ΒΑΡΒΑΚΕΙΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **3**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23-12-2010 *ΤΜΗΜΑ*: **Ζ4**

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ***90 Λ.*** **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΕΩΡΓ. ΚΟΣΥΒΑΣ**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:……..……

ΓΡΑΠΤΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Να απαντήσετε σε όλα τα παρακάτω θέματα.

ΘΕΜΑ 1ο (15+5+5 μον)

Α. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη **Σ**ωστό ή **Λ**άθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.* ***(15 μον)***

α) *Αν η $f: R \to R$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε μεταξύ των ριζών της **f(x)=0**, η **f** διατηρεί σταθερό πρόσημο.*

β) *Για τις συναρτήσεις $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ισχύει $f(x)=g(x)$.*

γ) *Αν f συνεχής στο Α=(α, β) τότε το σύνολο τιμών f(A) της f είναι ανοιχτό διάστημα.*

δ) *Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} δεν βρίσκονται πάντα πάνω στην ευθεία y=x.*

ε) *Αν η συνάρτηση f, είναι ορισμένη στο [α, β] και συνεχής στο $(\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α, β] μια μέγιστη τιμή.*

Β. *Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής; Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1;* ***(5 μον)***

Γ. *Αν z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0,\ \alpha,\beta,\gamma \in R,\ \alpha \neq 0$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ και $\Delta<0$, να δείξετε ότι οι ρίζες της είναι: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$.* ***(5 μον)***

ΘΕΜΑ $2^{ο}$	
ΒΑΘΜΟΙ **9 μον.**	**Α.** Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει : $4f(x^2) - f^2(x) \geq 4$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η f **δεν** αντιστρέφεται.
8 μον.	**Β.** Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύουν : • $xf(x) \geq ημ2x + 2010x$, για κάθε $x \in R$ και • $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = κ + 1$.
8 μον.	Να υπολογίσετε την τιμή του **κ**. **Γ.** Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x \to 2}\left(f^3(x) + f(x)\right) = 10$. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$.

ΘΕΜΑ 3^{ο}	
ΒΑΘΜΟΙ **3+3+4μον.**	**A.** Δίνονται οι συναρτήσεις: $\mathbf{f(x) = -ln(x-1)}$ και $\mathbf{g(x) = e^{2x}}$. **α)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\mathbf{h(x)} = f(x) - g(x)$ ως προς τη <u>μονοτονία στο πεδίο ορισμού της</u>. **β)** Να βρείτε το <u>σύνολο τιμών</u> της συνάρτησης **h**. **γ)** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων **f** και **g** έχουν <u>ένα ακριβώς κοινό σημείο</u>.
3+5 μον.	**B.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$ για τις οποίες ισχύουν : • Οι f και g είναι γνησίως φθίνουσες στο R, • Η f είναι συνεχής στο R, • $f(g(x)) = g(f(x))$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι: **α)** Η συνάρτηση $\mathbf{h(x)} = f(x) - x$, $x \in R$ είναι <u>γνησίως φθίνουσα</u>. **β)** Υπάρχει <u>ακριβώς ένα</u> $x_0 \in R$, ώστε $f(x_0) = x_0$.
7 μον.	**Γ.** Δίνεται συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύουν : • $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$. • η f είναι περιττή στο R. • Η f είναι συνεχής στο R. Να δείξετε ότι το σημείο $(\mathbf{x_0}, \mathbf{-4})$ <u>ανήκει στην</u> $\mathbf{C_f}$.

ΘΕΜΑ 4^{ο}	
ΒΑΘΜΟΙ **7 μον.**	**Α.** Δίνεται συνάρτηση $f:[2009,\ 2011]\to R$, για την οποία ισχύουν : • Η f είναι συνεχής στο $[2009,\ 2011]$, • Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2009,\ 2011]$. Να αποδείξετε ότι <u>υπάρχει ένας ακριβώς</u> $x_0\in(2009,\ 2011)$, τέτοιος ώστε : $3f(x_0)=f(2009)+f(2010)+f(2011)$
5+3 μον.	**Β.** Δίνεται συνάρτηση $f:[3,\ 7]\to R$, για την οποία ισχύουν : • Η f είναι συνεχής στο $[3,\ 7]$, • $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in[3,\ 7]$. Επίσης δίνεται μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύουν: $z=\dfrac{f(3)\cdot f(5)}{\sqrt{6}}-i\dfrac{\sqrt{6}}{f(7)}$ και $z=\lvert z\rvert\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}-i\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)$. Να αποδείξετε ότι: **α)** $f(3)\cdot f(5)\cdot f(7)=6$. **β)** $f(x)>0$, για κάθε $x\in[3,\ 7]$.
4+6 μον.	**Γ.** Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\ 1]\to R$, με τύπο $f(x)=1-x^2$. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}. **β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των C_f και $C_{f^{-1}}$.