme les autres, la racine carrée de 8. Premièrement, nous avons trouvé l'aire du carré avec un côté de 2 cm. Nous avons multiplié un côté avec l'autre et nous avons trouvé 4 cm^2. L'aire du grand carré est donc de 8 cm^2. Après, nous avons dit que pour trouver le*

côté du carré avec une aire double, il faut calculer… la racine carrée de 8. Et nous l'avons fait.
…
Nous avons vu que quand nous multiplions 2,8×2,8 i l y a une grande différence, c'est pourquoi on a trouvé 2,83 où le résultat est détaillé et plus exact.

Evidemment, les stratégies numériques dominent dans les travaux des élèves. Les réponses des élèves différent quant au nombre de chiffres dans la partie décimale. De plus, la réflexion des élèves sur l'approximation et la notion d'infini est intéressante :

ROMANOS : *Nous avons trouvé 2,8×2,8 =7,84. Ce résultat est une approximation de* $\sqrt{8}$.

ALEXANDRA : *On a trouvé 2,83 où le résultat est détaillé et plus exact. C'est une bonne approximation de* $\sqrt{8}$.

ALEXANDROS : *Certains ont écrit :* $\sqrt{8} = 2{,}828...$ *Le 2,8 et le 2,82 existent, mais le nombre décimal change un peu. Les points, je ne trouve pas ça correct.*

DORA : *A mon avis le nombre exact est* $\sqrt{8} = 2{,}828...$

Les difficultés des enfants de cet âge sont prévisibles et justifiées. Le raisonnement des enfants sur l'approximation du bon résultat se poursuit dans l'extrait suivant :

PROFESSEUR : *Qu'est ce que veulent dire les points dans* $\sqrt{8} = 2{,}828...$ *?*

FILOMENNA : *On pourrait dire que les points signifient : "environ".*

ELLI : *On peut arrondir et on a une approximation du nombre.*

LÉONIDAS : *S'il n'y avait pas les points, le résultat serait exact.*

YANNIS : *Incomplet, ça veut dire qui n'est pas terminé.*

FILOMENNA : *Les points veulent dire que le nombre n'est pas terminé. Il est continu.*

SEVINA : *Le nombre est continu.*

ROMANOS : *Quand nous écrivons 2,82… le nombre est incomplet. Il a beaucoup de chiffres décimaux. Le nombre est infini. Il ne finit jamais.*

CHRISTINA : *Sans points on a un nombre fini, mais avec les points la longueur est infinie.*

MICHEL : *Il ne faut pas mettre les points, parce que la longueur est déterminée, concrète. C'est la diagonale. Les points ils sont négligeables!*

ALEXANDROS : *2,82 ce sont les chiffres essentiels. Les autres chiffres sont les mêmes 2,828282… et ne sont rien. C'est de la poussière !*

YANNIS : *Les points représentent l'inconnu. C'est ce qui complète le nombre!*

CHRISTOS : *Le nombre est continu. Il a d'autres chiffres qui sont nombreux, peut-être innombrables…*

DORA : *Si nous ne posions pas les points, nous ferions une faute. L'aire du carré n'était pas juste. Nous le trouverions incorrect, sans en savoir le pourquoi.*

PROFESSEUR : *Certains ont trouvé 2,8, d'autres 2,83 et d'autres 2,82… On garde ce résultat et on continue.*

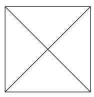
En raison de la nécessité de donner une réponse arithmétique à la question posée, les élèves s'occupent de l'approximation de la racine carrée de 8. Dans un cadre réaliste, les points sont inutiles (*"Les points ils sont négligeables!", "C'est de la poussière !"*). Cependant, les idées précédentes sont très variées. Les élèves ont formulé des idées mathématiques pour les nombres décimaux et des hypothèses pour les nombres qui ne finissent pas (*"incomplet", "infini", "innombrables", "est continu",…*). Les difficultés des élèves viennent d'une transposition abusive des connaissances précédentes pour les nombres entiers (Yujing & Yong-Di, 2005). Ils n'ont pas une idée claire des décimaux terminant, pour les décimaux périodiques (rationnels) et les irrationnels (ils ne considèrent pas le $\sqrt{8}$ comme une valeur exacte). Pour les élèves, il était très difficile de percevoir un nombre dont on ne connait pas l'écriture décimale (Gasser, 2003 ; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). On peut doubler, tripler, etc., la longueur d'un segment et on peut la diviser par 2, par 3 etc. Partant de l'unité de longueur, on obtient des segments de longueur m/n, où m et n sont des nombres naturels. Ces segments correspondent aux nombres rationnels positifs, qui, comme nous le savons, forment une suite illimitée dénombrable. Malgré la densité des nombres rationnels, ils ne peuvent pas compléter tous les points d'un intervalle et ces points forment une suite d'une infinité «plus grande» (Moseley, 2005). Il y a donc sûrement des segments dont la longueur est irrationnelle et qui peuvent être représentés sur la ligne des nombres réels par des points (comme $\sqrt{8}$). Il y a encore d'autres nombres irrationnels qui ne sont pas construits avec règle et compas (comme par exemple le nombre algébrique irrationnel $\sqrt[3]{2}$ et le nombre transcendant irrationnel π), qui sont aussi représentés sur la droite réelle par un point unique. Bien sûr, axiomatiquement et sans aucune intuition de la part des élèves ! Les observations faites, qui doivent être complétées par d'autres recherches, confirment l'ambiguïté relative à la conception des nombres décimaux pour les élèves après l'âge de 12 ans : «*un nombre décimal est un nombre qui s'écrit avec une virgule ; il peut avoir un nombre infini de chiffres non nuls après la virgule ; il y a des nombres décimaux qui se terminent et d'autres qui ne se terminent pas. Cette ambiguïté semble persister pour beaucoup de personnes n'ayant pas eu l'occasion d'approfondir leurs connaissances en mathématiques au niveau du Lycée* » (Jacquier, 1996, p. 45). Toutes les variétés de nombres décimaux ne sont pas faciles à aborder. Il suffit de penser que le symbole $\sqrt{8} = 2{,}828...$ constitue une "formule" qui a été adoptée et est entré en usage seulement il y a deux siècles. Bien sûr aujourd'hui cette formule domine comme système de représentation de nombres réels.

Si on veut permettre aux élèves de se faire une idée plus précise des nombres décimaux, de leurs caractéristiques et de leur limites ainsi que des nombres rationnels et irrationnels, on peut envisager des situations permettant de lever les ambiguïtés que nous avons trouvées à travers les différentes réponses apportées par les élèves pendant les différentes phases de la gestion du problème. Reste posé le problème du choix d'activités pertinentes pour la progression des élèves de cet âge.

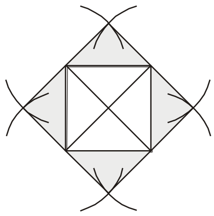
Stratégies géométriques du problème.

Ci-dessous, on présente la solution géométrique que les élèves de 12 ans ont trouvée (groupe A). La racine carrée, le théorème de Pythagore et d'autres démonstrations géométriques ne sont pas enseignées aux enfants de la première classe de l'enseignement secondaire de l'école européenne (qui correspond à la $6^{ème}$ en France). Le dessin suivant montre un segment de la diapositive projetée :

Première solution



4 triangles



8 triangles

Sur la diapositive était écrit: *On a dessiné un carré avec un côté de 2 cm. Nous avons ensuite séparé ce carré en quatre triangles isocèles. La construction a été réalisée avec règle et compas. Puis, nous avons ajouté aux quatre côtés, 4 triangles égaux et isocèles. Le côté du grand carré est la diagonale du petit carré.*

Dans la phase du débat, les membres du groupe A expliquent :

FILOMENNA : (Elle vient et explique la solution de la diapositive projetée) : *On a commencé avec un carré. Après, on l'a coupé en 4 parties, d'abord en 2, puis en 4 et on a trouvé 4 triangles. Nous voulions trouver une solution au problème. Nous voulions trouver un autre carré qui ait une aire double. Donc, nous les avons ajoutés ici… Nous avons construit quatre triangles égaux avec règle et compas. Nous avons construit 4 triangles égaux à l'extérieur du premier carré. On a donc construit un grand carré qui a 8 triangles égaux, c'est-à-dire avec une aire double. Le petit carré possède 4 triangles, mais le grand 8. Donc, l'aire est le double. Le côté est : 2,8.*

PROFESSEUR : *Vous avez compris la solution ?*

MARIA : *Je n'ai pas compris toute la solution. Est-il nécessaire de couper le carré en 4 triangles ?*

FILOMENNA : *À mon avis oui !*

MARIA : *Je ne suis pas d'accord. Moi, je sais que l'unité de mesure de la surface est le carré. Pas le triangle.*

FILOMENNA : *Normalement, c'est le carré. Mais …* (silence).

MARIA : *Nous avons appris le mètre carré, le centimètre carré...*

PROFESSEUR : *Est-ce qu'il y a un autre élève du groupe qui veut ajouter quelque chose ?*

MICHEL : (Il vient et explique la solution sur la diapositive projetée) : *Le mètre carré et le centimètre carré sont les unités habituelles des surfaces. Pourquoi n'avons nous pas le droit d'utiliser le triangle isocèle et rectangle ? Est-ce-que je peux l'expliquer ?*

PROFESSEUR : *Oui ! Bien sûr !*

MICHEL : *Alors ! Nous avons tracé les diagonales du carré et nous avons créé 4 triangles isocèles et orthogonaux. Tous les triangles sont égaux. Après nous avons construit à l'extérieur du carré initial quatre mêmes triangles. Si nous comptons l'aire du carré initial avec pour unité de mesure ce triangle, alors son aire est constitué de 4 triangles. On a constaté que si le nombre des triangles est doublé, l'aire sera double. On a placé les 4 triangles, dans une autre position, à l'extérieur : un ici, un ici, un ici et un ici. Le grand carré a 8 triangles égaux. Vous êtes d'accord ?*

ELEVE : *Oui ! J'ai compris.*

MICHEL : *Donc, on a un carré dont l'aire est double. La diagonale du petit carré est le côté du grand carré. On peut prendre comme côté du grand carré la diagonale du petit carré. La voila ici. N'est-ce pas?*

ELEVE : *Oui ! C'est ça.*

PROFESSEUR : *Donc, que peut-on en conclure ?*

MICHEL : *Le côté du nouveau carré est la diagonale de l'ancien. Après, la construction est facile. Le côté du grand carré est environ 2,8 cm.*

LÉONIDAS : *Sur la diapositive comment l'avez-vous construit ?*

MICHEL : *Nous avons pris comme rayon la moitié de la diagonale du carré initial. Voilà la construction !*

LÉONIDAS : *Sans mesurer 2,8 cm ? Comment est-ce possible ?* (Ensuite Michel explique en classe la manière dont la construction a été faite sur la diapositive de son groupe)

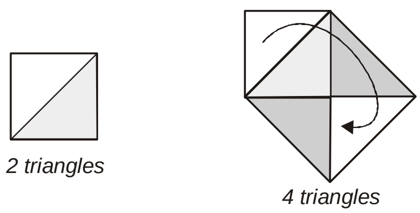
Bien qu'à la fin Filomena et Michel terminent avec un argument arithmétique, l'importance primordiale est donnée à la Géométrie. Ils ont appréhendé une solution de construction qui, bien qu'elle ne soit pas complète, a été réalisée avec la règle et le compas. Cette solution diffère de la solution de Socrate quant au nombre de triangles qu'ils ont découpés dans le carré initial : Dans *"Ménon"*, le carré est divisé en 2 (voir en annexe), mais chez ces élèves, en 4. Les enfants, après avoir divisé le carré en 4 triangles orthogonaux, créent un carré avec 8 triangles orthogonaux, égaux aux précédents, par essais, tracements, rattachements, rotations, réorientations et déplacements dans des positions adjacentes (comme un puzzle). Le dessin précédent montre que le grand carré a au total 8 triangles (les 4 du carré initial et les 4 hachurés) et évidemment une aire double du premier carré. Pour certains enfants, il était difficile d'accepter comme unité de structure le triangle, apparemment à cause du contrat didactique. Il est évident que la stratégie précédente est une excellente découverte, bien qu'elle ait été découverte par un groupe d'élèves. La description, la justification et la cohérence de l'argumentation sont une surprise pour nous. Cette découverte s'avère d'une importance primordiale pour la compréhension du problème. Pourtant, il y a des objections :

STERGIOS : *Que tous les autres groupes nous exposent une autre méthode. Pourquoi faut-il le faire si compliqué ? Cette solution du groupe A est très compliquée.*

PROFESSEUR : *Est ce qu'il y a une réponse à cette critique ?*

MICHEL : *Non ! C'est une solution simple. Il n'est pas nécessaire de compter. Il suffit de tracer la diagonale. Maintenant on a deux triangles. On peut construire le carré suivant, qui a une aire double.* (Il construit le triangle au tableau)

Deuxième solution



On peut tourner et doubler ce triangle. Ici, nous avons 2 triangles et là, 4 triangles, c'est à dire qu'on a construit un carré avec une aire double. C'est une autre juste explication. Es-tu d'accord ?

STERGIOS : *Oui j'ai compris. Mais quelle est la longueur du nouveau carré ?*

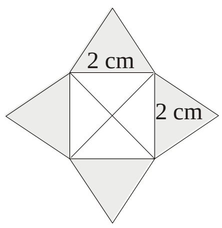
MICHEL : *C'est la longueur de la diagonale du petit carré. Après, nous pouvons la mesurer. Mais cette manière n'est pas bonne. La construction géométrique nous donne la meilleure solution. Le nombre 2,8 n'est pas l'exacte valeur de la diagonale. C'est une approximation.*

STERGIOS : *La meilleure solution est la nôtre ! Si nous comptons la diagonale, la solution sera aussi approximative. Il faut donner une réponse arithmétique à la question « quelle est la longueur du côté du carré qui a une aire double ». À mon avis la réponse juste est la racine carrée de 8 ! C'est à dire le nombre exact 2,8.*

MICHEL : *Mais 2,8 n'est pas exact, puisque le nombre 2,828 -et en arrondissant 2,83- c'est plus juste. La solution, c'est la longueur de la diagonale. Voilà ! Nous, nous faisons la construction et après nous comptons la longueur du côté ...*

Dans ce débat entre les élèves, on retrouve le problème historique de la bissection entre la grandeur discontinue et continue, entre la quantité arithmétique et la quantité géométrique. Sergios insiste sur la solution arithmétique (il considère que la valeur exacte est 2,8 et que $\sqrt{8} = 2{,}8$). Michel, d'une part, parle de la mesure des longueurs : "*nous faisons la construction et après nous comptons la longueur du côté*" et "*Le côté du grand carré est environ 2,8 cm*" et, d'autre part, il a obtenu une solution géométrique originale en insistant sur l'idée que : "*La solution est la longueur de la diagonale. Voilà !*". On pourrait dire que cette dernière affirmation est une idée initiale qui peut contribuer à l'acquisition ultérieure de l'incommensurabilité (la déduction par l'absurde ne peut être faite par des élèves de 12 ans). Pourtant, l'idée du discret est très puissante parmi la majorité les élèves. Les obstacles qui sont liées à l'incommensurabilité des grandeurs (ici des longueurs) et à la non-dénombrabilité des irrationnels, resteront difficiles à surmonter pour les élèves du Lycée (2002 ; Fischbein et *al.*, 1995). Michel, dans sa tentative de convaincre, découvre une deuxième solution qui constitue une simplification de la solution que Socrate présente dans *"Ménon"*. On a le découpage d'un triangle orthogonal et son déplacement dans la position opposée (rotation de 180^0 degrés) et ainsi de suite, jusqu'à la réalisation du nouveau carré. Si nous extrapolons vers une solution géométrique, ce problème exige une dissociation de la première perception et du changement d'angle optique. Il exige encore une réorganisation de la figure au moyen d'un changement figuratif et d'une construction d'une nouvelle figure (Duval, 2005). Il s'agit d'une approche heuristique qui révèle une compréhension profonde de la figure. Les enfants peuvent trouver la solution par la manipulation de différents découpages du carré en triangles rectangles et isocèles, en comparant et en réalisant des configurations. Les enfants peuvent diviser le carré donné en quatre ou deux triangles, imaginer par perception visuelle globale un carré avec une aire double (quatre ou huit triangles), changer l'orientation habituelle du carré et construire le carré demandé.

Pendant la recherche collective, un élève du groupe B «a piqué» la solution du groupe A et l'a transféré à son groupe. Voici un extrait de l'élaboration du groupe B :



Puisque l'aire du premier carré est de 4 cm^2, l'aire du deuxième carré est $4{\cdot}2=8$ cm^2. Le côté du deuxième carré sera la racine carrée de 8, car $x{\cdot}x=8$ et $x=2{,}82$ cm. $x{\cdot}x=8$ et $2{,}82{\cdot}2{,}82\approx 8$ cm^2.

Au cours du débat il y a eu des objections :

LÉONIDAS : (Groupe B) *Voilà notre solution. Nous avons construit ce dessin.* (Il présente la diapositive)

DORA : (Groupe C) *La solution 2,82 c'est juste, mais le dessin n'est pas bon. Vous avez construit une étoile. Pas un carré !*

Les groupes A et B se disputent la découverte de la solution.

LÉONIDAS : *Toi ? Tu ne sais pas !* (Il montre la diapositive) *Normalement, nous avons dessiné un grand carré, séparé en huit triangles, mais le carré donné est séparé en quatre. Donc l'aire est double.*

MICHEL : (Groupe A) *La solution est mal expliquée sur la diapositive. Vous avez construit une étoile sans en justifier la construction. Vous n'avez pas écrit cette solution sur votre diapositive. Tu as vu la nôtre et tu as répété les mêmes résultats que dans la discussion précédente.*

LÉONIDAS : *Non ! Nous l'avons trouvée avant vous ! La solution m'appartient. Monsieur vous avez vu notre idée initiale. Nous sommes les premiers ! Pas vous !*

Après le débat, la solution géométrique devient accessible à plusieurs élèves. Avec la figure devant leurs yeux, les notions mathématiques abstraites apparaissent plus claires et concrètes aux élèves. Les preuves sont plutôt tangibles. Cette perception a réduit les difficultés, a facilité la compréhension des propriétés mathématiques et a donné une assurance mathématique aux élèves les plus faibles. La solution géométrique a soumis aux élèves des idées mathématiques, les a aidés à comprendre (Arcavi, 2003).

Le découpage et la réorganisation des parties du carré montrent que l'aire demeure inchangée (conservation). La solution géométrique exige une réorganisation des éléments présentés. De plus, cette solution particulière est difficile à anticiper, puisqu'elle surgit généralement de façon soudaine. Les problèmes de ce type font, donc, appel au phénomène découvert, il y a de nombreuses années, grâce à la psychologie gestaltiste et que l'on nomme "insight". En fait, on vient d'avoir une perception instantanée des relations unissant les divers éléments composant son problème.

En fait, les problèmes de découpage et de composition d'une figure demandée peuvent revêtir de multiples formes dans la vie quotidienne. L'ouvrier qui n'a pas l'outil nécessaire pour fabriquer une pièce et qui doit se débrouiller avec les seuls objets à sa disposition, ou encore l'élève qui doit rédiger un texte à partir d'un ensemble d'idées, plus ou moins organisées, sont tous deux confrontés au même type de problème. Ainsi, on a des situations qui exigent de trouver une façon d'utiliser un ensemble d'éléments, de les manipuler et de les réarranger d'une autre manière. Les principales compétences requises ici sont la créativité et la flexibilité.

La gestion de la classe.

En suivant la série de ces phases de gestion, nous entreprendrons de présenter certaines réflexions qui sont liées à notre pratique.

Le temps de la recherche individuelle est indispensable à la lecture et à la compréhension du problème. Durant cette phase, les enfants élaboraient une première représentation du problème, qu'ils expérimentaient grâce aux indications qu'ils trouvaient dans l'énoncé. Ils effectuaient leurs premiers essais, formulaient des hypothèses et des variantes probables, et trouvaient des résultats partiels. Tout cela constituait l'ébauche féconde indispensable pour qu'avance la recherche collective.

La phase de la recherche des groupes est caractérisée par des interrogations communes, un dialogue fécond, une prise de décisions collectives et une composition créative de la solution du problème. Les observations nous montrent que les élèves échangent initialement des idées avec l'intention de mieux comprendre leurs objectifs et de trouver des points de contact, tandis qu'ultérieurement, ils réalisent la nécessité de la cohésion, établissent un cadre de règles, qui fixent les modalités de leurs relations, le mode de prise des décisions, la répartition des rôles ou la répartition du travail individuel. Dans la classe où nous avons réalisé notre expérimentation, nous avons constaté que les enfants développent à l'intérieur des groupes des facultés inépuisables de coopération, sans que cependant s'effacent les concurrences et les problèmes.

Les observations nous montrent qu'au sein des groupes ont émergé des hypothèses diverses, de nombreuses stratégies et des arguments riches qui, peut-être, ne seraient pas apparus si chaque élève avait travaillé seul, renfermé sur lui-même. La rencontre commune des individus "liait" les membres entre eux et les obligeait tous à contribuer à la flexibilité du groupe, et renforçait le niveau et le rythme de travail, neutralisait facilement les idées et les hypothèses de basse qualité, pour qu'émergent les meilleures et pour focaliser l'intérêt du groupe sur la résolution du problème et sur la préparation de la diapositive collective. Finalement, le groupe produit de meilleures performances d'apprentissage.

La communication entre les groupes a offert aux enfants l'occasion, en fonction de leur âge et de leur niveau cognitif, d'agir, de formuler des hypothèses et des affirmations et d'argumenter (Brousseau, 1986), sur la solution du problème mathématique. Les observations nous montrent que lors de cette phase, les élèves passent au dialogue, en quête de procédures, et plus spécialement à l'invention d'une résolution stratégique, qui leur permette d'atteindre l'objectif auquel ils pensent. Ensuite, ils choisissent la stratégie liée au problème, c'est-à-dire qu'ils l'adaptent aux données de l'énoncé et, ensuite, ils exécutent le projet pour arriver au résultat. Ces conduites ne se limitent pas aux concepts mathématiques que pouvait construire individuellement chaque membre du groupe, mais créent un champ d'accord et d'arrangements réciproques dans ces échanges de sens mathématiques. Cependant, la démarche individuelle rend impossible l'élaboration de la diapositive collective.

Déjà, lors de l'esquisse de l'expérimentation de la situation du problème, nous avons opté pour des extraits propices à la discussion ouverte dans l'ensemble de la classe. Si nous prenons en compte tant ces extraits que le climat plus général de discussion des enfants, nous sommes conduits aux constats suivants :

Le débat public durant la session avec toute la classe était davantage le fait des élèves et moins celui de l'enseignant ; il constituait le terrain favorable qui les obligeait à mobiliser et à articuler divers types d'arguments. Cela était dicté aussi bien par les besoins individuels que par la reconnaissance du groupe au sein de la communauté de la classe. Nos observations montrent que chaque groupe présente différentes propositions de solution, et aborde le problème sous des angles différents, alors que cela ne serait pas le cas, si le problème était fermé. Lors de la discussion ouverte, les élèves ont élaboré de nombreuses idées et ont été obligés de produire de nouveaux arguments au-delà de ceux écrits sur les diapositives, pour défendre leurs solutions, pour juger ou pour contrôler les solutions des autres groupes ou les comparer entre elles. Souvent, non seulement ils recherchaient les arguments qui étaient liés à leurs tentatives de résoudre le problème, mais ils étaient aussi attentifs à leurs expériences antérieures et à l'environnement scolaire et extrascolaire et se fondaient sur les convictions qu'ils avaient acquises.

La confrontation était une phase créative de comparaison dynamique du travail de groupe. Le dialogue était riche et avait un caractère réaliste. La mise en scène de cette phase gardait vivant l'intérêt des élèves et laissait apparaître un climat agréable d'apprentissage caractérisé par l'enthousiasme ou la déception, la réaction ou le silence, la participation à la discussion ou l'audition passive ou active. Les variations du climat pédagogique dans la classe ont eu un effet bénéfique sur la modification des convictions erronées des enfants.

Conclusion

Aujourd'hui la théorie platonicienne de la connaissance (théorie des Idées et de la Réminiscence) n'est pas admise. On peut considérer que la connaissance est une structure culturelle. C'est dans ce cadre qu'on a appliqué notre expérimentation dans une classe actuelle. Après notre expérience didactique on pourrait souligner les réflexions qui en résultent, mais qui proviennent d'une classe seulement et ne peuvent pas être généralisées :

La présence et la persévérance du phénomène qu'on appelle « illusion de linéarité » semble diachronique. La proportionnalité fonctionne pour les longueurs, mais n'est pas applicable aux surfaces (Modestou et Gagatsis, 2007). Non seulement le jeune garçon de *"Ménon"* mais aussi, les élèves d'aujourd'hui, en utilisant un raisonnement proportionnel inapproprié, généralisent le doublement des longueurs pour les surfaces et semblent convaincus que tout accroissement est un accroissement linéaire. On a un phénomène de surgénéralisation des modèles linéaires aux modèles non-linéaires. Les élèves développent le malentendu que chaque relation peut être considérée comme proportionnelle.

La stratégie numérique renvoie au traitement des données numériques du problème pour arithmétiser la longueur du côté du carré doublé. Pour la majorité des élèves, le concept de grandeur discrète est très fort et se rapporte aux expériences précédentes avec les nombres entiers. Les enfants mobilisent leur attention sur l'arithmétique et essaient de trouver la longueur du côté, puis d'utiliser le côté pour effectuer la construction du carré avec une aire double (Barbin, 2007). L'énoncé privilégie le registre géométrique et demande également une réponse dans le registre algébrique. En France, mais aussi en Grèce, dans les mathématiques telles qu'elles sont enseignées, domine la pensée numérique et algébrique. Cet aspect est privilégié et il en résulte certainement un affaiblissement de la signification de nombres, mais aussi un appauvrissement de l'enseignement des mathématiques (Gasser, 2003). Bien sûr, la culture numérique en comparaison avec la culture géométrique est plus diffusée dans le monde contemporain et domine aussi dans les représentations construites par les élèves dans la manière dont ils vivent les leçons de mathématiques. Il apparaît que l'arithmétisation excessive blesse l'intuition géométrique. En général, nous considérons que l'expérience enrichissante des élèves sur des formes et constructions géométriques, avant même qu'ils se familiarisent avec l'arithmétisation et la démonstration analytique, est non seulement utile mais nécessaire.

La stratégie géométrique consiste ici à diviser le carré initial en triangles rectangles et isocèles et à réorganiser mentalement un autre carré comme un puzzle (Bettinelli, 2001). L'acceptation du triangle en tant qu'unité fondamentale structurale, laquelle se répète au cours des mesures, n'étais pas facile pour tous, parce que les mesures conventionnelles étaient solidement enracinées par la force de habitude et de la tradition (Balacheff, 1988). Avec des manipulations et des arrangements, reconstitutions, déplacements et des emboitements en puzzle, tant le jeune homme de *"Ménon"* que les élèves d'aujourd'hui comprennent que le carré obtenu est bien le double du carré initial en tant que grandeur. Le résultat est obtenu sans faire appel à une mesure de la longueur. Ainsi, ce qui ne peut pas être dit exactement est construit exactement et la numérisation des grandeurs a été remplacée par une construction géométrique (Friedelmeyer, 2001).

Ici, la solution exige que les sujets sortent du cadre arithmétique et retrouvent la composition du modèle d'un carré double. Dès que les enfants sont dégagés radicalement de la première perception et font preuve d'imagination et de flexibilité en inventant des changements inhabituels, alors les visions momentanées de l'intuition, la dynamique des images mentales sur lesquelles le raisonnement peut se fonder et conduire à une richesse des stratégies. De plus, ils ne se limitent pas à un seul mode de pensée, mais tentent plutôt de percevoir les aspects de la situation sous des angles variés. Tel un problème d'assemblage et de construction, se pose le problème de l'irrationalité en ces termes : dans des situations très simples de transformations de figures, il est impossible de numériser les grandeurs dans le cadre des nombres rationnels. En revanche, il est possible de construire des figures et de procéder à une arithmétisation des grandeurs sur les figures de cette construction, ici de pouvoir affirmer que le carré obtenu finalement est bien deux fois plus grand que le carré initial. Un enseignement qui lie des nombres et des grandeurs permet de préserver une compréhension en profondeur de la richesse et de la complexité du numérique. En tout cas, la gestion des irrationnels au cours de l'enseignement doit s'effectuer avec beaucoup d'attention.

BIBLIOGRAPHIE

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), pp. 215-241.

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A. Germain, G., Guichard, Y. & Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses Universitaires de Lyon.

Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

Balacheff, N. (1988). Le contrat et la coutume. In C. Laborde (ed), *Actes du premier colloque Franco-allemand de la didactique des mathématiques et de l'informatique*, La pensée sauvage, pp. 19-26.

Barbin, E. (2007). L'arithmétisation des grandeurs, *Repères-IREM*, n° 68, pp. 5-20.

Bettinelli, B. (2001). Actions géométriques avec un ensemble de gabarits**,** *Repères-IREM*, n° 43, pp. 5-27.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherche en didactique des mathématiques*, 4.2, Grenoble, La pensée sauvage, pp. 6-42.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7.2, La pensée sauvage.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage, Grenoble.

Caveing, M. (1982). Quelques remarques sur le traitement du continu dans les Eléments d'Euclide et la Physique d'Aristote, *Penser les Mathématiques*, Editions du Seuil.
Courant, R. & Robbins, H. (1996). *What is Mathematics?,* Oxford University Press, pp. 58-72.
De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures, *Educational Studies in Mathematics*, 35, 65-85.
Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, n° 10, pp. 5-53.
Fischbein, E., Jehiam, R. & Cohen, C. (1995). The concept of irrational number in High-School students and prospective teachers, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 29–44.
Freudenthal, H. (1967). *L'univers des Connaissances : mathématiques et réalités*, Hachette, Paris.
Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, Dordrecht : Reidel.
Friedelmeyer, J. P.(2001**).** Grandeurs et nombres : l'histoire édifiante d'un couple fécond**,** *Repères-IREM*, n° 44, pp. 5-31.
Gasser, J-L(2003). Évolution de la notion de nombre au collège**,** *Repères-IREM*, n° 51, pp. 59-103.
Harris, V. C. (1971). On Proofs of the Irrationality of the Square Root of Two, *The Mathematics Teacher* 1, n° 64, pp. 19-21.
Heath, T. L. (1981). *A History Greek mathematics*, Vol 1 & 2, Dover, New York.
Jacquier, I, (1996). Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième ? *Petit x*, n° 41, pp. 27-48.
Le Berre, M. (2002). Du pgcd aux nombres irrationnels : approche géométrique**,** *Repères-IREM*, n° 46, pp. 27-37.
Maor, E. (2007). *The Pythagorean Theorem- A 4000 year history,* Princeton University
Marchive, A. (2002), Maïeutique et didactique, l'exemple du "Ménon", *Penser l'éducation*, n° 12, pp. 73-92.
Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning : A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, 27 (1), 75-92.
Moseley, B. (2005). Students' Early Mathematical Representation Knowledge : The Effects of Emphasizing Single or Multiple Perspectives of the Rational Number Domain in Problem Solving, *Educational Studies in Mathematics*, 60, pp. 37-69.
Perrin, M.-J.& Douady, R. (1988). Conceptions des élèves à propos d'aires de surfaces planes. In C. Laborde (ed), *Actes du premier colloque Franco-allemand de la didactique des mathématiques et de l'informatique*, éditions la pensée sauvage, pp. 19-26.
Platon, (1993), *"Ménon"*, Paris, GF Flammarion.
Russel, B. (1920/1991). *Introduction à la Philosophie Mathématique*, Editions Payot.
Sierpinska, A., (1994). *Understanding in Mathematics*, Falmer Press, London.
Sirotic, N, Zazkis, R. (2007). Irrational numbers : the gap between formal and intuitive knowledge, *Educational Studies in Mathematics*, 65, 49–76.
Thuillier, P. (1985). Sociologie de la connaissance : Platon et la géométrie, *La Recherche*, 16, pp. 664-667.
Toeplitz, O. (2007). *The Calculus : A Genetic Approach University,* The university of Chicago Press.
Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set rational numbers : Conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, pp. 453-467.
Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity. A teaching experiment striving for conceptual change. *Learning and Instruction*, 14, pp. 485-501.

Yujing, N. & Yong-Di, Z. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias, *Educational Psychologist*, 40, pp. 27 - 52.

Pihlgren, A. (2008). *Socrates in the Classroom. Rationales and Effects of Philosophizing with Children*. The dissertation could be downloaded as pdf at *www.diva-portal.org/su/theses/abstract.xsql?dbid=7392*.

ANNEXE (extrait du livre : *Platon* "Ménon", Paris, GF Flammarion, 1993)

Ménon : Oui, Socrate, mais que veux-tu dire en affirmant que nous n'apprenons pas, mais que ce que nous appelons « apprendre » est une « réminiscence » ? Peux-tu m'enseigner que c'est bien le cas?

Socrate : Comme je te l'ai dit à l'instant, Ménon, tu es un phénomène de malice! Voilà que tu me demandes si je peux te donner un enseignement, à moi qui déclare qu'il n'y a pas enseignement, mais réminiscence ! C'est pour que justement j'aie moi-même aussitôt l'air de me contredire!

Ménon : Non, par Zeus, Socrate, ce n'est pas ce que j'avais en vue en disant cela, j'ai plutôt parlé par habitude. Pourtant si tu peux d'une façon ou d'une autre me montrer qu'il en est comme tu dis, montre-le-moi.

Socrate : Mais ce n'est pas facile! Pourtant je veux bien y consacrer tout mon zèle pour te faire plaisir. Eh bien, appelle-moi quelqu'un de cette nombreuse compagnie qui t'escorte, celui que tu veux, pour que je puisse te faire démonstration sur lui.

Ménon : (s'adressant au jeune garçon)

Oui. Parfait.- Toi, viens ici.

Socrate : Est-il grec ? Parle-t-il le grec ?

Ménon : Oui, bien sûr, tout à fait, il est né dans ma maison.

Socrate : Alors prête bien attention à ce qu'il te paraît faire : s'il se remémore ou s'il apprend de moi.

Ménon : Mais oui, je ferai attention !

Socrate : Dis-moi donc, mon garçon, sais-tu que ceci, c'est une surface carrée ?

Le jeune garçon : Oui, je le sais.

Socrate : Et que, dans une surface carrée, ces côtés-ci, au nombre de quatre, sont égaux ?

Le jeune garçon : Oui, tout à fait.

Socrate : Et aussi que ces lignes qui passent par le milieu sont égales, n'est-ce pas ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Alors, surface de ce genre ne peut-elle pas être et plus grande et plus petite ?

Le jeune garçon : Oui, tout à fait.

Socrate : Supposons donc que ce coté-ci ait deux pieds long et que ce côté-là soi long de deux pieds aussi, combien le tout aurait-il de pieds carrés ? Examine la question de cette façon-ci : si on avait deux pieds de ce côté-ci, mais seulement un pied de ce côté-là, n'obtiendrait-on pas une surface d'une fois deux pieds carrés ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Mais si on a deux pieds aussi de ce côté-là, est-ce que cela ne fait pas deux fois deux ?

Le jeune garçon : En effet.

Socrate : Il y a donc là une surface de deux fois deux pieds carrés ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Or, combien cela donne-t-il, deux fois deux pieds carrés ? Fais le calcul et dis-moi.

Le jeune garçon : Quatre, Socrate.

Socrate : Alors, ne pourrait-on pas avoir un autre espace, double de cet espace-ci, mais de la même figure que lui, et qui, comme celui-ci, aurait toutes ses lignes égales ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Dans ce cas, combien aura-t-il de pieds carrés ?

Le jeune garçon : Huit.

Socrate : Eh bien justement, essaie de me dire quelle sera la longueur de chacun des cotés de ce nouvel espace, c'était deux pieds, mais dans ce nouvel espace, double du premier, quelle sera la longueur de chaque ligne ?

Le jeune garçon : Il est bien évident, Socrate, qu'elle sera double.

Socrate : Tu vois Ménon, que je n'enseigne rien à ce garçon, tout ce que je fais, s'est poser des questions. Et à présent, le voici qui croit savoir quelle est la ligne à partir de laquelle on obtiendra l'espace de huit pieds carrés. Ne penses-tu pas qu'il le croie ?

Ménon : Oui, je le pense.

Socrate : Or le sait-il ?

Ménon : Non, assurément pas !

Socrate : Mais ce qu'il croit à coup sûr, c'est qu'on l'obtient à partir d'une ligne deux fois plus longue ?

Ménon : Oui.

Socrate : Eh bien observe-le, en train de se remémorer la suite, car c'est ainsi qu'on doit se remémorer. Réponds-moi. Ne dis-tu pas que c'est à partir d'une ligne deux fois plus longue qu'on obtient un espace deux fois plus grand ? Je parle d'un espace comme celui-ci, non pas d'un espace qui soit long de ce coté-ci et court de ce coté-là, mais d'une espace égal dans tous le sens, comme celui-ci, seulement qui soit deux fois plus grand que ce premier carré et mesure huit pieds carrés. Eh bien, vois si tu penses encore que cet espace s'obtiendra à partir d'une ligne deux fois plus longue.

Le jeune garçon : Oui, je le pense.

Socrate : Mais n'obtiendra-t-on pas la ligne que voici, double de la première, si nous y ajoutons une autre aussi longue ?

Le jeune garçon : Oui, tout à fait.

Socrate : Ce sera donc, dis-tu, à partir de cette nouvelle ligne, en construisant quatre côtés de même longueur, qu'on obtiendra un espace de huit pieds carrés, n'est-ce pas ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Donc, à partir de cette ligne, traçons quatre côtés égaux. N'aurait-on pas ainsi ce que tu prétends être le carré de huit pieds carrés.

Le jeune garçon : Oui, tout à fait.

Socrate : Or, dans le carré obtenu, ne trouve-t-on pas la ces quatre espaces, dont chacun est égal à ce premier espace de quatre pieds carrés ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Dans ce cas quelle grandeur lui donner ? Ne fait-il pas quatre fois ce premier espace ?

Le jeune garçon : Bien sûr que oui.

Socrate : Or, une chose quatre fois plus grande qu'une autre en est-elle donc le double ?

Le jeune garçon : Non, par Zeus !

Socrate : Mais de combien de fois est-elle plus grande ?

Le jeune garçon : Elle est quatre fois plus grande !

Socrate : Donc, à partir d'une ligne deux fois plus grande, mon garçon, ce n'est pas un espace double que tu obtiens, mais un espace quatre fois plus grand.

Le jeune garçon : Tu dis vrai !

Socrate : De fait, quatre fois quatre font seize, n'est-ce pas ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Alors, à partir de quelle ligne obtient-on un espace de huit pieds carrés ? N'est-il pas vrai qu'à partir de cette ligne-ci, on obtient un espace quatre fois plus grand ?

Le jeune garçon : Oui, je le reconnais.

Socrate : Et n'est-ce pas un quart d'espace qu'on obtient à partir de cette ligne-ci qui est la moitié de celle-là ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Bon. L'espace de huit pieds carrés n'est-il pas, d'une part, le double de cet espace-ci, et d'autre part, la moitié de celui-là ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Mais ne se construira-t-il pas sur une ligne plus longue que ne l'est celle-ci, et plus petite que ne l'est celle-là? N'est-ce pas le cas ?

Le jeune garçon : C'est bien mon avis.

Socrate : Parfait. Et continue à répondre en disant ce que tu penses ! Aussi, dis-moi, cette ligne-ci n'était-elle pas longue de deux pieds, tandis que celle-là en avait quatre ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Il faut donc que le côté d'un espace de huit pieds carrés soit plus grand que ce côté de deux pieds, mais plus petit que ce côté de quatre.

Le jeune garçon : Il le faut.

Socrate : Alors essaie de dire quelle est sa longueur, d'après toi.

Le jeune garçon : Trois pieds.

Socrate : En ce cas, s'il faut une ligne de trois pieds, nous ajouterons à cette première ligne sa moitié, et nous obtiendrons trois pieds. Nous aurons donc deux pieds et un autre pied. Et de ce coté-ci, c'est la même chose, deux pieds et un autre pied. Et voici que nous obtenons cet espace dont tu parlais.

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Or si cet espace a trois pieds de ce côté et trois pieds de cet autre côté, sa surface totale n'est-elle pas de trois fois trois pieds carrés ?

Le jeune garçon : Il semble.

Socrate : Mais trois fois trois pieds carrés, combien cela fait-il de pied carrés ?

Le jeune garçon : Neuf.

Socrate : Combien de pieds carrés l'espace double devait-il avoir ?

Le jeune garçon : Huit.

Socrate : Ce n'est donc pas non plus à partir de la ligne de trois pieds qu'on obtient l'espace de huit pieds carrés.

Le jeune garçon : Certainement pas.

Socrate : Mais à partir de quelle ligne ? Essaie de nous le dire avec exactitude. Et si tu préfères ne pas donner un chiffre, montre en tout cas à partir de quelle ligne on l'obtient.

Le jeune garçon : Mais par Zeus, Socrate, je ne sais pas.

Socrate : Tu peux te rendre compte encore une fois, Ménon, du chemin que ce garçon a déjà parcouru dans l'acte de se remémorer. En effet, au début il ne savait certes pas quel est le côté d'un espace de huit pieds carrés – tout comme maintenant non plus il ne le sait pas encore -, mais malgré tout, il croyait bien qu'à ce moment-là il le savait, et c'est avec assurance qu'il répondait, en homme qui sait et sans penser éprouver le moindre embarras pour répondre ; mais à présent le voilà qui considère désormais qu'il est dans l'embarras, et tandis qu'il ne sait pas, au moins ne croit-il pas non plus qu'il sait.

Ménon : Tu dis vrai.

Socrate : En ce cas n'est-il pas maintenant dans une meilleure situation à l'égard de la chose qu'il ne savait pas ?

Ménon : Oui, cela aussi, je le crois.

Socrate : Donc en l'amenant à éprouver de l'embarras et en le mettant, comme la raie-torpille, dans cet état de torpeur, lui avons-nous fait du tort ?

Ménon : Non, je ne crois pas.

Socrate : Si je ne me trompe, mous lui avons bien été utiles, semble-t-il, pour qu'il découvre ce qu'il en est. En effet, maintenant, il pourrait en fait, parce qu'il ne sait pas, se mettre à chercher avec plaisir, tandis que tout à l'heure, c'est avec facilité devant beaucoup de gens et un bon nombre de fois, qu'il croyait s'exprimer correctement sur la duplication du carré en déclarant qu'il faut une ligne deux fois plus longue.

Ménon : C'est probable.

Socrate : Or penses-tu qu'il entreprenait de chercher ou d'apprendre ce qu'il croyait savoir et qu'il ne sait pas, avant d'avoir pris conscience de son ignorance, de se voir plongé dans l'embarras et d'avoir aussi conçu le désir de savoir ?

Ménon : Non, je ne crois pas, Socrate.

Socrate : En conséquence, le fait de l'avoir mis dans la torpeur lui a-t-il été profitable ?

Ménon : Oui, je crois.

Socrate : Examine donc ce que, en partant de cet embarras, il va bel et bien découvrir en cherchant avec moi, moi qui ne fais que l'interroger sans rien lui enseigner. Surveille bien pour voir si tu me trouves d'une façon ou d'une autre en train de lui donner enseignement ou explication au lieu de l'interroger pour qu’il exprime ses opinions. Dis-moi donc, mon garçon, n’avons-nous pas là un espace de quatre pieds carrés ? Comprends-tu ?

Le jeune garçon : Oui, je comprends.

Socrate : Pourrions-nous lui ajouter cet autre espace, qui lui est égal ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Et aussi ce troisième espace qui est égal à chacun des deux autres ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : En ce cas, nous pourrions combler cet espace-ci dans le coin ?

Le jeune garçon : Oui, tout à fait.

Socrate : Les quatre espaces que voici, ne seraient-ils pas égaux ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Que se passe-t-il alors ? Ce tout qu’ils forment, de combien de fois est-il plus grand que cet espace-ci ?

Le jeune garçon : Quatre fois plus grand.

Socrate : Mais il nous fallait obtenir un espace deux fois plus grand, ne t’en souviens-tu pas ?

Le jeune garçon : Oui, tout à fait.

Socrate : Or n’a-t-on pas ici une ligne qui va d’un coin à un autre coin et coupe en deux chacun de ces espaces ?

Le jeune garçon : Oui.

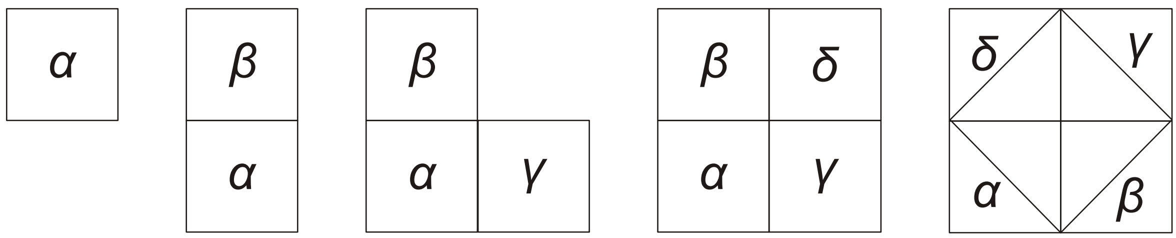
Socrate : Et n’avons-nous pas là quatre lignes, qui sont égales, et qui enferment cet espace-ci ?

Le jeune garçon : Oui, nous les avons.

Socrate : Eh bien, examine la question: quelle est la grandeur de cet espace ?

Le jeune garçon : Je ne comprends pas.

Socrate : Prenons ces quatre espaces qui sont là, chaque ligne ne divise-t-elle pas chacun d’eux, à l’intérieur, par la moitié ? N’est-ce pas le cas ?



Le jeune garçon : Oui.

Socrate : Or, combien de surfaces de cette dimension se trouvent dans ce carré-ci ?

Le jeune garçon : Quatre.

Socrate : Eh combien dans ce premier espace ?

Le jeune garçon : Deux.

Socrate : Mais, combien de fois deux font quatre ?

Le jeune garçon : Deux fois.

Socrate : Donc ce carré, combien a-t-il de pieds ?

Le jeune garçon : Huit pieds carrés.

Socrate : Sur quelle ligne est-il construit ?

Le jeune garçon : Sur celle-ci.

Socrate : Sur la ligne qu’on trace d’un coin à l’autre d’un carré de quatre pieds ?

Le jeune garçon : Oui.

Socrate : C’est justement la ligne à la quelle les savants donnent le nom de « diagonale ». En sorte que, si cette ligne s’appelle bien « diagonale », ce serait à partir de la diagonale que, d’après ce que tu dis, serviteur de Ménon, on obtiendrait l’espace double.

Le jeune garçon : Oui, parfaitement Socrate.