Είδη συλλογισμού κατά την ομαδοσυνεργατική λύση του προβλήματος του κουμπαρά στην Α΄ Γυμνασίου

Γιώργος Δ. Κόσυβας, Βαρβάκειο Πειραματικό Λύκειο
gkosyvas@yahoo.com

Καθώς μοιράζουμε μια χρηματική αξία τη διαιρούμε και λιγοστεύει. Η γνώση είναι η μόνη αξία που αυξάνει όταν τη μοιραζόμαστε.

Ινδική παροιμία

Περίληψη: Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται ένα διδακτικό πείραμα που διενεργήθηκε στην Α΄ Γυμνασίου. Ανατίθεται στους μαθητές ένα πρόβλημα για το οποίο αυτοί δεν είχαν ακόμα διδαχτεί τη σχετική αλγοριθμική διαδικασία λύσης. Ειδικότερα, τίθεται στους μαθητές μιας τάξης το πρόβλημα των χαρτονομισμάτων του κουμπαρά, που η τυπική του λύση παραπέμπει σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους. Η εν λόγω έρευνα επικεντρώνεται στην ομαδοσυνεργατική λύση του προβλήματος. Τα ευρήματα της έρευνας σκιαγραφούν τον τρόπο με τον οποίο μια ανοικτή κατάσταση προβληματισμού μπορεί να ενεργοποιήσει τους μαθητές να αναπτύξουν πολυποίκιλες μαθηματικές στρατηγικές. Με τη δημιουργία ενός κατάλληλου μαθησιακού περιβάλλοντος οι μαθητές αναδεικνύουν πολλαπλές στρατηγικές όπως η «μέθοδος δοκιμής και πλάνης», οι αριθμητικές εξερευνήσεις και η συντόμευση και γενίκευσή των εκάστοτε λύσεων. Οι μαθητές αδιάλειπτα στοχάζονται και αναστοχάζονται, θέτουν ερωτήματα, ελέγχουν εικασίες, προβάλλουν πειστικά επιχειρήματα και συνανιχνεύουν σύνθετες και βέλτιστες λύσεις. Είναι μια πλούσια δραστηριότητα, όπου η επικοινωνία συνοδεύεται με επαληθεύσεις και αιτιολογήσεις που προάγουν το μαθηματικό συλλογισμό.

Θεωρητικό πλαίσιο

Τα τελευταία χρόνια η έρευνα στη διδασκαλία των μαθηματικών αποδίδει βαρύνουσα σημασία στις κοινωνικοπολιτισμικές προσεγγίσεις τονίζοντας την αλληλεξάρτηση κοινωνικών και ατομικών διαδικασιών κατά την κοινή κατασκευή της γνώσης (Vygotsky 1988). Η μάθηση είναι μία ενεργητική σχέση υποκειμένου-αντικειμένου που είναι άρρηκτα συνυφασμένη με τις κοινωνικο-πολιτισμικές συνθήκες. Στο πλαίσιο αυτό, πολλοί ερευνητές μελετούν τις επικοινωνιακές συνθήκες κάτω από τις οποίες οι μαθητές σχηματίζουν γνώσεις που συναποδέχονται (Cobb 1990, Voigt 1996, Bauersfeld 1995), καθώς και ένα σύστημα από κοινωνικο-μαθηματικούς κανόνες και κριτήρια για την αποδοχή των μαθηματικών επιχειρημάτων κατά τη διαπραγμάτευσή τους στη σχολική τάξη (Yackel & Cobb 1996). «*[...]η κατανόηση ότι οι μαθητές αναμένεται να εξηγήσουν τις λύσεις τους είναι κοινωνικός κανόνας, ενώ η κατανόηση του τι θεωρείται αποδεκτή μαθηματική εξήγηση είναι κοινωνικο-μαθηματικός κανόνας*» (Yackel 2001). Ερευνούν επίσης τις προσδοκίες των δασκάλων από την εφαρμογή ενεργητικών μεθόδων διδασκαλίας, τις απαιτούμενες ικανότητες κατά την αξιολόγηση των επιχειρημάτων και του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών, τις πρακτικές μαθηματικής επιχειρηματολογίας που αναδεικνύουν τις αιτιολογήσεις και τις εξηγήσεις των μαθητών (Cobb et *al*. 1993, McClain & Cobb 2001) και τους πολιτισμικούς κανόνες που ευνοούν την ανάδυση της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης των παιδιών (Maher & Martino 1996).

Η ικανότητα μαθηματικού συλλογισμού είναι θεμελιώδης για τους μαθητές, γιατί από τη μια πλευρά αναδεικνύει την ανάγκη δημιουργίας πειστικών επιχειρημάτων και από την άλλη τη σημασία της κριτικής τους αξιολόγησης. Οι ψυχολόγοι ορίζουν το συλλογισμό ως διαδικασία συντονισμού δεδομένων, ιδεών και πεποιθήσεων για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την αλήθεια (Leighton & Sternberg 2004). Ο μαθηματικός συλλογισμός περιγράφεται από τους Yackel και Hanna (2003) από τη μια πλευρά ως επαγωγή, απαγωγή, συνδυασμός και εξαγωγή συμπερασμάτων για την ποσότητα και τη δομή, και από την άλλη ως «*κοινή δραστηριότητα στην οποία συμμετέχουν οι μανθάνοντες καθώς αλληλεπιδρούν μεταξύ τους κατά τη λύση μαθηματικών προβλημάτων*» (p. 228). Επιπλέον, κατά τη μάθηση των μαθηματικών η υποστήριξη επιχειρημάτων είναι αναγκαία στην αιτιολόγηση και την αποδεικτική διαδικασία. Ο Harel (2007) περιέγραψε ποικίλους τρόπους αιτιολόγησης και απόδειξης από τους μαθητές. Πολλές μελέτες αναφέρονται στις ικανότητες συλλογισμού των μαθητών του Γυμνασίου, όπως και στις αιτιολογήσεις των ισχυρισμών τους καθώς, εργάζονται σε ένα ομαδοσυνεργατικό υποστηρικτικό περιβάλλον (Lampert 1990, Mueller 2007, Noddings 1989). Η μαθηματική μαθησιακή διαδικασία αποκτά νόημα μέσα από την ομαδοσυνεργατική λύση "ανοιχτών προβλημάτων". Η ομαδοσυνεργατική μάθηση τροφοδοτώντας τη συλλογική λύση προβλημάτων από τους ίδιους μαθητές μέσα στις πραγματικές συνθήκες της σχολικής αίθουσας, αποτελεί μία σύγχρονη ανοιχτή πρόκληση που μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού και την προαγωγή της κατανόησης αιτιολογήσεων και γενικεύσεων (Leikin & Zaslavsky 1997). Η εργασία σε ομάδες αποτελεί ένα ευνοϊκό κοινωνικό πλαίσιο για την ανάδειξη των γνωστικών συγκρούσεων και την αντιπαράσταση απαντήσεων και επιχειρημάτων (Johnson & Johnson 1990, Webb 1989).

Παρότι το ανοικτό πρόβλημα ως μέσο προσέγγισης μαθηματικών εννοιών σπανίζει στη διδακτική πρακτική, στις προθέσεις των συντακτών των νέων βιβλίων του Γυμνασίου η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και τα ανοιχτά προβλήματα δεν απουσιάζουν. Αναφέρεται χαρακτηριστικά: *Ο δάσκαλος πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές στην υιοθέτηση «ενεργητικών μεθόδων» μάθησης. Βασικό εργαλείο προς την κατεύθυνση αυτή αποτελούν οι μαθησιακές δραστηριότητες που περιλαμβάνουν ερευνητικές εργασίες και εργασία σε μικρές ομάδες μαθητών.* (Βιβλίο Εκπαιδευτικού Α΄ Γυμνασίου, 2007, σ. 32). Επίσης, στο ίδιο βιβλίο γίνεται αναφορά στα λεγόμενα ανοιχτά προβλήματα. *Γενικά θα ονομάζουμε ανοιχτό το πρόβλημα που μπορεί να ερμηνευτεί με πολλούς τρόπους και επομένως δέχεται διαφορετικές λύσεις* (στο ίδιο, σ. 33). Στα “ανοιχτά προβλήματα” η αρχική ή η τελική κατάσταση δεν είναι επακριβώς προσδιορισμένες (Pehkonen 1995) και μπορούν να λύνονται με πολλαπλές σωστές στρατηγικές. Οι μαθητές δεν κατανοούν αμέσως ποια είναι τα δεδομένα και πού πρέπει να στηριχθούν για να βρουν το ζητούμενο. Συχνά πρέπει να επιδοθούν σε μία ερευνητική δραστηριότητα και να βρουν τη λύση μετά από πολλαπλές δοκιμές, αιτιολογήσεις εικασιών και πρωτότυπους συλλογισμούς. Τα ανοιχτά προβλήματα είναι τα πιο ενδεδειγμένα για ομαδική δραστηριότητα (Arsac & Mante 2007, Κόσυβας 1995).

Σε όλο τον κόσμο έγιναν πολλές απόπειρες με εναλλακτικές διδακτικές μεθόδους στα μαθηματικά που συχνά συμπλέουν με τον κοινωνικο-πολιτισμικό κονστρουκτιβισμό. Μεταξύ αυτών είναι και η ανοιχτή προσέγγιση και αναπτύχτηκε τη δεκαετία του 70 στην Ιαπωνία (Becker & Shimada 1997). Διεθνώς η μαθηματική διδασκαλία με χρήση ανοιχτών προβλημάτων συνδέεται με την κατανόηση και τη δημιουργικότητα. (Nohda 1991, Silver 1997, Stacey 1995). Όταν χρησιμοποιούμε ανοιχτές δραστηριότητες στη μαθηματική διδασκαλία, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να δράσουν ως ερευνητές μαθηματικοί (Brown 1997). Τα ανοιχτά προβλήματα περιλαμβάνουν πολλούς τύπους προβλημάτων. Πολλά παραδείγματα διαφορετικών τύπων ανοιχτών προβλημάτων υπάρχουν στα κείμενα των Brown & Walter (1983), Charnay (1993), Nohda (1991), Stacey (1995), Silver 1997, Pehkonen (2005) και Κόσυβας (1996α).

Αυτή η εργασία μελετά τις πολλαπλές στρατηγικές και τα είδη συλλογισμού που ανέδειξαν μαθητές της Πρώτης Γυμνασίου καθώς καταγίνονταν με τη λύση ενός ανοιχτού προβλήματος. Ο πειραματισμός μας συγκεντρώνει το ερευνητικό ενδιαφέρον στη συλλογική οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης κατά την ομαδοσυνεργατική λύση προβλήματος.

Το διδακτικό πείραμα

Ο πειραματισμός που θα περιγράψουμε στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε κατά το διδακτικό έτος 2008-09 στο 1^{ο} Πειραματικό Γυμνάσιο Αθήνας. Η τάξη είχε 26 μαθητές και χωρίστηκε από τον εκπαιδευτικό-ερευνητή σε 6 ομάδες (4 των τεσσάρων και 2 των πέντε μαθητών), καθεμιά από τις οποίες στη συνέχεια θα ονομάζουμε Α, Β, Γ, Δ, Ε και ΣΤ. Οι μαθητές για διάστημα περίπου τριών μηνών εξοικειώθηκαν με την ομαδοσυνεργατική λύση προβλημάτων και στη συνέχεια τους προτείναμε το ακόλουθο ανοιχτό πρόβλημα:

Πρόβλημα: *Οι μαθητές μιας τάξης συγκέντρωσαν στον κουμπαρά τους ποσό αξίας 120 ευρώ σε 15 χαρτονομίσματα, των 5 και 10 ευρώ. Πόσα χαρτονομίσματα από κάθε είδος έχουν στον κουμπαρά τους;*

Το προηγούμενο πρόβλημα είναι ένα ανοιχτό πρόβλημα (Arsac & Mante, 2007, Κόσυβας 1996α) που παραπέμπει στην καθημερινή ζωή των μαθητών και μπορεί να λυθεί με πολλαπλές λύσεις. Το πρόβλημα αυτό οι μαθητές της Πρώτης Γυμνασίου αναμενόταν να το λύσουν με γνώσεις Πρακτικής Αριθμητικής και όχι Άλγεβρας, αφού δεν είχαν αποκτήσει ακόμη τέτοιου είδους γνώσεις. Η μαθηματική δομή του προβλήματος παραπέμπει σε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Θέτοντας το πρόβλημα αναμέναμε από τους μαθητές να θέσουν εικασίες και να τις ελέγξουν, να διαχειριστούν τις δοκιμές και να λάβουν υπόψη όλους τους περιορισμούς της εκφώνησης. Μεριμνήσαμε οι αριθμοί που υπεισέρχονται στην εκφώνηση να είναι μικροί, ώστε με το περιορισμένο εύρος δοκιμών και την ευκολία στους νοερούς υπολογισμούς να ευνοείται η εστίαση των μαθητών στην έρευνα του προβλήματος. Αφού λήφθηκε σχετική μέριμνα για την τροποποίηση του προγράμματος, ο συνολικός χρόνος που διατέθηκε για την έρευνα του προβλήματος και τη συζήτηση των λύσεων στην τάξη ήταν 2 συνεχείς διδακτικές (100 λεπτά με συνυπολογισμό ου διαλείμματος). Όλες οι δραστηριότητες του διδακτικού πειράματος βιντεοσκοπήθηκαν. Η εργασία της τάξης εκτυλίσσεται σε τρεις φάσεις :

Φάση ατομικής κατανόησης του προβλήματος (10 λεπτά περίπου) : Οι μαθητές διάβασαν προσεκτικά την εκφώνηση του προβλήματος (είχε μοιραστεί σε ένα φύλλο χαρτί) και κλήθηκαν να αρχίσουν την έρευνα του προβλήματος. Ο δάσκαλος-ερευνητής περνούσε διαδοχικά από όλες τις ομάδες και συζητούσε την εκφώνηση, φροντίζοντας να μη μετατρέψει την ανοιχτή κατάσταση προβληματισμού σε κλειστή. Στην περίπτωση που πολλοί μαθητές είχαν δυσκολίες στην οικειοποίηση του προβλήματος, πραγματοποιήθηκε μία μικρή συζήτηση για την αποσαφήνισή τους σε ολόκληρη την τάξη.

Φάση της έρευνας στις ομάδες συνεργασίας και σύνταξη διαφανειών (30 λεπτά περίπου) : Οι μαθητές αφού κατανόησαν τη λεκτική διατύπωση του προβλήματος και ατομικά επεξεργάστηκαν στρατηγικές, υποθετικές δοκιμές και πιθανές λύσεις, ενεπλάκησαν στις εργασίες της εκάστοτε ομάδας, όπου η έρευνα είναι ομαδική και εξετάζονται όλες οι ατομικές προτάσεις και ενδεχομένως αναζητούνται νέες στρατηγικές και νέες λύσεις. Τα μέλη κάθε ομάδας καλούνται να συμφωνήσουν σχετικά με τη λύση του προβλήματος, την οποία γράφουν πάνω σε μία κοινή διαφάνεια. Στην ομάδα οι μαθητές μοιράζονται και συγκρίνουν τα ευρήματά τους. Ο έλεγχος και η αξιολόγηση των λύσεων συντελείται πρώτα στη μικρή ομάδα. Κάθε ομάδα πρέπει να προσκομίσει μια μόνο γραπτή αιτιολόγηση της λύσης.

Φάση της ανοιχτής συζήτησης σε ολόκληρη την τάξη (60 λεπτά περίπου) : Κάθε προβαλλόμενη διαφάνεια παρουσιάζεται σε ολόκληρη την τάξη για κριτικό έλεγχο. Κάθε εκπρόσωπος κοινοποιεί την κοινή θέση των μελών της ομάδας του στις άλλες ομάδες και αυτές μέσω των εκπροσώπων τους διευκρινίζουν αν η ομάδα τους είναι υπέρ ή κατά και γιατί. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης ξετυλίγονται όλοι οι συλλογισμοί μέσα στην τάξη και οι μαθητές παρακινούνται να σκέφτονται και να διατυπώνουν την προσωπική τους γνώμη, να ελέγχουν εικασίες και να καταλήγουν σε συμπεράσματα που συναποδέχονται. Οι απορριπτόμενες προτάσεις θα ενυπάρχουν διαλεκτικά εκπροσωπούμενες από τα επιχειρήματα με τα οποία θα τις έχουν απορρίψει. Τέτοιες προτάσεις ενδέχεται να διατυπωθούν από άλλα παιδιά στην ολομέλεια, καθώς ίσως η δική τους λύση στηρίζεται σε μία τέτοια απορριφθείσα πρόταση. Οι αποδεκτές προτάσεις ενυπάρχουν στην προτεινόμενη λύση, που υπερβαίνει τις απορριφθείσες προτάσεις και στηρίζεται στα δικά της επιχειρήματα. Ο δάσκαλος δεν είναι εκείνος που επικυρώνει τι είναι σωστό και τι είναι λάθος. Η γενική συζήτηση σε όλη την τάξη είναι το τελικό συλλογικό κόσκινο. Έτσι οι μαθητές εμπλέκονται προσωπικά στην άσκηση κριτικής και υποχρεώνονται να εξηγούν κάθε φορά τις επιλογές τους.

Παρουσίαση και συζήτηση των αποτελεσμάτων κάθε φάσης

Η επεξεργασία των δεδομένων περιλαμβάνει ανάλυση περιεχομένου των βιντεοσκοπημένων συνεδριών καθώς και τη συνεξέταση των γραπτών εργασιών των ομάδων και την παρατήρηση της τάξης. Ακολουθήθηκε μια ποιοτική ανάλυση των δεδομένων ως πιο αποτελεσματικό μέσο αποκάλυψης των στρατηγικών των μαθητών και τους είδους του μαθηματικού συλλογισμού. Οι εργασίες των μαθητών αναλύθηκαν ποιοτικά σύμφωνα με ακόλουθα κριτήρια: ορθότητα, γενίκευση στρατηγικής (συμπεριλαμβανομένων εξηγήσεων και αιτιολογήσεων), τρόποι αναπαράστασης και χρήση συμβολισμού.

Πρώτη φάση: οικειοποίηση του προβλήματος από τους μαθητές (ατομική έρευνα)

Η φάση αυτή δεν εξαντλείται στην απλή ανάγνωση του προβλήματος ή στη μεταβίβαση εντολών ή οδηγιών. Αναμέναμε οι μαθητές να εμπλακούν με ενδιαφέρον στην κατάσταση προβληματισμού, να σκεφτούν τις ιδέες που απαιτούνται για τη λύση, να δημιουργήσουν μία αναπαράσταση του προβλήματος, να αναδιατυπώσουν το πρόβλημα στη δική τους γλώσσα ώστε να γίνει δικό τους πρόβλημα. Διευκρινίζονται τα ζητούμενα και τα δεδομένα, ρυθμίζονται θέματα που σχετίζονται με την οργάνωση της πρακτικής.

Ζητήσαμε από κάθε μαθητή να διαβάσει προσεκτικά και να σκεφτεί το πρόβλημα. Αφού όλα τα παιδιά το διάβασαν έδειχναν ένα είδος αμηχανίας, ίσως επειδή το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν παρέπεμπε σε κάποια γνωστή μέθοδο λύσης, την οποία να έχουν αποκτήσει κατά τη σχολική τους διαδρομή. Στη συνέχεια ένας μαθητής ζωγράφισε στον πίνακα έναν κουμπαρά και έγραψε τα δεδομένα και τα ζητούμενα. Ένας άλλος μαθητής αναδιηγήθηκε το πρόβλημα, βοηθώντας τους συμμαθητές του να θυμηθούν τα βασικά σημεία της εκφώνησης. Ακολούθησε μια μικρή συζήτηση στην οποία αποσαφηνίστηκαν περαιτέρω οι περιορισμοί της εκφώνησης.

Αμέσως μετά ένας μαθητής ανέφερε ότι «*το πρόβλημα θα πρέπει να λυθεί με διαίρεση*». Αντιπροτάθηκε από άλλον μαθητή ότι «*δε λέει πουθενά να μοιράσουμε*». Αναπτύχθηκε ένας μικρός διάλογος στον οποίο ήταν φανερό ότι οι μαθητές αναζητούσαν «λέξεις-κλειδιά», για να «μυριστούν» την αριθμητική πράξη που θα τους οδηγούσε στη λύση. Οι μαθητές προσπαθούσαν να ενεργοποιήσουν τις σχολικές τους εμπειρίες και ίσως να ανασύρουν από τη μνήμη μακράς διάρκειας κάποιο «πρόβλημα αναφοράς», του οποίου είχαν απομνημονεύσει την εκφώνηση και τη λύση ή κάποιο «γενικό σχήμα», που θα ταίριαζε στη συγκεκριμένη περίπτωση. Όμως τέτοιου είδους ενδείξεις ήταν αδύνατο να βρεθούν στις διαθέσιμες πηγές αποθεμάτων (αλγόριθμοι, κανόνες, μέσα), γιατί το εν λόγω πρόβλημα διέφερε από τα προβλήματα καθημερινής ρουτίνας.

Εστιάσαμε το ενδιαφέρον της συζήτησης στους περιορισμούς του προβλήματος. Ρωτήσαμε πόσα ευρώ συνολικά έχει ο κουμπαράς, τι είδους χαρτονομίσματα περιέχει, πόσα είναι όλα μαζί τα χαρτονομίσματα, των 5 και 10 ευρώ. Στην προτροπή ενός μαθητή «*να σπάσουμε τον κουμπαρά για να μάθουμε πόσα χαρτονομίσματα από κάθε είδος περιέχει*», εξηγήθηκε ότι «*ο κουμπαράς είναι φανταστικός και έτσι δεν μπορούμε να τον ανοίξουμε για να μετρήσουμε τα χαρτονομίσματα που περιέχει*». Στη συνέχεια καλέσαμε τους μαθητές να θέσουν ερωτήματα σε θέματα που δεν κατανόησαν ή ίσως παρέμειναν σκοτεινά ή ασαφή. Υπενθυμίσαμε, επίσης, το σεβασμό στους περιορισμούς του προβλήματος που δεν πρέπει να ξεχνούν κατά την επίλυση.

Δεύτερη φάση: παρατήρηση της συνεργατικής λύσης του προβλήματος

Στη φάση αυτή τα παιδιά εργάζονται κατά ομάδες, ερευνούν, προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα, και να διατυπώσουν τη λύση του.

Όλες οι ομάδες, εκτός από τις Β και ΣΤ, μάντεψαν γρήγορα το σωστό αποτέλεσμα και έγραψαν στο χαρτί τη σχετική επαλήθευση. Ορισμένοι μαθητές πίστευαν ότι αφού μάντεψαν στα τυφλά την απάντηση τελείωσε το έργο τους. Άλλοι όμως απέδιδαν σε αυτή την αρχική τους προσπάθεια ένα προσωρινό και όχι τελεσίδικο χαρακτήρα. Μία μαθήτρια της ομάδας ΣΤ ανέφερε:

Μ.: *Θα υπάρχουν στον κουμπαρά 6 πεντάευρα και 9 δεκάευρα. Έχουμε 6×5=30, 9×10= 90, δηλαδή 30+90=120.*

Ερ.-Δασκ.: *Κατάλαβα πώς το βρήκατε. Όμως πώς ξέρετε ότι αυτό είναι σωστό; Τι θα μπορούσατε να γράψετε στη διαφάνεια για να εξηγήσετε ότι αυτό είναι λογικό;*

Μ.: *Εμείς βρήκαμε το σωστό αποτέλεσμα και το επαληθεύσαμε. Να το λύσουμε αλλιώτικα;*

Ερ.: *Από όσα βλέπω βρήκατε έναν τρόπο. Υπάρχουν άλλες λύσεις του προβλήματος; Κάποια από τις λύσεις είναι πιο ενδιαφέρουσα από τις άλλες;*

Μ.: *Ο κουμπαράς θα έχει 6 πεντάευρα και 9 δεκάευρα.*

Ερ.: (απευθύνεται στην τάξη) *Δεν αρκεί να βρείτε το αποτέλεσμα, αλλά θα πρέπει να μπορείτε να εξηγήσετε πώς το βρήκατε. Μέσα στον κουμπαρά υπάρχουν δύο ειδών χαρτονομίσματα των 5 και 10 ευρώ, που σύντομα μπορούμε να τα λέμε δεκάευρα και πεντάευρα. Όμως δεν γνωρίζουμε πόσα υπάρχουν από κάθε είδος. Γιατί όμως τελικά υπάρχουν 6 πεντάευρα και 9 δεκάευρα; Τι θα κάνετε για να το βρείτε; Αναλογιστείτε προσεκτικά, φανταστείτε κάποιο σχέδιο.*

Μετά την προηγούμενη απαίτηση για εξήγηση των υπολογισμών, δεν φαινόταν εύκολη η επινόηση κάποιου σχεδίου που να περιείχε μία αιτιολογημένη λύση του προβλήματος.

Η τετραμελής ομάδα ΣΤ χωρίστηκε σε δύο υποομάδες. Τα δύο κορίτσια εφάρμοζαν μια πορεία στα τυφλά δοκιμάζοντας διάφορα πλήθη πεντάευρων και δεκάευρων. Τα δύο αγόρια έδειχναν δυσφορία προς τη μέθοδο της δοκιμής και πλάνης και πάσχιζαν να βρουν ένα δικό τους σχέδιο λύσης. Στο τέλος τα κατάφεραν και επινόησαν μία μέθοδο λύσης που ονομάσαμε «σχεδόν αλγεβρική» και η οποία θα παρουσιαστεί αναλυτικότερα στη συνέχεια.

Δύο μέλη τη ομάδας Ε, «μυρίστηκαν» το σωστό αποτέλεσμα από τη διπλανή ομάδα και καταπιάστηκαν να βρουν «πώς βγαίνει» και έτσι η ομάδα τους να ξεπεράσει τις άλλες. Ένας άλλος μαθητής της ομάδας Ε έδειξε τη λύση στα άλλα μέλη και επειδή ήταν «κυριαρχικός», δεν εκδηλώθηκαν αντιρρήσεις. Τους είπε:

Δ.: *Θα κάνουμε πρώτα τη διαίρεση 120:2=60, δηλαδή ο κουμπαράς θα έχει 60 ευρώ σε πεντάευρα και 60 ευρώ σε δεκάευρα. Στη συνέχεια κάνουμε άλλες δύο διαιρέσεις, για να βρούμε πόσα είναι τα πεντάευρα και πόσα τα δεκάευρα, δηλαδή θα έχουμε 60:5=12 πεντάευρα και 60:10=6 δεκάευρα.*

Ενθουσιασμένος από τη λύση του, δεν έκανε την απαραίτητη επαλήθευση (αφού 12+6=18 και όχι 15) και πίστευε ότι είχε βρει το σωστό τρόπο λύσης.

Πολύ σύντομα ο τρόπος σκέψης της παραπάνω ομάδας μεταδόθηκε στην ομάδα Β, επειδή λόγω της στενότητας της αίθουσας διδασκαλίας οι δύο ομάδες ήταν πολύ κοντά η μία στην άλλη. Ένας μαθητής αντέγραψε τη λανθασμένη λύση της προηγούμενης ομάδας και την έδειξε στη δική του.

Στη συνέχεια τα μέλη όλων των ομάδων συνεργάζονταν ενθαρρυνόμενα ακατάπαυστα από τον εκπαιδευτικό-ερευνητή, ώστε να μην απογοητευτούν και εκδηλώσουν σημάδια παραίτησης. Οι μαθητές σε όλες τις ομάδες έστρεψαν την προσοχή τους στις αριθμητικές ενδείξεις του προβλήματος και εμφάνισαν πολλές αριθμητικές πράξεις, από τις οποίες άλλες ήταν λανθασμένες και άλλες σωστές. Στις ομάδες κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης άνθισαν και εξελίχτηκαν πολυάριθμες ιδέες και ποικίλες στρατηγικές, ορισμένες από τις οποίες παρουσίασαν οι αντιπρόσωποι των ομάδων και θα δούμε στη συνέχεια.

Τρίτη φάση: μαθηματική συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη (στιγμιότυπα)

Θα περιοριστούμε στην παρουσίαση ορισμένων μόνο όψεων από τις κοινές συζητήσεις στην τάξη. Θα παρουσιασθούν πρώτα οι στρατηγικές των ομάδων που εμφανίζουν αδυναμίες και στη συνέχεια οι πιο ενδιαφέρουσες λύσεις.

Ομάδα Β (Δ. Λ., Κ., Ά., Γκ.): Αυτή η ομάδα είχε επηρεαστεί από τη γειτονική ομάδα Ε αντιγράφοντας τη λύση της. Όμως δέχτηκε τις νύξεις και τις προτροπές που έγιναν με αφορμή αυτό το γεγονός και δοκίμασε νέες ιδέες. Η λύση που παρουσίασε η εκπρόσωπος της ομάδας βασίζεται στην ιδέα της διατήρησης του αθροίσματος των χαρτονομισμάτων του κουμπαρά ($x+y=15$) και στον σταδιακό σχηματισμό του 120 ($5x+10y=120$).

Ά.: *Εμείς δοκιμάσαμε 7 περιπτώσεις με άθροισμα χαρτονομισμάτων 15 και καταλήξαμε στο σωστό αποτέλεσμα το οποίο το ξέραμε, γιατί ήδη το είχαμε βρει στην τύχη. Σκεφτήκαμε να κάνουμε τον πίνακα. Στην αρχή ξεκινήσαμε με 15 πεντάευρα και σιγά-σιγά τα λιγοστεύαμε, ενώ αυξάναμε τα δεκάευρα μέχρι να βρούμε το 120.*

ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΟΚΙΜΩΝ ΚΑΙ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΕΩΝ ΤΗΣ ΟΜΑΔΑΣ Β				
αρίθμηση δοκιμών	**πλήθος δεκάευρων**	**πλήθος πεντάευρων**	**σταθερό άθροισμα χαρτονομισμάτων**	**συνολικό άθροισμα εωρώ κουμπαρά**
1.	15	0	$15+0=15$	$15\cdot10+0\cdot5=150$
2.	14	1	$14+1=15$	$14\cdot10+1\cdot5=145$
3.	13	2	$13+2=15$	$13\cdot10+2\cdot5=140$
4.	12	3	$12+3=15$	$12\cdot10+3\cdot5=135$
5.	11	4	$11+4=15$	$11\cdot10+4\cdot5=130$
6.	10	5	$10+5=15$	$10\cdot10+5\cdot5=125$
7.	9	6	**$9+6=15$**	**$9\cdot10+6\cdot5=120$**

Με τη λύση του προηγούμενου πίνακα διαφώνησαν οι μαθητές της ομάδας Α οι οποίοι υποστήριξαν ότι θα πρέπει να εξαντληθούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις «*για να είμαστε σίγουροι για το αποτέλεσμα*». Η συζήτηση συνεχίστηκε με διατύπωση εικασιών και προβολή πειστικών επιχειρημάτων σχετικά με τη συντόμευση της λύσης και οι μαθητές χρησιμοποίησαν τον πίνακα για τις δοκιμές και επαληθεύσεις τους. Ένας μαθητής διατηρώντας σταθερό το άθροισμα των χαρτονομισμάτων του κουμπαρά και παίρνοντας μικρότερο πλήθος χαρτονομισμάτων των 5 ευρώ και ταυτόχρονα μεγαλύτερο πλήθος των 10 ευρώ παρατήρησε ότι η συνολική αξία του κουμπαρά αυξάνεται. Κάνοντας το αντίθετο ελαττώνεται και έτσι μετά από διαδοχικές διορθώσεις και πειραματικές προσεγγίσεις κατέληξε στη σωστή λύση: 9 δεκάευρα και 6 πεντάευρα. Η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων φάνηκε να κατανοήθηκε από το σύνολο της τάξης γεγονός στο οποίο συνετέλεσαν και οι αριθμοί που δόθηκαν στο προαναφερόμενο πρόβλημα, που είναι προσιτοί (15 χαρτονομίσματα, 120 ευρώ), έτσι ώστε ο πίνακας να κατασκευάζεται εύκολα. Όμως μια τέτοια μέθοδος δεν θα μπορούσε να προσεγγιστεί από τους μαθητές αν οι αριθμοί ήταν μεγαλύτεροι. Σε αυτή την περίπτωση, μόνο η τύχη θα μπορούσε να βοηθήσει στη λύση!

Ομάδα Α (Με., Ρ., Ε., Σ., Γ.Κ.): Ο εκπρόσωπος της ομάδας παρουσίασε σε μία διαφάνεια έναν πίνακα με όλες τις προσθετικές αναλύσεις του 15 (x+y=15). Ανέφερε τα ακόλουθα:

Ρ.: *Στην ομάδα μας, αφού συζητήσαμε πολύ ώρα, αποφασίσαμε να εξετάσουμε όλους τους συνδυασμούς πεντάευρων και δεκάευρων που δίνουν άθροισμα 15 χαρτονομίσματα. Για όλες αυτές τις περιπτώσεις υπολογίσαμε το συνολικό άθροισμα των ευρώ του κουμπαρά. Από όλες αυτές τις περιπτώσεις διαλέξαμε εκείνη που μάς δίνει συνολική αξία 120, γιατί γνωρίζουμε ότι ο κουμπαράς έχει 120 ευρώ.*

Στον πίνακα που δημιούργησαν οι αριθμητικές εξερευνήσεις της ομάδας είναι ταξινομημένες. Στις δύο τελευταίες στήλες γίνεται ο υπολογισμός του αθροίσματος των χαρτονομισμάτων του κουμπαρά (x+y=15) και της αντίστοιχης συνολικής χρηματικής αξίας σε ευρώ (5x+10y=120). Η καταγραφή όλων των συνδυασμών χαρτονομισμάτων σε πίνακα βοηθά τη συγκριτική συσχέτιση και τον εντοπισμό της λύσης του προβλήματος. Επιπλέον, εφόσον όλοι οι άλλοι συνδυασμοί χαρτονομισμάτων των 5 και 10 ευρώ δεν οδηγούν στο σχηματισμό του 120, η μοναδική λύση είναι 9 δεκάευρα και 6 πεντάευρα. Μετά την παρουσίαση αυτής της λύσης μία μαθήτρια είχε την ιδέα να εξεταστούν μόνο οι περιπτώσεις με άρτιο πλήθος χαρτονομισμάτων των 5 ευρώ.

Σ. : *Μού φαίνεται ότι δεν μπορεί να υπάρχουν στον κουμπαρά 9, 7 ή 5 πεντάευρα.*
Ερ.: *Γιατί;*
Σ. : *Γιατί τότε ο κουμπαράς θα είχε 105, 115 ή 125 ευρώ* (παρατηρεί τον πίνακα). *Όμως δεν μπορεί ο αριθμός αυτός να τελειώνει σε 5.*
Ερ. : *Γιατί δεν μπορεί να τελειώνει σε 5;*
Σ. : *Γιατί ο κουμπαράς έχει 120 ευρώ και το 120 τελειώνει σε μηδέν. Ο κουμπαράς πρέπει να έχει 6, 8 ή ζυγό αριθμό χαρτονομισμάτων. Έτσι δεν είναι;*
Ι. : *Ο κουμπαράς δεν μπορεί να έχει μονό αριθμό από πεντάευρα. Αν για παράδειγμα είχε 11 πεντάευρα, θα είχε ...55 ευρώ. Έτσι; Τότε τα δεκάευρα θα ήταν ... 65 ευρώ, δηλαδή 6 δεκάευρα και μισό. Όμως δεν γίνεται να κόψουμε χαρτονομίσματα στη μέση...*

Στην περίπτωση αυτή διατυπώθηκε από μια μαθήτρια η εικασία ότι «*το πλήθος των πεντάευρων είναι περιττός αριθμός*», η οποία καταρρίφθηκε από δύο άλλους μαθητές μετά από πειστική αιτιολόγηση με χρήση μαθηματικών εννοιών που βασιζόταν στην ακόλουθη σκέψη: Αν το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 5 ευρώ είναι περιττός αριθμός, τότε η συνολική αξία των χαρτονομισμάτων του κουμπαρά θα έπρεπε να τελειώνει σε 5. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί το 120 δεν τελειώνει σε 5. Είναι φανερό ότι η εν λόγω ιδέα οδηγεί σε συντόμευση της λύσης που προκύπτει μέσα από έναν πρόσφορο νοητικό χειρισμό των ειδικών περιπτώσεων του πίνακα.

Ομάδα Δ (Π., Σ., Κ., Μ.-Κ.): Η λύση της ομάδας δόθηκε με πίνακα, διαφορετικό από αυτόν των ομάδων Α και Β. Εδώ διατηρείται σταθερή η συνολική χρηματική αξία σε ευρώ (5x+10y=120) και αναζητείται ο κατάλληλος συνδυασμός χαρτονομισμάτων των 5 και 10 ευρώ που σχηματίζουν άθροισμα 15 (x+y=15). Οι εξηγήσεις της εκπροσώπου της ομάδας πήραν τη μορφή του ακόλουθου διαλόγου:

Π.: *Η λύση που βρήκαμε είναι αυτή* (έδειξε τον ακόλουθο πίνακα στη διαφάνεια) *: Στην ομάδα μας σκεφτήκαμε να υποθέσουμε ότι και τα 120 ευρώ που υπάρχουν μέσα στον κουμπαρά είναι όλα πεντάευρα.*

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΟΜΑΔΑΣ Δ				
αρίθμηση αντικαταστάσεων	**πλήθος πεντάευρων**	**πλήθος δεκάευρων**	**συνολικό άθροισμα εωρώ κουμπαρά**	**άθροισμα χαρτονομισμάτων**
1.	24	0	24·5+0·10=120	24+0=24
2.	22	1	22·5+1·10=120	22+1=23
3.	20	2	20·5+2·10=120	20+2=22
4.	18	3	18·5+3·10=120	18+3=21
5.	16	4	16·5+4·10=120	16+4=20
6.	14	5	14·5+5·10=120	14+5=19
7.	12	6	12·5+6·10=120	12+6=18
8.	10	7	10·5+7·10=120	10+7=17
9.	8	8	8·5+8·10=120	8+8=16
10.	6	9	**6·5+9·10=120**	**6+9=15**

Π.: *Αν αυτό ήταν αλήθεια θα έπρεπε να είχαμε 120:5=24 πεντάευρα. Όμως μέσα στον κουμπαρά μας υπάρχουν συνολικά 15 χαρτονομίσματα και όχι 24.*

Δ.: *Λέτε ότι υπάρχουν 15 χαρτονομίσματα που είναι 120 ευρώ. Δεν καταλαβαίνω γιατί να θέλουμε να υπάρχουν 24. Αφού δεν είναι όλα πεντάευρα.*

Π.: *Δεν λέω ότι είναι πραγματικά 24. Ας πούμε ότι ήταν 24! Το ξέρουμε ότι αυτό δεν είναι αλήθεια. Γι αυτό σκεφτήκαμε να ελαττώσουμε τα χαρτονομίσματα. Αν από τα 24 πεντάευρα αφαιρέσουμε δύο πεντάευρα και τα αντικαταστήσουμε με ένα δεκάευρο θα έχουμε πάλι 120 ευρώ (120-2·5+10=120). Έτσι τώρα θα είναι 23 χαρτονομίσματα (24-2+1=23). Συνεχίζοντας έτσι φτιάξαμε τον πίνακα.*

Στον προηγούμενο πίνακα παρατηρούμε τους μαθητές να δοκιμάζουν συνεχείς αντικαταστάσεις, όπου μειώνονται κατά δύο τα χαρτονομίσματα των 5 ευρώ και δίνουν τη θέση τους σε ένα δεκάευρο, δηλαδή αυξάνεται κατά ένα το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 10 ευρώ, ενώ ο κουμπαράς έχει πάντοτε το ίδιο συνολικό ποσό χρημάτων. Η λύση θα έχει βρεθεί όταν το ά-θροισμα των χαρτονομισμάτων θα έχει γίνει 15.

Στη συζήτηση που ακολούθησε μία μαθήτρια κατάφερε να εφεύρει μία άλλη λύση.

Α.: *Ίσως θα μπορούσαμε να βρούμε από την αρχή πόσες αντικαταστάσεις χρειάζονται, χωρίς να φτιάξαμε πίνακα και έτσι να κερδίσουμε χρόνο.*

Ερ.: *Δηλαδή;*

Α. *Λοιπόν! Κάθε αντικατάσταση κατεβάζει τα χαρτονομίσματα κατά ένα και θέλουμε τα 24 χαρτονομίσματα να γίνουν 15. Εντάξει;*

Ερ.: *Για συνέχισε.*

Α. : *Για να βρούμε τις αντικαταστάσεις που θα χρειαστούν από το 24 βγάζουμε 15, δηλαδή 23,22,21,20,19,18,17,16,15. Οπότε βρίσκουμε 9 αντικαταστάσεις* (μετρά με τα δάχτυλα).

Ε.: *Γιατί; Δεν κατάλαβα!*

Ερ.: *Για να καταλάβετε χρειάζεται προσοχή!*

Α.: *Λοιπόν! Έτσι οι αντικαταστάσεις που χρειάζονται είναι 24-15=9. Νομίζω ότι καλύτερα να τις υπολογίσουμε με το μυαλό παρά να τις μετρήσουμε μία μία.*

Μ.- Κ.: *Ούτε να μετράμε με τα δάχτυλα. Εγώ νομίζω ότι χρειάζεται όλος ο πίνακας. Όπως αυτός που φτιάξαμε.*

Ερ.: *Ο καθένας έχει το δικό του τρόπο. Ας τον σεβαστούμε. Σας παρακαλώ μη διακόπτετε. Συνέχισε Α.*

Α.: *Ο πίνακας είναι καλός αλλά θέλει πολύ χρόνο να τον φτιάξουμε. Λοιπόν με τις 9 αντικαταστάσεις θα υπάρχουν στον κουμπαρά 120 ευρώ σε 15 χαρτονομίσματα. Με τις 9 αντικαταστάσεις που θα κάνουμε θα αφαιρεθούν συνολικά 9·2=18 πεντάευρα. Τότε θα έχουμε 24-18=6 πεντάευρα και τέλος θα έχουμε 9 δεκάευρα, αφού 15-6=9.*

Π.: *Ο πίνακας είναι χρήσιμος. Αν δεν είχαμε κάνει τον πίνακα…*

Α.: *Ο πίνακας μάς βόηθησε να βρούμε μια συντομότερη λύση …*

Είναι φανερό ότι η πινακοποίηση υπέβαλε στη μαθήτρια την ιδέα για την περιγραφή γενικών αριθμητικών σχέσεων που οδήγησαν στην προηγούμενη λιτή και συνοπτική λύση, η οποία ισχύει και για μεγάλους αριθμούς. Η λεπτή παρατήρηση της συστηματικής οργάνωσης του πίνακα και ο νοερός συσχετισμός των στοιχείων του συνέβαλαν στην παράλειψη των περιττών υπολογισμών, στην ανακάλυψη σημαντικών κρυμμένων κανονικοτήτων και στη συμπύκνωση της λύσης. Η συρρίκνωση της λύσης δείχνει βαθύτερη κατανόηση. Όμως η επινόηση τέτοιων πρωτότυπων ιδεών αποτελούν εξαίρεση για την πλειονότητα των μαθητών.

Ομάδα Γ (Ά., Ι., Μ. Κρ., Στ., Ν.): Η εκπρόσωπος της ομάδας ανέφερε ότι η ομάδα έλυσε το πρόβλημα με διάφορες δοκιμές και επαληθεύσεις, χωρίς όμως να δημιουργήσει έναν πλήρη πίνακα. Αυτές οι τυχαίες δοκιμές αποτέλεσαν την γραπτή διαφάνεια της ομάδας. Υπήρξε όμως και μία άλλη λύση που επινόησε ένας αλλοδαπός μαθητής, την οποία λόγω διαφωνιών δεν έγραψαν στη συλλογική διαφάνεια, δικαιολογώντας ότι «*δεν την κατάλαβε κανένας από τους υπόλοιπους στην ομάδα*». Στη συνέχεια πήρε το λόγο ο μαθητής και παρουσίασε τη δική του λύση:

Ά.: *Σκέφτηκα να υποθέσω ότι όλα τα χαρτονομίσματα του κουμπαρά είναι δεκάευρα. Τότε στον κουμπαρά θα υπήρχαν 15×10=150 ευρώ. Όμως ξέρουμε ότι ο κουμπαράς έχει 120 ευρώ. Έχουμε μια διαφορά 150-120=30 ευρώ. Για να βρω τα πεντάευρα έκανα διαίρεση 30:5 και βρήκα 6 πεντάευρα, οπότε τα δεκάευρα θα είναι 9.*

…

Ερ.: *Μπορείτε να σκεφτείτε τι εκφράζει το 5;* (απευθύνεται σε όλη την τάξη). *Μπορεί κάποιος άλλος να το εξηγήσει;* (Σιωπή) … Η Σ.

Σ.: *Είναι ο αριθμός των πεντάευρων.*

Ά.: *Όχι δεν είναι ο αριθμός πεντάευρων. Αυτά είναι 6.*

Ερ.: *Τότε τι παριστάνει το 5; Για αναλογιστείτε…* (σιωπή από όλη την τάξη)

Ά.: *Υπάρχει η διαφορά των 30 εωρώ γιατί στον κουμπαρά υπάρχουν και πεντάευρα. Το 30 είναι η διαφορά σε εωρώ ανάμεσα στα δεκάευρα και τα πεντάευρα. Σωστά;*

Ερ.: *Βεβαίως!*

Ά.: *Τότε το βρήκα. Όσες είναι οι διαφορές δεκάευρων-πεντάευρων… τόσα θα είναι και τα πεντάευρα και το 5 …*(σιωπή). *Ναι! Το 5 είναι πόσα ευρώ είναι η μια διαφορά μεταξύ τους. Ναι αυτό είναι! Το βρήκα!*

Ερ.: *Δηλαδή το 5 παριστάνει τη διαφορά χρηματικής αξίας ανάμεσα σε ένα δεκάευρο και είναι πεντάευρο;*

Ά.: *Ναι. Έχουμε 10-5=5. Έτσι θα υπάρχουν στον κουμπαρά 30:5=6 πεντάευρα.*

Ερ.: *Επομένως εξήγησες ότι το 5 εκφράζει τη διαφορά αξίας ανάμεσα σε ένα δεκάευρο και ένα πεντάευρο. Από την άλλη πλευρά η διαφορά που βρήκες ανάμεσα στα δεκάευρα και πεντάευρα θα ήταν 30. Επειδή κάθε πεντάευρο έχει 10-5=5 ευρώ λιγότερα από κάθε δεκάευρο και όλα τα πεντάευρα θα είχαν 30 ευρώ λιγότερα από όλα τα δεκάευρα, θα έχουμε 30:5=6 πεντάευρα και 15-6=9 δεκάευρα. Τι λέτε;*

Ο προηγούμενος διάλογος ξετυλίγει το κουβάρι μιας καινοτομικής λύσης η οποία με την ενθάρρυνση και στήριξη της οπτικής γωνίας του μαθητή από τον διδάσκοντα εξηγείται με λεπτομέρεια. Στην αλληλεπίδραση δασκάλου-μαθητή η μάθηση εμπλέκεται με τη διδασκαλία καθώς ο διδάσκων αναδιατυπώνει, ερμηνεύει και τονίζει τη λύση του μαθητή. Αξίζει να υπογραμμιστεί η σημασία της παρέμβασης του εκπαιδευτικού ώστε οι συλλογισμοί που διατυπώνονται να τεκμηριώνονται με νοερούς υπολογισμούς. Η εν λόγω λύση είναι πολύ έξυπνη και ήταν δύσκολο να συλληφθεί από τους περισσότερους μαθητές, αφού απαιτεί να γεφυρώσουν με μία ολική σύλληψη τα δεδομένα με τα ζητούμενα μέσω ενός σχεδίου όπως αυτό που επινοήθηκε. Ορισμένοι μαθητές φαίνεται ότι αδυνατούσαν να ελευθερώσουν τη σκέψη τους από τις αριθμητικές εξερευνήσεις των πινάκων και να υιοθετήσουν μία ψευδή υπόθεση. Θεώρησαν πολύπλοκη τη στρατηγική που προτάθηκε.

Επιπλέον ο εκπαιδευτικός επισήμανε ότι επειδή στον συγκεκριμένο κουμπαρά το πλήθος των χαρτονομισμάτων ήταν 15 μπορούσαν εύκολα να καταγραφούν όλες οι περιπτώσεις και να γίνει επιλογή της σωστής λύσης. Αν όμως ο κουμπαράς είχε 100 ή 1000 χαρτονομίσματα τότε θα χρειάζονταν αντίστοιχα υπολογιστικά βήματα. Με την ψευδή υπόθεση ότι «*όλα τα χαρτονομίσματα του κουμπαρά είναι δεκάευρα*» η λύση που πρότεινε ο μαθητής υπερβαίνει τις ειδικές περιπτώσεις, είναι σύντομη και εφόσον διευρύνεται το πλαίσιο εφαρμογής της έχει χαρακτήρα γενίκευσης (Harel & Tall 1989).

Ομάδα Ε (Έ., Δ. Τ., Λ., Μ. Κοι.): Αυτή η ομάδα παρά τις σχετικές νύξεις και συστάσεις που είχαμε κάνει παρουσίασε εμμονή στο λανθασμένο τρόπο: 120:2=60, 60:5=12 πεντάευρα και 60:10=6 δεκάευρα. Η λύση της ομάδας αυτής είχε απορριφτεί από τις άλλες ομάδες. Όμως όταν παρουσιάστηκε από την ομάδα Ε στις άλλες ομάδες γέννησε έναν καινούργιο τρόπο λύσης που δεν είχαμε υποπτευτεί. Ένας μαθητής της ομάδας Ε παίρνοντας αφορμή από τη λανθασμένη λύση που είχε προβληθεί στη διαφάνεια διατύπωσε την ακόλουθη πρωτότυπη σκέψη:

Λ.: *Έχουμε τη διαίρεση 120:2=60, νομίζω ότι θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι τα χρήματα του κουμπαρά μοιράζονται εξίσου, δηλαδή 60 ευρώ σε δεκάευρα και 60 σε πεντάευρα ή αλλιώς 6 δεκάευρα και 12 πεντάευρα.*

Διατύπωσε τη σκέψη ότι με τις αυξομειώσεις και τις ανταλλαγές μπορούμε πολύ σύντομα να φτάσουμε στο αποτέλεσμα. Η λύση που έγραψε στον μαυροπίνακα μπορεί να αποδοθεί στον παρακάτω πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ					
αντικα-ταστάσεις	**πλήθος 5/ρων**	**πλήθος 10/ρων**	**χρηματική αξία πεντάευρων**	**χρηματική αξία δεκάευρων**	**σύνολο εωρώ κουμπαρά**
1.	12	6	12·5=60	6·10=60	60+60=120
2.	10	7	10·5=50	7·10=70	50+70=120
3.	8	8	8·5=40	8·10=80	40+80=120
4.	6	9	**6·5=30**	**9·10=90**	**30+90=120**

Η παραπάνω λύση ήταν το ερέθισμα για να σκεφτούν τα παιδιά της τάξης και άλλους σύντομους τρόπους. Ένας μαθητής έκανε τη διαίρεση 120:3=40 και υπέθεσε ότι αυτό το ποσό αντιπροσωπεύει χαρτονομίσματα των 5 ευρώ. «*Τότε αρκούν μόνο οι δύο τελευταίες γραμμές του προηγούμενου πίνακα για να φτάσουμε στη λύση*».

Στη συνέχεια και άλλοι μαθητές μπήκαν στο χορό και άρχισαν να διατυπώνουν νέες εικασίες και να εμπλέκονται στην επαλήθευσή τους. Ένας άλλος μαθητής κάνοντας τη διαίρεση 15:3=5, υπέθεσε ότι «*το ένα τρίτο των χαρτονομισμάτων είναι πεντάευρα*». Τότε ο παρακάτω πίνακας μας οδηγεί άμεσα στη λύση:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΟΚΙΜΩΝ ΚΑΙ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΕΩΝ				
αρίθμηση δοκιμών	**πλήθος δεκάευρων**	**πλήθος πεντάευρων**	**σταθερό άθροισμα χαρτονομισμάτων**	**συνολικό άθροισμα εωρώ κουμπαρά**
1.	10	5	10+5=15	$10\cdot10+5\cdot5=125$
2.	9	6	**9+6=15**	$\mathbf{9\cdot10+6\cdot5=120}$

Η επικοινωνία ήταν πολλαπλά γόνιμη, αφού αποκάλυπτε αναλογικούς ή παρόμοιους συλλογισμούς. Τα επιχειρήματα που προεξάρχουν είναι μαθηματικής φύσης: εικασίες, επαληθεύσεις, αιτιολογήσεις.

Ομάδα ΣΤ (Μυ., Α., Β., Γ. Μ.): Η ομάδα δεν λειτούργησε ενιαία. Χωρίστηκε σε δύο υποομάδες. Η εκπρόσωπος της πρώτης υποομάδας παρουσίασε δύο λύσεις. Η μία αφορούσε την ανεπιτυχή χρήση της μεθόδου δοκιμής και πλάνης, ενώ η άλλη ήταν παρόμοια με τη λύση διαδοχικών προσεγγίσεων που βρέθηκε κατά τη συζήτηση της ομάδας Β. Στην εν λόγω μέθοδο οι μαθητές βρίσκουν τη λύση μετά από δοκιμές. Κάθε νέα δοκιμή επιδιώκει να τροποποιήσει την πλάνη της προηγούμενης. Σταδιακά το λάθος διορθώνεται καθώς οι διαδοχικές δοκιμές πλησιάζουν όλο και περισσότερο στο επιθυμητό αποτέλεσμα (Polya 2001). Στη συνέχεια ακολουθεί η λύση της άλλης υποομάδας, την οποία θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε ότι βασίζεται στη συνεπαγωγή $5x+10y=120 \Rightarrow x+2y=24$ και στην ισότητα $x+y=15$.

Ερ.: *Ας ακούσουμε τώρα και τη δεύτερη λύση. Ο Γ.*

Γ. Μ: *Λοιπόν ο κουμπαράς έχει 15 πεντάευρα και δεκάευρα, αλλά δεν ξέρουμε πόσα είναι τα πεντάευρα και πόσα τα δεκάευρα. Τα ευρώ που έχει συνολικά ο κουμπαράς είναι 120. Το κάθε δεκάευρο είναι πολλαπλάσιο του 5. Έχει δύο πεντάευρα. Έτσι; Αν διαιρέσουμε το 120 με το 5 βρίσκουμε 120:5=24. Νομίζω ότι αν μετρήσουμε μια φορά τα πεντάευρα και δύο τα δεκάευρα βρίσκουμε το 24.*

Ερ.: *Γιατί;*

Γ. Μ: *Το δεκάευρο έχει διπλάσια αξία. Έτσι δεν είναι;*

Ερ. *Βεβαίως. Για συνέχισε.*

Γ. Μ: *Λοιπόν μια φορά ο αριθμός των πεντάευρων του κουμπαρά και μια φορά ο αριθμός των δεκάευρων κάνουν 15. Επίσης μια φορά ο αριθμός των πεντάευρων του κουμπαρά και δύο φορές ο αριθμός των δεκάευρων κάνουν 24. Αν από το 24 αφαιρέσουμε το 15 βρίσκουμε 9 δεκάευρα. Τέλος αν από τα 15 χαρτονομίσματα του κουμπαρά αφαιρέσουμε τα 9 δεκάευρα βρίσκουμε 6 πεντάευρα. Σωστό κύριε;*

Ερ. *Μπράβο! Η λύση είναι απίθανη!*

Με.: *Τι σημαίνει δύο φορές ο αριθμός των δεκάευρων κάνουν 24 ευρώ;*

Γ. Μ: *Όχι 24 ευρώ, αλλά 24 χαρτονομίσματα. Μια φορά κάποια πεντάευρα και δύο φορές από κάποια δεκάευρα κάνουν 24.*

Ο προηγούμενος μαθητής επινόησε μία φαεινή ιδέα, μία ασυνήθιστη λύση, προκαλώντας τις εύλογες αντιδράσεις των συμμαθητών του, οι οποίοι απορούν και αδυνατούν να διεισδύσουν στις περιγραφόμενες ισοδυναμίες και τη σύνδεση τους με το τελικό αποτέλεσμα. Πρόκειται για μία εκπληκτική ανακάλυψη του μαθητή που αναδεικνύει ένα ενδιάμεσο παραστατικό στάδιο ανάμεσα στο αριθμητικό και στο συμβολικό επίπεδο. Χρησιμοποιώντας λεκτικές περιγραφές εκθέτει μια αλληλουχία λογικά ισοδύναμων ισοτήτων που συνθέτουν την αιτιολόγηση της λύσης. Οι εκφράσεις «*αριθμός των πεντάευρων»* και «*ο αριθμός των δεκάευρων*» παριστάνουν απροσδιόριστες ποσότητες που συνεπάγονται νοητικές αφαιρέσεις που δημιουργούν δυσκολίες στους μαθητές. Οι εν λόγω μεταβατικοί χειρισμοί θα μπορούσαν να θεωρηθούν ότι έχουν χαρακτήρα αλγεβρικής γενίκευσης χωρίς τη χρήση μεταβλητής (Radford 2003). Είναι φανερό ότι αυτή η λύση μπορεί να εφαρμοστεί με την ίδια επιτυχία και στην περίπτωση που οι αριθμοί του προβλήματος αντικατασταθούν με μεγαλύτερους. Η αριθμητική κατανόηση αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη του πρώιμου αλγεβρικού συλλογισμού.

Στο τέλος συζητήθηκε σε όλη την τάξη το ερώτημα ποια ήταν ή καλύτερη λύση. Άλλοι θεωρούσαν ότι καλύτερες είναι οι αναλυτικές μέθοδοι των πινακοποιήσεων στις οποίες δοκιμάζονται πολλές λύσεις (μπορεί και όλες) και επιλέγεται η σωστή και άλλοι πίστευαν ότι καλύτερες είναι οι μέθοδοι επινόησης υποθέσεων και η επαλήθευση με αριθμητικές πράξεις ή άλλα επιχειρήματα. Επισημάνθηκε ότι με πρωτότυπους συλλογισμούς οι λύσεις είναι σύντομες και κομψές. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι το πρόβλημα γέννησε νέες παράγωγες λύσεις τις οποίες τα παιδιά έλυσαν με νέες στρατηγικές.

Σύνοψη των ευρημάτων και περαιτέρω συζήτηση

Η ομαδοσυνεργατική λύση του ανοιχτού προβλήματος του κουμπαρά προκάλεσε το ενδιαφέρον όλων των μαθητών και μαθητριών προσφέροντας πολλαπλά κίνητρα μάθησης. Οι μαθητές φάνηκε να ανυπομονούν για την ανοιχτή συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη, καθώς ήθελαν να συγκρίνουν τη λύση της ομάδας τους με τις λύσεις των άλλων ομάδων. Η γενική συζήτηση είναι το συλλογικό κόσκινο όπου η τελική πρόταση κάθε ομάδας μπορεί να καταλήγει στην υπέρβαση-διαφύλαξη των ατομικών και ομαδικών προτάσεις. Στη φάση αυτή έρχονται στο φως πολλαπλές λύσεις και στην ανοιχτή συζήτηση δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να υπερασπιστούν την λύση τους αφενός, αλλά και να την υπερβούν αφετέρου. Τα περισσότερα παιδιά έδειξαν έτοιμα να δεχτούν άλλες λύσεις. Όμως, στην αρχή ορισμένα παιδιά πίστευαν ότι το πρόβλημα έχει ένα μόνο τρόπο λύσης και εξεπλάγησαν από την πλούσια παραγωγή ποικιλίας διαφορετικών λύσεων. Πολύ σύντομα συμφιλιώθηκαν με την ιδέα των πολλαπλών λύσεων ενισχύοντας την άνεσή τους στην εξερεύνηση της κατάστασης, γενικεύοντας πολλαπλές ιδέες και εφευρίσκοντας νέες λύσεις. Αναμφισβήτητα, η λύση του προβλήματος με περισσότερους από έναν τρόπους ήταν πολλαπλά γόνιμη.

Όπως καταδεικνύεται από την παρουσίαση των αποτελεσμάτων οι μαθητές για να αιτιολογήσουν τις λύσεις τους πρόβαλαν ποικίλα επιχειρήματα, τα οποία συνδέονται με διαφορετικά είδη μαθηματικού συλλογισμού. Οι αυθόρμητες στρατηγικές που ακολούθησαν οι μαθητές για τη λύση του προβλήματος μπορούν να χωριστούν σε τρία επίπεδα:

Επίπεδο 1: Αριθμητικές εξερευνήσεις με «δοκιμή και πλάνη» και απαντήσεις χωρίς λογική συνοχή

Στο πρώτο επίπεδο συγκαταλέγονται κυρίως απαντήσεις χωρίς λογική συνοχή που οδηγούν σε λανθασμένη λύση του προβλήματος και ανεπιτυχείς ή επιτυχείς διαδικασίες «δοκιμής και πλάνης». Συχνά οι μαθητές δεν έλεγχαν αν η λύση που έβρισκαν ικανοποιούσε τους αναγκαίους περιορισμούς. Στην περίπτωση που οι μαθητές εφευρίσκουν κατάλληλες στρατηγικές, κάνουν κάποιες παρατηρήσεις και εντοπίζουν απλές σχέσεις ανάμεσα στα δεδομένα και στα ζητούμενα. Στο εν λόγω πρόβλημα διαπιστώσαμε πολλές διαδικασίες λύσης που εντάσσονται στις εξής περιπτώσεις:

Στρατηγικές χωρίς λογική συνοχή: Έχουμε καταγράψει υπολογισμούς χωρίς φανερή σημασία όπως: 15:5=, 15:10=, 120:15=, 3·120=, 1,5·120=,… Στις περιπτώσεις αυτές τα παιδιά δίνουν την εντύπωση ότι «κάνουν οτιδήποτε». Λειτουργούν σύμφωνα με το «διδακτικό συμβόλαιο», όμως ερμηνεύουν επιφανειακά την εκφώνηση. Επιπλέον διαπιστώσαμε μια μεθοδολογία χωρισμού σε διαδοχικά βήματα: «τα *120 ευρώ του κουμπαρά πόσα δεκάευρα σχηματίζουν;*» (120:10=12), «τα *120 ευρώ του κουμπαρά πόσα πεντάευρα σχηματίζουν;*» (120:5=24) ή ακόμα 15:10=1,5 και 15:5=3. Αυτός ο τρόπος χειρισμού των δεδομένων παραπέμπει άμεσα στις αριθμητικές γνώσεις των μαθητών από το δημοτικό σχολείο σύμφωνα με τις οποίες ένα πρόβλημα τεμαχίζεται σε επιμέρους ερωτήματα τα οποία προσεγγίζονται διαδοχικά.

Ανεπιτυχείς ή επιτυχείς στρατηγικές «δοκιμής και πλάνης»: Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε συχνά κατά τις φάσεις της ατομικής και συλλογικής έρευνας του προβλήματος. Ο πειραματισμός με αυθαίρετα ζεύγη αριθμών χρησιμοποιήθηκε αρκετές φορές κατά τρόπο εσφαλμένο, ιδιαίτερα όταν λειτουργούσαν στα τυφλά ή όταν παραβίαζαν τους περιορισμούς του προβλήματος. Σε ορισμένες περιπτώσεις οι μαθητές μάντεψαν τη σωστή λύση του προβλήματος. Η τύχη τούς χαμογέλασε και έτσι βρήκαν ένα ευνοϊκό παράδειγμα που ικανοποιεί τα δοσμένα κριτήρια. Αφού στο πρόβλημα του κουμπαρά οι αριθμοί που υπεισέρχονται είναι μικροί (15 χαρτονομίσματα, 120 ευρώ), το μέγεθος του δειγματικού χώρου είναι μικρό (16 συνδυασμοί χαρτονομισμάτων τω 5 και 10 ευρώ) και η πιθανότητα εύρεσης του σωστού αποτελέσματος μεγάλη (Watson & Mason 2005).

Στρατηγικές που έχουν λογική συνοχή με τη μία συνθήκη του προβλήματος: Η λύση του προβλήματος ανάγεται στην εύρεση ενός ζεύγους αριθμών που επαληθεύει την εξίσωση 5x+10y=120 χωρίς να συνεξετάζουν την επαλήθευση της άλλης, δηλαδή της x+y=15 ή και αντίστροφα. Για παράδειγμα η λύση επιτυγχάνεται με κατασκευή του αριθμού 120 μέσω αυξομειώσεων των πεντάευρων και δεκάευρων ή με αυθαίρετη εκτίμηση του ενός είδους χαρτονομισμάτων και υπολογισμού του άλλου με αριθμητικές πράξεις. Η μέθοδος της δοκιμής και πλάνης εφαρμόζεται στη μια συνθήκη του προβλήματος (x+y=15), ενώ αγνοείται η άλλη.

Από τη «δοκιμή και πλάνη» στη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων: Με αφορμή τις λύσεις των ομάδων Β και ΣΤ παρακολουθήσαμε μια πορεία την οποία τα παιδιά προοδευτικά τροποποιούν καθώς διαπιστώνουν ότι υπάρχει διαφορά σε σχέση με το στόχο τους. Την αναδιατυπώνουμε σύντομα:

> Αν τα 15 χαρτονομίσματα του κουμπαρά ήταν δεκάευρα, τότε η συνολική αξία θα ήταν 150 ευρώ, ενώ αν όλα ήταν πεντάευρα τότε ο κουμπαράς θα είχε 75 ευρώ. Όμως επειδή το περιεχόμενο του κουμπαρά είναι 120 ευρώ πρέπει να δοκιμαστούν κατάλληλοι ενδιάμεσοι συνδυασμοί:
>
> Με 11 δεκάευρα και 4 πεντάευρα βρίσκουμε 130 ευρώ.
> Με 7 δεκάευρα και 8 πεντάευρα βρίσκουμε 110 ευρώ.
>
> Νέες δοκιμές πλησιάζουν περισσότερο το 120:
>
> Με 10 δεκάευρα και 5 πεντάευρα βρίσκουμε 125 ευρώ.
> Με 8 δεκάευρα και 7 πεντάευρα βρίσκουμε 115 ευρώ.
>
> Τέλος δοκιμάζοντας 9 δεκάευρα και 6 πεντάευρα βρίσκουμε 120.

Στη μέθοδο αυτή οι μαθητές δεν πέφτουν κατά λάθος πάνω στη σωστή λύση, αλλά καταγίνονται με μελετημένες δοκιμές. Θεωρούμε ότι αδικούμε την προηγούμενη μέθοδο όταν τη θεωρούμε μια «τυφλή πορεία μετ'εμποδίων» (Polya 2001). Κάθε νέα δοκιμή είναι αιτιολογημένη, γίνεται με βάση την προηγούμενη και την βελτιώνει. Προοδευτικά η πλάνη διορθώνεται, καθώς οι διαδοχικές δοκιμές πλησιάζουν όλο και περισσότερο στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Γι' αυτό είναι καλύτερα να μιλάμε για «πολλαπλές διαδοχικές δοκιμές», «διαδοχικές διορθώσεις» ή «διαδοχικές προσεγγίσεις» (Polya 2001). Η εν λόγω μέθοδος έχει αυτοδύναμη αξία και δεν θα πρέπει να αποθαρρύνονται οι μαθητές από τη χρήση της.

Επίπεδο 2: Αριθμητικές εξερευνήσεις και αιτιολογήσεις

Στο δεύτερο επίπεδο οι στρατηγικές των μαθητών είναι πιο συστηματικές. Οι παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι οι περισσότεροι από τους μαθητές που χρησιμοποίησαν στρατηγικές του προηγούμενου επιπέδου ήταν ικανοί να τις αναθεωρούν όταν διαπίστωναν ότι οι στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν ήταν ανεπαρκείς. Η ευέλικτη χρήση παραδειγμάτων και ειδικών περιπτώσεων αποτελούν σημεία εκκίνησης, που διευκολύνουν τις νοερές αριθμητικές διερευνήσεις και την προβολή πειστικών επιχειρημάτων. Συνήθως πινακοποιούν τις παρατηρήσεις σε οργανωμένες δομές. Από τις καταγραφές (πλήρεις ή περιορισμένου εύρους) επιλέγουν την αριθμητική λύση που ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες του προβλήματος. Στο πλαίσιο της μαθηματικής επικοινωνίας, διατυπώνουν και ελέγχουν εικασίες και προβάλουν αιτιολογήσεις (Κόσυβας 2008). Ωστόσο οι λύσεις τους δεν είναι οι συντομότερες δυνατές.

Εμφανίστηκαν οι στρατηγικές «σταθερού πλήθους χαρτονομισμάτων κουμπαρά» και «σταθερού συνολικού χρηματικού ποσού κουμπαρά». Τα ευρήματα αυτά συμφωνούν με άλλες ανάλογες έρευνες (Porcheron & Guillaume 1984, Silver et *al*. 1990). Οι προαναφερόμενες στρατηγικές οδήγησαν σε δύο τύπους πινάκων:

- Στον πρώτο τύπο, που παρατηρήθηκε κυρίως στις ομάδες Α και Β, οι μαθητές διατηρούν σταθερό το άθροισμα των χαρτονομισμάτων του κουμπαρά ($x+y=15$) και σχηματίζουν διαδοχικά αθροίσματα του 15, τα οποία επαληθεύουν προσπαθώντας να δημιουργήσουν προοδευτικά το 120 ($5x+10y=120$).
- Στο δεύτερο τύπο (ομάδα Δ) πίνακα εργάζονται αντίστροφα, δηλαδή ξεκινούν από τις συνθέσεις του 120, τις οποίες εφευρίσκουν με τους τρόπους που αναφέραμε παραπάνω και στη συνέχεια προβαίνουν σε επαληθεύσεις για να διαπιστώσουν αν σχηματίζουν άθροισμα 15. Στην περίπτωση αυτή διενεργείται απαρίθμηση αντικαταστάσεων: Έχουμε συνεχείς αντικαταστάσεις, όπου μειώνονται κατά δύο τα χαρτονομίσματα των 5 ευρώ και δίνουν τη θέση τους σε ένα χαρτονόμισμα των 10 ευρώ, δηλαδή αυξάνεται κατά ένα το πλήθος των δεκάευρων, ενώ ο κουμπαράς έχει πάντοτε το ίδιο συνολικό ποσό χρημάτων.

Η οργανωμένη καταγραφή όλων των περιπτώσεων σε έναν πίνακα απαιτεί χρόνο, όμως έχει σημαντική παιδαγωγική αξία. Παρότι οι αριθμητικές πράξεις που καταχωρίζονται στον πίνακα είναι βασικές και επαναλαμβανόμενες και η ισορροπία γέρνει περισσότερο προς τις αριθμητικές εξερευνήσεις παρά προς την πειστική δύναμη της επεξεργασμένης μαθηματικής επιχειρηματολογίας, ενυπάρχει μια επιστημονική μέθοδος που απαιτεί ακριβή και οργανωμένη επικύρωση, παρέχοντας εμπιστοσύνη στους μαθητές. Για αυτό δεν θεωρούμε ότι θα πρέπει να αποτρέπουμε τους μαθητές από τη χρήση της εμπειρικής μεθόδου πινακοποίησης. Η επίδειξη του πίνακα προκαλεί προβληματισμό που διευκολύνει την παρατήρηση δομών και σχέσεων. Οι μαθητές διαπιστώνουν ομοιότητες και διαφορές, βρίσκουν κοινές ιδιότητες, εφευρίσκουν βελτιωμένα επιχειρήματα, επανεξετάζουν νέες στρατηγικές και καταφέρνουν να επικοινωνούν μέσω εικασιών και αιτιολογήσεων. Όλη αυτή η πλούσια αριθμητική εμπειρία προετοιμάζει το δρόμο προς την άλγεβρα.

Επίπεδο 3: Συντόμευση και γενίκευση της λύσης

Στο τρίτο επίπεδο οι μαθητές, τόσο στις ομάδες όσο και σε όλη την τάξη, αιτιολογούν τις εικασίες τους και τελειοποιούν τις στρατηγικές τους επινοώντας κομψές και οικονομικές λύσεις που χαρακτηρίζονται από αναδιατύπωση και πρωτότυπη οργάνωση της λογικής επιχειρηματολογίας. Είναι βελτιωμένες στρατηγικές που δεν στηρίζονται ούτε στην τύχη ούτε στην πλήρη καταγραφή πολλών περιπτώσεων, που δεν είναι αναγκαίες. Αξιοποιούν τα εμπειρικά στοιχεία του προβλήματος και αντιμετωπίζουν με επιτυχία άλλα ίδια προβλήματα με μεγάλους αριθμούς. Έτσι έχουν χαρακτήρα αλγεβρικής γενίκευσης, αφού η μοναδική αριθμητική απάντηση του προβλήματος μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση. Έτσι γίνεται φανερή η στενή σύνδεση αριθμητικού και αλγεβρικού συλλογισμού. Η αλγεβρική σκέψη δεν συνδέεται αυτόματα με τη χρήση γραμμάτων. Όπως υποστηρίζει ο Radford (2008) οι κινέζοι μαθηματικοί σκέφτονταν με αλγεβρικούς τρόπους, χωρίς να χρησιμοποιούν αλγεβρικά σύμβολα και ο Ευκλείδης χρησιμοποιούσε γράμματα χωρίς να σκέπτεται αλγεβρικά. Οι λύσεις αυτές είναι σύνθετες και επιτηδευμένες, που περιλαμβάνουν εκλεπτυσμένες μεθόδους βασισμένες στην εισαγωγή υποθέσεων στο πρόβλημα, αναπτύσσοντας γενικευτικό συλλογισμό, αριθμητικό, ή σχεδόν αλγεβρικό. Αυτό το χαρακτηριστικό γνώρισμα τις τοποθετεί σε σχέση υπεροχής σε σύγκριση με τις αναποτελεσματικές πινακοποιήσεις.

Επιπλέον, καθώς οι μαθηματικοί συλλογισμοί των μαθητών και των μαθητριών είναι άμεσοι και εύγλωττοι, πλεονεκτούν από τις τυποποιήσεις στις οποίες προεξάρχει ο μηχανικός αλγοριθμικός χειρισμός, που συχνά καταλήγει σε συμβολική ανακλαστική συμπεριφορά επιφέροντας την απώλεια του νοήματος σημαντικών ιδεών. Έτσι τα μαθηματικά υποβιβάζονται σε άκριτες δεξιότητες αποστήθισης, που φαντάζουν μυστηριώδεις και άχρηστες στον πραγματικό κόσμο. Μια μέθοδος αλγεβρικής λύσης στο προαναφερόμενο πρόβλημα που διδάσκεται στην Γ΄ Γυμνασίου είναι η ακόλουθη (δεν παρατηρήθηκε αυτή η στρατηγική στην Α' Γυμνασίου).

> *«Αν παραστήσουμε με x το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 5 ευρώ και με y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 10 ευρώ τότε η εύρεση της λύσης ανάγεται στη λύση ενός συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.*
>
> $$\begin{cases} x + y = 15 \\ 5x + 10y = 120 \end{cases}$$
>
> *Το προηγούμενο σύστημα γράφεται:*
>
> $$\begin{cases} x + 2y = 24 \\ x + y = 15 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} (x + y) + y = \\ (x + y) = 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad y = 24 - 15$$
>
> *Έτσι βρίσκουμε:*
>
> $$y=9$$
>
> *Τότε η δεύτερη εξίσωση του συστήματος δίνει:* $x + 9 = 15$ ή $x=15-9$. *Τελικά:*
>
> $$x=6$$
>
> *Επομένως στον κουμπαρά της τάξης υπάρχουν 6 χαρτονομίσματα των 5 ευρώ και 9 χαρτονομίσματα των 10 ευρώ».*

Η προαναφερόμενη λύση, που βρίσκεται σε απόλυτη αντιστοιχία με την σχεδόν αλγεβρική λύση που επινοήθηκε από τον μαθητή, είναι σύντομη, κομψή και αποτελεσματική. Η χρήση των γραμμάτων ως αφηρημένα αριθμητικά σύμβολα που παριστάνουν τις άγνωστες μεταβλητές του γραμμικού συστήματος αποτελεί μετεξέλιξη των άτυπων στρατηγικών. Η εν λόγω μέθοδος απαιτεί τη μετάφραση της καθημερινής γλώσσας στην αλγεβρική γλώσσα. Μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία τόσο για μικρούς, όσο για μεγάλους αριθμούς. Δεν προαπαιτεί την επινόηση κάποιας πρωτότυπης στρατηγικής και έτσι αποδεικνύεται αποτελεσματική σε ένα μεγάλο εύρος ανάλογων προβλημάτων. Λίγη εξοικείωση με την αλγεβρική γλώσσα είναι αναγκαία. Συνιστά το επόμενο στάδιο στο οποίο φτάνουν οι μαθητές όταν βρίσκονται στην Γ΄ Γυμνασίου. Ωστόσο, η αλγεβρική γενίκευση περιλαμβάνει μόνο ορισμένες όψεις του ειδικού, ενώ στην ειδική περίπτωση ενυπάρχουν επιπρόσθετα μαθηματικά πλεονεκτήματα (δομές, ιδιότητες, κανονικότητες) που συνήθως παραμένουν στην αφάνεια, όμως στο διδακτικό μας πείραμα αναδείχτηκαν στις πρωτότυπες λύσεις των μαθητών. Επιπλέον, μαζί με την ισχυρή δύναμη των αλγεβρικών συμβόλων συνυπάρχει η απουσία αναφορικού νοήματος. Η αποσύνδεσή τους από τις άμεσες εμπειρίες και τον πραγματικό κόσμο στα μάτια των παιδιών τα κάνει ακατανόητα και αυθαίρετα.

Τέλος, μπορούμε να γενικεύσουμε κι άλλο το πρόβλημα αντικαθιστώντας τους αριθμούς του δεύτερου μέλους με παραμετρικές μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή δεν απαιτείται ούτε κάποια πρωτότυπη έμπνευση ούτε υπερβολική εύνοια της τύχης. Η λύση επιταχύνεται με την τυπική μέθοδο χειρισμού αλγεβρικών συμβόλων παρέχοντας απόλυτη εγγύηση. Η εν λόγω γενίκευση προσεγγίζεται στο Λύκειο.

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης φανερώνουν ότι οι 5 από τις 6 ομάδες έλυσαν το πρόβλημα του κουμπαρά με πολλαπλές αυθόρμητες στρατηγικές, τις οποίες οι μαθητές δεν είχαν διδαχτεί. Μάλιστα οι περισσότεροι από τους 26 μαθητές επέδειξαν εντυπωσιακές ικανότητες διατύπωσης εικασιών, εκθέτοντας με δικά τους πρωτογενή μέσα λογικά τεκμηριωμένες πορείες. Από τις λύσεις ξεχωρίζουν τρεις πρωτότυπες και μοναδικές λύσεις που χαρακτηρίζονται από μαθηματική διορατικότητα, οι οποίες εφευρέθηκαν και παρουσιάστηκαν από ισάριθμούς μαθητές. Παρότι οι περισσότεροι μαθητές δεν ήταν σε θέση να επινοήσουν στρατηγικές σε αυτό το εξελιγμένο στάδιο, μπορούσαν να κατανοούν τις λύσεις των συμμαθητών τους. Επιπλέον, προκύπτει ότι οι λεπτές αιτιολογήσεις και γενικεύσεις των μαθητών συνδέονται στενά μεταξύ τους διευρύνοντας τη μαθηματική τους σκέψη. Ανάλογες στάσεις έχουν παρατηρηθεί σε δραστηριότητες Problem posing και ανοιχτών προβλημάτων (Brown & Wallet 1983, Silver 1997, English 1997, Kosyvas 2005, Κόσυβας 2009α, Κόσυβας 2009β). Αναμφισβήτητα πρόκειται για ενεργητική, πολύπτυχη και δημιουργική διαδικασία που υπογραμμίζει ότι μαθηματικά δεν είναι απομνημόνευση μυστηριωδών τύπων και αναιτιολόγητων κανόνων, αλλά ό,τι σημαντικό κάνουν και σκέφτονται οι μαθητές, όταν επικοινωνούν μεταξύ τους στις ομάδες.

Το ανοιχτό πρόβλημα που δοκιμάσαμε αποδείχτηκε πρόσφορο για την ομαδοσυνεργατική δράση των μαθητών, γιατί ανέδειξε ‘‘διαφορετικότητες’’ που διευκόλυναν το διάλογο και την κοινή αναζήτηση. Στις ομάδες συλλογικής μάθησης οι συμμετέχοντες δεν αισθάνονταν απομονωμένοι και αποξενωμένοι καθώς επιδίωκαν συλλογικά την αναζήτηση λύσης στο πρόβλημα. Μέσα από την πλούσια επικοινωνία και το ειρηνικό ψάξιμο στις ομάδες, τη συνέρευνα και την αυτοδιαχείριση της γνώσης, αλλά και μέσα από τις κοινωνιο-γνωστικές συγκρούσεις και τις διαφωνίες βοηθούνται οι συμμετέχοντες να αποδεχτούν ή να απορρίψουν ιδέες, να αποκτήσουν αυτογνωσία σχετικά με τις ικανότητές τους και να επιτύχουν την απόκτηση γνώσεων μέσω της συνεργασίας και της αλληλεγγύης. Τα μέλη της ομάδας μαθαίνουν να ασκούν και να δέχονται κριτική, να αναγνωρίζουν τα ορθότερα επιχειρήματα, να συγκρίνουν και να συσχετίζουν τα αποτελέσματα, να καταλήγουν σε συμπεράσματα. Στις ομάδες συλλογικής μάθησης οι συμμετέχοντες αυτοπειθαρχημένοι συσκέπτονται, προγραμματίζουν, παίρνουν αποφάσεις, δημιουργούν και χαίρονται, κάποτε αποτυγχάνουν και απογοητεύονται, όμως ξαναδοκιμάζουν. Τα μέλη των ομάδων αλληλοεμπλουτίζονται αλληλοκατανοούνται, μοιράζονται επιτυχίες και αποτυχίες, αλληλοϋποκινούνται, αλληλοενισχύονται, αλληλοδιορθώνονται, αλληλομορφώνονται, και κατακτούν οτιδήποτε μαζί.

Στο πρόβλημα του κουμπαρά η συνεργασία στις ομάδες διαδραματίζει ζωτικό ρόλο για το ξεδίπλωμα της δημιουργικότητας των μαθητών. Η εργασία στις μικρές ομάδες εκτυλίσσεται σε ένα αναδιαμορφωμένο σκηνικό και μετασχηματίζει τη συνολική μαθησιακή κατάσταση. Όπως η μετωπική διάταξη των θρανίων απέναντι στον καθηγητή και η γενικότερη οικολογία του σχολείου, που ευνοούν κατά βάση την παθητική ακρόαση και τη δασκαλοκεντρική διδασκαλία, δεν είναι το μόνο σωστό ή δυνατό πλαίσιο επικοινωνίας, έτσι και οι ομαδικές δραστηριότητες έχουν τα δικά τους μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα. Είναι πάντως μια απαραίτητη διορθωτική κίνηση που περιορίζει τις μονομέρειες της συνήθους διδασκαλίας (Κόσυβας 1996β). Κατά τη γνώμη μας τα πιθανά μειονεκτήματα της ομαδοσυνεργατικής μάθησης υπεραντισταθμίζονται από τα συγκριτικά πλεονεκτήματα, καθόσον οι μαθητές μετριάζοντας τον ανταγωνισμό και αναπτύσσοντας σύμμετρες σχέσεις με τους συμμαθητές τους, ξελαφρώνουν από το άγχος της επίδοσης, απελευθερώνονται από την αδράνεια και την παθητική ακρόαση, αναλαμβάνουν πρωτοβουλία και αναπτύσσουν αυτενέργεια. Ο καθένας καθρεφτίζεται στους άλλους φανερά και έτσι αποκτά αυτογνωσία και ασκεί με εύλογο τρόπο αυτοκριτική. Όπως διαπιστώσαμε οι μαθητές μαθαίνουν να συνδιαλέγονται εποικοδομητικά, να ακούν και να εκτιμούν τις προτάσεις των άλλων, να δέχονται και να απορρίπτουν λύσεις προβάλλοντας επιχειρήματα, να δοκιμάζουν πρακτικά και να ερευνούν τις διάφορες δυνατότητες, που συνήθως είναι περισσότερες με τη συμβολή των άλλων μελών της ομάδας. Έτσι κάθε μέλος της ομάδας λειτουργεί ευεργετικά όχι μόνο για τον εαυτό του, αλλά και για τα άλλα μέλη της ομάδας. Επιπλέον οι «καλοί» μαθητές συμπαρασύρουν τους «αδύνατους» και ο συνήθης σιωπηλός ανταγωνισμός περιορίζεται. Η αξία των ομαδικής δραστηριότητας δεν ήταν μόνο παιδαγωγική (ευχάριστα βιώματα, καλό κλίμα στην τάξη, ενθουσιασμός και ζωηρό ενδιαφέρον, ενεργοποίηση και ένταξη των μαθητών που συνήθως μένουν στη σκιά, πνεύμα αλληλεγγύης, ερευνητικό πνεύμα, πιο διαφανής αξιολόγηση κλπ.), αλλά και μαθησιακή: ευχέρεια στην παραγωγή ποικιλίας ιδεών, ευελιξία στην αναμόρφωση των στρατηγικών, γενίκευση και επέκταση των συλλογισμών σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, θεμελίωση με επιχειρήματα και σε τελική ανάλυση εμβάθυνση στην κατανόηση.

Τα ευρήματα αυτής της έρευνας υπογραμμίζουν ότι κατά τη λύση προβλημάτων στην τάξη θα πρέπει να αποδίδεται βαρύνουσα σημασία όχι στις τυπικές αλγοριθμικές διαδικασίες, αλλά στην ανάπτυξη των πρωτότυπων ιδεών και στρατηγικών των μαθητών και μαθητριών. Τα ανοιχτά προβλήματα δίνουν στους μαθητές ευκαιρίες να αναπτύσσουν πολλαπλές λύσεις, παρά να εφαρμόζουν άκριτα ετοιμοπαράδοτους κανόνες. Όλα αυτά αποδεικνύουν ότι το εν λόγω ανοιχτό πρόβλημα ήταν ένα πρόσφορο μέσο για την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών (Leikin, 2009). Με την οργάνωση τέτοιων δραστηριοτήτων πετυχαίνουμε την καλλιέργεια της ερευνητικής στάσης, καθώς και την ανάπτυξη των μαθηματικών συλλογισμών των μαθητών.

Η εφαρμογή των ανοιχτών προβλημάτων δεν είναι αντίθετη με το Αναλυτικό πρόγραμμα του Γυμνασίου. Οι εκπαιδευτικοί οι οποίοι επιθυμούν να εμπλουτίσουν την αδιατάρακτη ρουτίνα της καθημερινότητας με την ομαδοσυνεργατική λύση ανοιχτών προβλημάτων θα μπορούσαν να δοκιμάσουν. Η ενασχόληση της τάξης με ανοιχτά προβλήματα, μπορεί να είναι διανθιστική (4-5 φορές το χρόνο), ενσωματωμένη στις ενότητες του αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών της αντίστοιχης τάξης (ανοιχτό πρόβλημα εβδομάδας) ή ενταγμένη σε ειδικές δραστηριότητες του ετήσιου προγραμματισμού του σχολείου (π. χ. τριήμερο ανοιχτών προβλημάτων). Σε όλες τις περιπτώσεις η ενασχόληση με αυτά είναι πολλαπλά ωφέλιμη αφού τονώνει τα κίνητρα των μαθητών αναδεικνύοντας την αυθόρμητη μαθηματική δημιουργία τους.

Βιβλιογραφία

Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, Villeurbanne : IREM de Lyon, CRDP.

Bauersfeld, H. (1995). The structuring of the structures: development and function of mathematizing as a social practice, In L.- P. Steffe & J. Gale (Eds.). *Constructivism in education*, (pp. 137-158), Hillsdale: LEA.

Becker, J. & Shimada L. (1997). *The open-ended approach*. Reston (VA) : NCTM.
Brown, S. I. & Walter, M. I. (1983). *The art of problem Posing*, Hillsdale: LEA.
Brown, S. I. (1997). Thinking like a Mathematician: A Problematic Perspective. *For the Learning of Mathematics*, **17(2)**, 36-38.
Charnay, R. (1993). Problème ouvert problème pour chercher, *Grand N,* **51**, pp. 77-83.
Cobb, P. (1990). Multiple perspectives. In: In L.- P. Steffe & T. Wood (Eds.) *Transforming children's mathematics education: international perspectives*, (pp. 200-215), Hillsdale: LEA.
Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking and classroom practice. In N. Minick, E. Forman & A. Stone (Eds.) *Education and mind* (pp.91-119). New York: Oxford University Press.
English, L. (1997). Promoting a Problem Posing Classroom, *Teaching children Mathematics,* **3**, pp. 172-179.
Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. In P., Boero (Ed.) *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice*, Sense Publishers, 65-78.
Harel, G. & Tall, D. (1989). The general, the abstract and the generic in advanced mathematical thinking. *For the Learning of Mathematics*, **11(1)**, 38–42.
Johnson, D.W. & Johnson, R. T. (1990). Using cooperative learning in math, In *Cooperative Learning in Mathematics: a handbook for teachers,* (pp 103-124), Menlo Park: Neil Davidson Editor, Addison-Wesley Publishing Company.
Kosyvas, G. (2005). *Une méthode vécue et communicative d'un problème ouvert: Du problème de la duplication du carré dans la méthode socratique du «Menon» de Platon reformulé en problème ouvert avec une expérimentation didactique en classe*, Mémoire non publié, Université Libre de Bruxelles.
Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, **27**, 29-63.
Leighton, J. P., & Sternberg, R. J. (2004). *The nature of reasoning*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
Leikin, R., & Zaslavsky, O. (1997). Facilitating Student Interactions in Mathematics in a Cooperative Learning Setting. *Journal for Research in Mathematics Education,* **28 (3)**, pp. 355-376.
Leikin, R. (2009). Exploring mathematical Creativity using multiple solution tasks, In: R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds). *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*, (pp. 129-145). Rotterdam: Sense Publishers.
Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of a mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education,* **27**, 29-63.

McClain, K. & Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education,* **32(3)**, 238-266.

Mueller, M. (2007). *A study of the development of reasoning in sixth grade students.* Unpublished doctoral dissertation, Rutgers, New Brunswick: The State University of New Jersey.

Noddings, N. (1989). Theoretical and practical concerns about small groups in mathematics. *Elementary School Journal*, **89**, 607-623.

Nohda, N. (1991). Paradigm of the "open-approach" method in mathematics teaching: Focus on mathematical problem solving. *International Reviews on Mathematical Education*, **23(2)**, 32-37.

Pehkonen, E. (1995). Introduction: Use of open-ended problems. *International Reviews on Mathematical Education*, **27(2)**, 55-57.

Polya, G. (1962/2001). *Η μαθηματική ανακάλυψη*, (μτφρ. Σεργιάκης Σ., Τσαπακίδης Γ.), Αθήνα: Κάτοπτρο.

Porcheron, J. & Guillaume, J. (1984). Peut-on résoudre un problème que l'on n'a pas appris à résoudre? Comment font-ils? *Rencontres pédagogiques*, **4**, 34-64, INRP.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning,* **5(1)**, 37-70.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education,,* **40(1)**, 83-96.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity Through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing, *ZDM* , **97(3)**, 75-80.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing, *For the Learning of Mathematics* **14 (1)**, 19-28.

Silver, E.A., Kilpatrick, J. & Schlesinger, B. (1990). *Thinking through mathematics: Fostering inquiry and communication in mathematics classrooms*, New York: The College Board.

Stacey, K. (1995). The Challenges of Keeping open Problem-Solving Open in School mathematics. *International Reviews on Mathematical Education,* **27(2)**, 62-67.

Voigt, J. (1996). Negotiation of mathematical Meaning in Classroom processes: Social interaction and learning mathematics, In L.- P. Steffe, P., Nesher, P., Cobb, G. A., Golgin, & B. Greer, (Eds), *Theories of mathematical learning. Mahwah,* (pp. 21-50), New Jersey: LEA.

Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a Constructive Activity: learners generating examples*. Mahwah, NJ, USA: LEA.

Webb, N. (1989). Peer interaction and learning in small groups. *International journal of educational research*, **13**, 21-39.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin. & D. Schifter. (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp 227-236). Reston, VA: NCTM.

Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1, pp. 9-24).Utrecht, The Netherlands: PME.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* **27**, 458-477.

Vygotsky, L. (1988). *Σκέψη και γλώσσα*. Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση.

Κόσυβας, Γ. (1996α). *Η πρακτική του ανοιχτού προβλήματος στο δημοτικό σχολείο, γόνιμος χαρακτήρας και ανατροπή των παγιωμένων αντιλήψεων*, Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Κόσυβας, Γ. (1995). Προσεγγίσεις της έννοιας και του ρόλου του ανοιχτού προβλήματος στη διδασκαλία των Μαθηματικών, *ΕΜΕ Ευκλείδης Γ΄*, **43**, σσ. 11-34, Αθήνα.

Κόσυβας, Γ. (1996β). Ανοιχτό πρόβλημα και ομάδες εργασίας στο Δημοτικό σχολείο, *Σύγχρονη Εκπαίδευση,* τ. **86**, σσ. 27-34 και τ. **87**, σσ. 37-45.

Κόσυβας, Γ. (2008). Εικασίες και μαθηματική συζήτηση στην τάξη, *Πρακτικά 25ου συνεδρίου της ΕΜΕ,* 434-448, ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (2009α). Διδακτικές-μαθησιακές διαδρομές βασισμένες στη διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών, *Το Φ*, **6**, σσ. 133-160, Αθήνα.

Κόσυβας, Γ. (2009β). Στρατηγικές γενίκευσης των μαθητών από γεωμετρικές κανονικότητες, *Πρακτικά 26ου συνεδρίου της ΕΜΕ,* 405-415, ΕΜΕ.

Βανδουλάκης Ι., Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν. & Φερεντίνος Σ. (2007). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βιβλίο Εκπαιδευτικού,* Αθήνα: ΟΕΔΒ.