ΜΠΟΡΕΙ Η ΕΚΠΛΗΞΗ ΝΑ ΑΝΑΤΡΕΨΕΙ ΤΗΝ ΠΛΗΞΗ; ΔΟΚΙΜΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΔΟΞΩΝ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Γιώργος Δ. Κόσυβας, Βαρβάκειο Πειραματικό Λύκειο
gkosyvas@yahoo.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται και αναλύονται δεδομένα με μαθηματικά παράδοξα από τάξεις του ελληνικού Λυκείου. Η εργασία επικεντρώνεται στους συλλογισμούς και τις γνωστικές ασυμφωνίες των μαθητών που παρατηρούνται τόσο σε ατομικό επίπεδο όσο και κατά τις μαθηματικές αλληλεπιδράσεις στην τάξη. Από τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας προκύπτει ότι το εκάστοτε παράδοξο προκαλεί έκπληξη στους μαθητές, κεντρίζει το ενδιαφέρον τους και λειτουργεί ως κίνητρο ενασχόλησης για την ανίχνευση του λάθους και την εμβάθυνση στις μαθηματικές έννοιες.

Θεωρητικό πλαίσιο

Τόσο στο Δημοτικό σχολείο όσο και στο Γυμνάσιο οι μαθητές συμπορεύονται με τα μαθηματικά. Αυτή η συμπόρευση είναι υποχρεωτική για όλους, όμως δεν φαίνεται αληθινά επιθυμητή για πολλούς μαθητές. Έτσι, ενώ στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού όλοι οι μαθητές εμπλέκονται εθελοντικά στις δραστηριότητες της τάξης και έχουν ζωηρή επιθυμία για την πρόσκτηση μαθηματικών γνώσεων, καθώς μεταβαίνουν από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο παρατηρείται εξασθένιση της επιμονής τους και μεταβολή των μαθησιακών κινήτρων (Αθανασίου & Φιλίππου 2007). Επιπλέον, εμφανίζονται τα πρώτα ίχνη ανησυχίας και φόβου για τα μαθηματικά (Καγκουρά κ. ά. 2009). Σταδιακά καθώς οι μαθητές προχωρούν στις μεγαλύτερες τάξεις ο ζήλος τους ατονεί και το αρχικό ενδιαφέρον εξατμίζεται, ενώ η ανία και αντιπάθειά τους προς τα μαθηματικά αυξάνεται. Σε αυτό συμβάλλουν συχνά οι δάσκαλοι και οι γονείς, ιδιαίτερα αν οι ίδιοι ένιωσαν συναισθήματα ταπείνωσης κατά την αυταρχική μαθηματική διδασκαλία που δέχτηκαν ή αντιπαθούν τα μαθηματικά. Μεταφέρουν στα παιδιά την αποθαρρυντική αντίληψη ότι εφόσον δεν διαθέτουν το φυσικό χάρισμα της μαθηματικής ευφυΐας δεν θα κατανοήσουν ποτέ τα μαθηματικά. Οι μαθητές ανάλογα με τον κοινωνικό τους περίγυρο και τις επιδόσεις τους στο σχολείο έχουν σχηματίσει και εξακολουθούν να πλάθουν και να αναπλάθουν μια ευχάριστη ή δυσάρεστη εικόνα για τη φύση των μαθηματικών, όπως βέβαια και το ρόλο του μαθηματικού και το δικό τους ρόλο. Έτσι φθάνουν στο Λύκειο, έχοντας ήδη σφυρηλατήσει οι περισσότεροι μια μάλλον αρνητική εικόνα για τα μαθηματικά, τα οποία θεωρούν ως μια δυσνόητη επιστήμη η οποία θα καθορίσει την εκπαιδευτική τους εξέλιξη.

Πολλά συνηγορούν υπέρ της υπόθεσης ότι η διδασκαλία των μαθηματικών αφήνει μακροπρόθεσμα τα πιο οδυνηρά τραύματα στους μαθητές. Αυτή η αρνητική εικόνα, τα μαθηματικά ως φόβος και τρόμος, μεταδίδεται από γενιά σε γενιά (Κόσυβας 2010).

Είναι πικρή και ανησυχητική η διαπίστωση ότι η διδασκαλία των μαθηματικών παράγει συχνά υπερβολική αδιαφορία, πλήξη και αποστροφή των μαθητών του Λυκείου. Μπροστά στον κίνδυνο περιθωριοποίησής τους ακόμα και ικανοί μαθητές προσαρμόζουν τα ενδιαφέροντά τους προς τις γενικές τάσεις που επικρατούν στις εφηβικές ομάδες. Έτσι σπάνια υπάρχουν μαθητές που επιμένουν να εμπλέκονται σε καταστάσεις προβληματισμού με αυτοπεποίθηση και πολύ λιγότεροι με ενθουσιασμό και περιέργεια. Στην καλύτερη περίπτωση ένα μέρος από αυτούς αποκτούν ένα ωφελιμιστικό εξωτερικό κίνητρο, ενδιαφέρονται να πάρουν καλούς βαθμούς, έχουν εκπαιδευτικές και επαγγελματικές βλέψεις, αλλά δεν εργάζονται με πραγματική ευχαρίστηση.

Στο Λύκειο η μάθηση υποτάσσεται στην εξεταστική χρησιμότητα. Έτσι, η καθημερινή διδασκαλία των μαθηματικών σύρεται σε μια προδιαγεγραμμένη πορεία, χωρίς παρεκκλίσεις και εκπλήξεις. Επιπλέον, με τον παραμερισμό του νοήματος θυσιάζεται το μόνο γνήσιο μαθησιακό κίνητρο για τα μαθηματικά, η χαρά της ανακάλυψης. Η προαναφερόμενη αρνητική εικόνα των μαθητών για τα μαθηματικά σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες προσδοκίες, καθορίζει προσωρινά τις πεποιθήσεις και τις στάσεις τους, αλλά δεν είναι πολύ βαθιά χαραγμένη και μπορεί να μεταβληθεί ανάλογα με τις εμπειρίες τους στο σχολείο. Μπορεί δηλαδή να επιβεβαιωθεί και να ενισχυθεί ή να τροποποιηθεί από τα πραγματικά βιώματα (McLeod 1992, Viau 2003).

Τα τελευταία χρόνια αποδίδεται βαρύνουσα σημασία από τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης στο ρόλο του συναισθήματος στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών (DeBellis & Goldin 2006, Hannula 2006, Zan et *al*. 2006). Οι ρευστές αντιλήψεις των παιδιών για τη σημασία των Μαθηματικών στη ζωή, για το εύρος εφαρμογής τους, για το βαθμό δυσκολίας στη μάθησή τους, για το κύρος και το γόητρό τους, αποτελούν συχνά πηγή χαράς ή φόβου. Συναισθηματικοί παράγοντες των μαθητών, όπως οι στάσεις και οι συγκινήσεις, οι αυτοεικόνες και οι ετεροεικόνες, τα κίνητρα και οι προσδοκίες, οι πεποιθήσεις και οι αξίες είναι εξίσου σημαντικοί με τη μάθηση του γνωστικού αντικειμένου και επηρεάζουν τις σχολικές επιδόσεις και την αποτελεσματική λύση προβλήματος (Gomez-Chacon 2000, Φιλίππου & Χρίστου 2001). Ειδικότερα, η έκπληξη, ο θαυμασμός και η περιέργεια θεωρούνται ως ελκυστικά παιδαγωγικά τεχνάσματα του δασκάλου για τη διέγερση του ενδιαφέροντος των μαθητών, την προαγωγή της μάθησης και την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης (Malone & Lepper 1987, Brown & Walter 1990, Arsac & Mante 2007, Kosyvas 2010). *Η έκπληξη είναι αναμφισβήτητα ένα ευχάριστο συναίσθημα. Θα μπορούσε να αξιοποιηθεί ώστε η διδασκαλία των μαθηματικών να είναι ευχάριστη και γόνιμη για όλους τους μαθητές*;

Η έκπληξη αποτελεί ένα παγκοσμίως κοινό συναίσθημα: δεν αποκτιέται με την εκπαίδευση, αλλά μάλλον είναι έμφυτη σε όλους τους ανθρώπους. Είναι κατά βάση το ευχάριστο ξάφνιασμα ή η αίσθηση της περιέργειας από ένα ασυνήθιστο ή απρόοπτο γεγονός και εμπεριέχει τα γνωρίσματα της χαράς, του θαυμασμού, της διασκέδασης και της ικανοποίησης (Berlyne 1960, Knuth 2002, Johnson 2007). Καθώς οι μαθητές εκπλήσσονται βιώνουν μια έντονη και καθολική έλξη και εμπλέκονται υπαρξιακά και συναισθηματικά. Το εν λόγω συναίσθημα συνοδεύει πνευματικές ενασχολήσεις, όπως η συγκίνηση που παράγεται κατά τη διάρκεια ερευνητικών μαθησιακών διαδρομών καθώς η διάνοια καταγίνεται με ένα αντικείμενο που φαντάζει παράξενο ή ασυνήθιστο (Κόσυβας 2010). Επιπλέον, η έκπληξη μπορεί να εκδηλώνεται όταν υπολανθάνει μια περίεργη υπόνοια μη κατανόησης ή όταν κάτι οικείο εμφανίζεται κάτω από μια άγνωστη ή ασυνήθιστη οπτική γωνία. Συνήθως αποκαλύπτει την ασυμφωνία της σκέψης και είναι απαραίτητη στην ανάπτυξη προβληματισμού. Αποτελεί μια δημιουργική μετάβαση για την πρόσκτηση της γνώσης, αλλά και τον αναστοχασμό. Εφόσον ο ρόλος της στη μαθησιακή διαδικασία είναι γόνιμος, απομένει να εξετάσουμε *πώς μπορεί να γεννηθεί η έκπληξη στις τάξεις των μαθηματικών*.

Η πρόκληση γνωστικής σύγκρουσης θεωρείται συχνά ως διδακτική στρατηγική η οποία μπορεί να συμβάλλει στη μάθηση (Behr & Harel 1990, Tirosh & Graeber 1990). Η δόμηση των νοητικών ικανοτήτων των μαθητών περιγράφεται συνήθως από το πρότυπο του Piaget που χαρακτηρίζεται από τις διαδικασίες της αφομοίωσης, της προσαρμογής και της ισορροπίας. Καθώς οι μαθητές έρχονται σε γνωστική σύγκρουση, συνειδητοποιούν ότι οι γνώσεις τους είναι ανεπαρκείς και πρέπει να τις αναθεωρήσουν, να τις συμμορφώσουν. Αμφιβάλλοντας για τις βεβαιότητές τους, τις επανεξετάζουν σε βάθος και τις αναδομούν. Αυτή η αντίληψη απορρέει από τη θεωρία της γνωστικής ασυμφωνίας (Festinger 1957) που στηρίζεται στην υπόθεση ότι η γνωστική σύγκρουση προκαλεί μια ψυχική ασυμφωνία στο άτομο που προσπαθεί να την περιορίσει, διατηρώντας τη μεγαλύτερη δυνατή εσωτερική συμφωνία. Η σύγκρουση οδηγεί σε αποσταθεροποίηση των βεβαιοτήτων και αναδόμηση των νοητικών τους δομών (Giordan 1998). Την αρχική έκπληξη διαδέχεται η γνωστική διατάραξη και έπειτα η πολυσύνθετη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής.

Τίθεται τότε το ερώτημα *πώς θα εμφυσήσουμε την επιθυμία των μαθηματικών σε μαθητές που ίσως ποτέ δεν είχαν την έφεση ή το ενδιαφέρον για αυτά*. Κατάλληλες διδακτικές καταστάσεις που ενδέχεται να δημιουργήσουν έκπληξη και γνωστική σύγκρουση είναι τα παράδοξα προβλήματα. Τα μαθηματικά παράδοξα είναι προτάσεις που περιέχουν αντίφαση, συλλογισμοί χωρίς φανερό ρήγμα που όμως καταλήγουν σε παράλογο συμπέρασμα, ή γενικότερα καταστάσεις αντίθετες προς τη διαίσθηση και την κοινή αντίληψη. Συνήθως σε μια συνδυασμένη ακολουθία ορθών ισχυρισμών που φαίνεται γερά θεμελιωμένη υπολανθάνουν λάθη που οφείλονται στην παραβίαση μαθηματικών ιδιοτήτων, την εσφαλμένη εφαρμογή κανόνων ή την εκτέλεση αλγεβρικών υπολογισμών χωρίς νόημα. Τα παράδοξα αφθονούν στα μαθηματικά και αποτελούν πρόσφορα διδακτικά μέσα: αποφεύγουν προφανή συμπεράσματα προκαλώντας τη γεφύρωση αντιφάσεων και ασυμφωνιών (Κόσυβας 2010).

Κάθε φορά που καλούμαστε να διδάξουμε μια νέα μαθηματική έννοια στο Λύκειο ψάχνουμε να βρούμε κατάλληλα προβλήματα που να απαντούν στις απορίες των μαθητών.

Αναζητούμε εύστοχες περιπτώσεις που ενισχύουν τη βαθύτερη μαθηματική κατανόηση και προσφέρονται για γόνιμες μαθηματικές συζητήσεις στην τάξη. Ένα μέρος από αυτά αποτελούν προβλήματα με αντιφάσεις, πλάνες και παράδοξα. Τα ακόλουθα παραδείγματα συχνά εκπλήσσουν τους μαθητές:

$$2=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=\sqrt{(-2)^2}=-2$$, άρα **2=-2!**.

$$5=\sqrt{25}=\sqrt{(-5)^2}=\left[(-5)^2\right]^{\frac{1}{2}}=(-5)^{2\cdot\frac{1}{2}}=-5,$$ άρα **5 = -5!**

$$\int\frac{1}{x}dx=\int(x)'\frac{1}{x}dx=x\frac{1}{x}-\int x\left(\frac{1}{x}\right)'dx=1-\int x\left(\frac{1}{x}\right)'dx=1-\int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=1+\int\frac{1}{x}dx$$, άρα **0=1!**.

$$\begin{cases}|1+2i|^2=(1+2i)^2=1^2+2\cdot1\cdot2i+(2i)^2=1+4i+4i^2=-3+4i\\ |1+2i|^2=\sqrt{\left(1^2+2^2\right)^2}=\sqrt{5^2}=5\end{cases}$$, άρα: **- 3 + 4i = 5!**

Η διασάφηση τέτοιων παραδόξων στην τάξη είναι συχνά διασκεδαστική. Επιπλέον, μάς καθιστούν πιο προσεκτικούς όταν εφαρμόζουμε «συνηθισμένους» κανόνες της άλγεβρας, της ανάλυσης ή των μιγαδικών αριθμών. Η πρόθεσή μας συνοψίζεται στη διδακτική χρήση μαθηματικών παραδόξων στις τάξεις του Λυκείου. Παίρνοντας αφορμές από τα βιώματα και τα ενδιαφέροντα των μαθητών εντάσσουμε στο μάθημα παράδοξες εκπλήξεις με λεπτή προσοχή. Η δημιουργία ενός υποστηρικτικού μαθησιακού περιβάλλοντος που ευνοεί τη συμμετοχή και ενθαρρύνει την ανάπτυξη των ιδιαίτερων κλίσεων και ικανοτήτων των μαθητών αποκτά βαρύνουσα παιδαγωγική σημασία. Ελπίζουμε οι μαθητές του Λυκείου να αισθανθούν κάποια έκπληξη, να ανακτήσουν την έφεση της παιδικής ηλικίας για το παράξενο, το ασυνήθιστο και την καινοτομία αποκτώντας μια ακατάλυτη και παντοτινή επιθυμία εξερεύνησης και πνευματικής περιπέτειας.

Η δύναμη των παραδόξων, επέφερε αξιοσημείωτη πρόοδο στην ιστορία των επιστημών, αποκαλύπτοντας λογικές αδυναμίες, ανεπάρκειες ή επιστημολογικά εμπόδια. Γι' αυτό αποτελούν ένα πολύτιμο εργαλείο που εμπλουτίζει την καθημερινή διδασκαλία. Η πρόκληση έκπληξης, μπορεί να κινητοποιήσει ακόμα και μαθητές που δεν αισθάνονται άνετα ή φοβούνται τα μαθηματικά, να λύσουν τα παράδοξα προβλήματα. Αρκεί να ψάξουν για εξηγήσεις που φωτίζουν τις αντιφάσεις και συνθέτουν σχέσεις με λογική συνοχή. Με την προβολή ενός παραδόξου δεν υπάρχει υπεκφυγή παρά μόνο η λύση της σύγκρουσης: το γνωστικό εμπόδιο δεν μπορεί να παρακαμφθεί, πρέπει να διασχιστεί.

Η παρούσα εργασία

Στόχος της εργασίας: Σε αυτή την εργασία διερευνώνται οι μαθηματικοί συλλογισμοί των μαθητών του Λυκείου καθώς αυτοί καταγίνονταν με τη λύση μαθηματικών παραδόξων και την εξεύρεση των λαθών. Στα εν λόγω διδακτικά πειράματα συγκεντρώνουμε το ερευνητικό ενδιαφέρον τόσο στις ασυμφωνίες που παρατηρούνται σε ατομικό επίπεδο στους μαθητές όσο και στις μαθηματικές αλληλεπιδράσεις στην τάξη. Διατυπώνουμε την υπόθεση ότι τα παράδοξα έχουν παιδαγωγικό ενδιαφέρον για τα μαθηματικά στο Λύκειο (μαθησιακό, συναισθηματικό, μεθοδολογικό, μεταγνωστικό).

Πλαίσιο έρευνας και συμμετέχοντες: Η έρευνα εκτυλίχτηκε σε διάφορες τάξεις του Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου, στην Αθήνα, κατά τα διδακτικά έτη 2009-10 και 2010-11. Ο εκπαιδευτικός είναι καθηγητής μαθηματικών του σχολείου. Το διδακτικά πειράματα αναφέρονται σε μαθηματικά παράδοξα που εκτίθενται παρακάτω μαζί με τα αποτελέσματα.

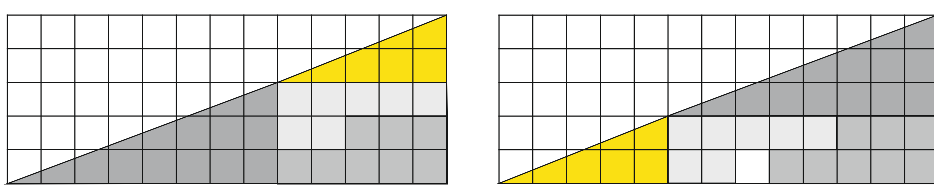
Συλλογή και ανάλυση δεδομένων: Παρατηρήθηκαν οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στους μαθητές κατά τη διάρκεια της συνεργασίας τους ανά δύο και κατά τη διάρκεια της κοινής συζήτησης σε όλη την τάξη. Επίσης, λήφθηκαν υπόψη οι γραπτές σημειώσεις κάθε μαθητή κατά τη διάρκεια της λύσης των προβλημάτων. Η ανάλυση των δεδομένων είναι ποιοτική και αφορά τη συμμετοχική παρατήρηση της τάξης. Εξετάζουμε κυρίως την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων (Erickson 1986, Cobb et *al*. 2003, Collins et *al*. 2004, Kosyvas & Baralis 2010).

Οι μαθηματικές δραστηριότητες: Τα παράδοξα που επιλέχτηκαν είναι αλγεβρικού και γεωμετρικού τύπου. Τα προβλήματα κατασκευάστηκαν ή αντλήθηκαν από διάφορες πηγές και προσαρμόστηκαν (Northrup 1944, Kleiner & Movshovitz-Hadar 1994, Abiteboul 1998, Movshovitz-Hadar & Webb 1998). Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ενδεικτικά ορισμένα προβλήματα που δοκιμάστηκαν στις τάξεις με μια προκαταρκτική ανάλυση και μια σύνοψη των συλλογισμών των μαθητών κατά τη μαθηματική επικοινωνία.

Παρουσίαση και συζήτηση των αποτελεσμάτων

1. ***Το τριάντα δύο είναι ίσο με το τριάντα τρία ! (Β Λυκείου)***

Εκφώνηση: *Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν δύο πάζλ που έχουν κατασκευαστεί από τα ίδια κομμάτια. Αν αναδιατάξουμε τα κομμάτια του πρώτου πάζλ, τότε σχηματίζεται το δεύτερο στο οποίο όμως περισσεύει ένα λευκό τετράγωνο. Πώς εξηγείτε αυτό το αποτέλεσμα;*

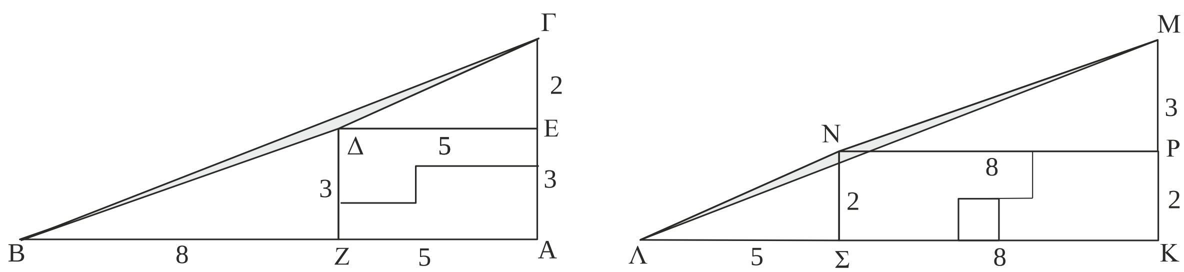


Ο στόχος αυτού του προβλήματος είναι να θέσουμε τους μαθητές σε μια κατάσταση έκπληξης (τα δύο πάζλ καλύπτουν φαινομενικά «ίσα τρίγωνα» των οποίων το εμβαδόν διαφέρει!). Το εν λόγω πάζλ αποτελεί μια εκδοχή ανάλογου πάζλ που εφευρέθηκε από τον Lewis Carroll, και αναμένεται να προκαλέσει γνωστική σύγκρουση στους μαθητές ανάμεσα στην οπτική αντίληψη και τις γνώσεις τους για τα εμβαδά.

Η πλειονότητα των μαθητών θεώρησε παράξενο τα ίδια κομμάτια στο δεύτερο πάζλ να αφήνουν ένα μικρό λευκό τετράγωνο. Ορισμένοι μαθητές με χαμηλή μαθηματική αυτοπεποίθηση δεν έψαξαν για τη λύση επειδή θεώρησαν ότι δεν θα τη βρουν. Όμως, δήλωσαν ότι επιθυμούν να τη γνωρίσουν. Οι συναισθηματικές αντιδράσεις των μαθητών ποικίλουν: από τη μια μεριά είναι εκείνοι που εξέφρασαν την επιθυμία να λύσουν το πρόβλημα εκδηλώνοντας έκπληξη, αμηχανία, περιέργεια, γοητεία και ανακούφιση όταν έβρισκαν κάποια εξήγηση και από την άλλη εκείνοι που εξέφρασαν δυσαρέσκεια, ανησυχία, νευρικότητα, έλλειψη κατανόησης, αμφιβολία, άγνοια και φόβο.

Το πρόβλημα προκάλεσε βαθειά γνωστική σύγκρουση στους μαθητές και ο διασκεδαστικός χαρακτήρας τούς ώθησε να ψάξουν για μια εξήγηση. Ορισμένες εξηγήσεις που έδωσαν οι μαθητές για να αιτιολογήσουν τη διαφορά των εμβαδών αποκαλύπτουν αποσταθεροποίηση: «*το αποτέλεσμα εξαρτάται από τον τύπο του εμβαδού*», «*όταν αλλάζουμε τη διάταξη των κομματιών, το εμβαδόν αλλάζει*». Είναι αξιοσημείωτο ότι δύο μαθητές έδειξαν έστω προσωρινά αδυναμία διατήρησης του εμβαδού.

Οι περισσότεροι μαθητές στα φύλλα εργασίας βρήκαν τα εμβαδά των δύο υποτιθέμενων τριγώνων από τα κομμάτια τους με χρήση τύπων και απαριθμήσεις τετραγώνων: 32 cm^2 και 33 cm^2. Λιγότεροι μαθητές υπολόγισαν το εμβαδόν του μισού ορθογωνίου: 32,5 cm^2 και από αυτούς ακόμα λιγότεροι προβληματίστηκαν πάνω σε αυτή τη διαφορά. Μόνο τρεις δυάδες μαθητών ανέφεραν ότι *δεν έχουμε τρίγωνα, αλλά τετράπλευρα αφού το ένα «μπαίνει μέσα» και το άλλο «βγαίνει έξω»*. Έτσι, διατύπωσαν την εικασία ότι δεν σχηματίζεται «*ένα κανονικό ορθογώνιο τρίγωνο, αφού τα τρία σημεία στην υποτιθέμενη υποτείνουσα δεν ευθυγραμμίζονται*». Για την απόδειξη της εικασίας χρησιμοποιήθηκαν: το Πυθαγόρειο θεώρημα, ομοιότητα τρίγωνα, χρήση διανυσμάτων και τριγωνομετρία. Μόνο η χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος τελεσφόρησε:



Αν εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΔΕΓ και ΒΖΔ του πρώτου σχήματος έχουμε:

$$ΔΓ = \sqrt{ΔΕ^2 + ΕΓ^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \simeq 5,385 \text{ και } ΒΔ = \sqrt{ΒΖ^2 + ΖΔ^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \simeq 8,544.$$

Από το τρίγωνο ΑΒΓ βρίσουμε: $ΒΓ = \sqrt{ΒΑ^2 + ΑΓ^2} = \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{169 + 25} = \sqrt{194} \simeq 13,898.$

Έχουμε: ΒΓ=13,898, ΒΔ+ΔΓ=8,544+5,385=13,929. Επομένως: ΒΓ<ΒΔ+ΔΓ και τα σημεία Β, Δ, Γ δεν είναι συνευθειακά. Το ίδιο ισχύει για τα σημεία Λ, Ν, Μ. Στο πρώτο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν μισό τετραγωνάκι περισσότερο από το πάζλ (32,5-32=0,5), ενώ στο δεύτερο, το τρίγωνο ΚΛΜ είναι μισό τετραγωνάκι λιγότερο από το πάζλ μαζί με το λευκό τετράγωνο (33-32,5=0,5). Αυτά τα δύο μισά εξηγούν την παράξενη παρουσία του λευκού τετραγώνου.

Έτσι οι μαθητές συμπέραναν ότι οι κορυφές των κομματιών που οπτικά τοποθετούνται στην «υποτείνουσα του τριγώνου» δεν αποτελούν συνευθειακά σημεία. Το παράδοξο οφείλεται σε οφθαλμαπάτη. Τα τέσσερα κομμάτια του πάζλ έχουν και στις δύο περιπτώσεις το ίδιο εμβαδόν, αλλά δεν σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο όπως παραπλανητικά φαίνεται. Με τη βοήθεια τετραγωνισμένου χαρτιού ή γεωμετρικών οργάνων οι μετρήσεις είναι ανακριβείς γιατί οι ατέλειες του σχήματος είναι ανεπαίσθητες και στο όριο του πειραματικού σφάλματος. Το σχήμα είναι χρήσιμος οδηγός συλλογισμού, αλλά μπορεί να καταλήγει σε πλάνες. Η θεωρητική μελέτη του σχήματος με λογικές διαδικασίες όπως με χρήση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, Τριγωνομετρίας κλπ. οδηγεί σε ασφαλή συμπεράσματα.

2. *Το τέσσερα είναι ίσο με πέντε! (Α΄ Λυκείου)*

Εκφώνηση: *Να βρεθεί το λάθος στη σειρά των συλλογισμών:* (Movshovitz-Hadar & Webb 1998).

$$16 - 36 = 25 - 45 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad 16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad 4^2 - 2\cdot 4\cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad 4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad 4 = 5. \qquad (6)$$

Ο συλλογισμός που εκτίθεται παραπάνω αρχίζει με μια ισότητα που είναι αληθής (16 − 36 και 25 − 45 είναι ίσα με −20), αλλά καταλήγει σε ένα προφανώς ψευδές συμπέρασμα (4 = 5)! Πώς να εξηγήσουμε αυτό το αποτέλεσμα; Στόχος της δραστηριότητας είναι να σκεφτούν οι μαθητές την ψευδή απόδειξη για να βρουν το βήμα με τον λανθασμένο συλλογισμό. Είναι αντιμέτωποι με μια αναμφισβήτητη αντίφαση αλλά δυσκολεύονται να βρουν από που προέρχεται το λάθος όταν η απόδειξη φαίνεται αναντίρρητα σωστή. Αυτή η άσκηση μπορεί ενδεχομένως να αποτρέψει τους μαθητές από τη διάπραξη του συχνού λάθους: $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$ (η σωστή ιδιότητα είναι: $\alpha^2 = \beta^2 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta|$).

Αυτό το πρόβλημα δυσκόλεψε τους μαθητές της Α΄ Λυκείου πάρα πολύ: ήταν αδύνατο να βρουν τον εσφαλμένο συλλογισμό. Οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να αντικρούσουν μια απόδειξη που οδήγησε σε λάθος και βυθίστηκαν σε μια κατάσταση σοβαρής γνωστικής ασυμφωνίας. Η γνωστική σύγκρουση ανάμεσα στη βεβαιότητά τους ότι το τέσσερα δεν είναι ίσο με πέντε και την πεποίθησή τους ότι οι υπολογισμοί που παρουσιάζονται είναι ακριβείς προκάλεσε έντονες αντιδράσεις. Οι μαθητές ήταν σε εμφανή σύγχυση από αυτούς υπολογισμούς που καταλήγουν σε ένα αδύνατο αποτέλεσμα.

Οι μαθητές θεώρησαν ότι έκαναν λανθασμένη εφαρμογή της ταυτότητας. Η μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου ήταν το δυσκολότερο σημείο της απόδειξης και οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύονταν να παρακολουθήσουν τους υπολογισμούς που εκτέθηκαν στην εκφώνηση. Έτσι εντόπισαν το πιθανό υπολογιστικό λάθος στο στάδιο της απόδειξης που δεν κατείχαν καλά. Παρόλα αυτά, καμία αιτιολόγηση δεν προσκόμισαν για την χρήση της ταυτότητας. Ορισμένοι μαθητές κάνοντας πράξεις μέσα στις παρενθέσεις βρήκαν: $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Εντούτοις, αυτό δεν τούς βοήθησε να κατανοήσουν την αιτία του αποτελέσματος 4=5. Η κύρια αιτία της αποτυχίας των μαθητών σχετίζεται με την ενσωμάτωση δύσκολων εννοιών σε μια σύνθετη μια ακολουθία συλλογισμών που δεν έχουν συνηθίσει.

Συμπεράσματα

Η διδακτική πρακτική με τα μαθηματικά παράδοξα στις τάξεις του Λυκείου αποδείχτηκε μαθησιακά γόνιμη. Οι μαθητές κατάφεραν να προσεγγίσουν οικείες μαθηματικές έννοιες με ένα νέο και ασυνήθιστο τρόπο που τούς προκάλεσε εκπλήξεις, ασυμφωνίες και γνωστικές αποσταθεροποιήσεις. Τα προαναφερόμενα διδακτικά πειράματα, αποκαλύπτουν τη σημασία της παιδαγωγικής της έκπληξης και αναδεικνύουν διάφορες πλευρές της, όπως μεθοδολογικές, μεταγνωστικές, συναισθηματικές και κυρίως γνωστικές. Στις καταστάσεις προβληματισμού και έκπληξης που εκτέθηκαν, οι μαθητές αναγκάζονται να σκεφτούν σε βάθος, να πάρουν ενεργό μέρος στις μαθηματικές συζητήσεις της τάξης, αμφισβητώντας συνήθεις εσφαλμένους αυτοματισμούς, υπερβαίνοντας αντιφάσεις και προβάλλοντας πειστικά αποδεικτικά επιχειρήματα. Οι μαθηματικές παραδοξότητες χρησιμοποιήθηκαν ως διδακτικά τεχνάσματα που προκάλεσαν γνωστικές συγκρούσεις προωθώντας αναδομήσεις που οδήγησαν σε μεγαλύτερη εσωτερική συνοχή των γνώσεων των μαθητών. Σε ανάλογα συμπεράσματα κατέληξαν και άλλες έρευνες (Movshovitz-Hadar & Hadass 1990, Movshovitz-Hadar & Hadass 1991). Ωστόσο, υπήρξαν και περιπτώσεις μαθητών που η διδακτική τεχνική της γνωστικής σύγκρουσης τούς προξένησε πρόσκαιρη σύγχυση και απογοήτευση. Με την ενθάρρυνση επιδιώχτηκε, ενίσχυση της αυτοπεποίθησης και ανάκτηση της ελπίδας.

Οι παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι η έκπληξη τονώνει θαυμάσια κίνητρα για τη λύση παράδοξων προβλημάτων και προκαλεί στους μαθητές αναστοχασμό και κριτική επανεξέταση των μαθηματικών γνώσεων που απαιτούνται για την προαγωγή της μάθησης που βασίζεται στο νόημα. Τελικά, θα πρέπει να υπογραμμιστεί ότι ο στόχος της έκπληξης αντιστράφηκε κατά τρόπο απρόβλεπτο: ενώ τα παράδοξα προβλήματα προκάλεσαν έκπληξη στους μαθητές, εκείνοι με τη σειρά τους εξέπληξαν πολλαπλά και τον διδάσκοντα: *όσο πιστεύαμε ότι θα εκπλήξουμε τόσο πιο έκπληκτοι μέναμε!* Οι αντιδράσεις των μαθητών και οι αναθεωρήσεις των αντιλήψεών τους αποτελούν έναν ανεκτίμητο διδακτικό θησαυρό.

Πώς θα μπορούσε να αλλάξει η άχαρη και άνυδρη διδασκαλία των μαθηματικών στο Λύκειο; Αναμφισβήτητα, η έκπληξη είναι ένα μαθησιακό κίνητρο για τους μαθητές που ως εκπαιδευτικοί δεν πρέπει να αγνοήσουμε ή να υποτιμήσουμε. Εκτυλίσσεται συνήθως σε μικρή χρονική διάρκεια και συνδυάζει «*το τερπνόν μετά του ωφελίμου*». Αποτελεί ένα ισχυρό μέσο εσωτερικής παρακίνησης για μάθηση που κρατά αμείωτο το ενδιαφέρον των μαθητών, γεννά νέες ιδέες και συνιστά ένα πρόσφορο διδακτικό εφεύρημα για περαιτέρω μαθησιακές αναζητήσεις. Τι μπορούμε να κάνουμε για να υπάρχει στην τάξη μας το στοιχείο της έκπληξης; *Πρώτον*, να επιλέγουμε ερεθίσματα που δεν είναι αυθαίρετα, αλλά απαντούν στα προϋπάρχοντα ερωτήματα και τη θολή αίσθηση ζήτησης των μαθητών μας. *Δεύτερον*, να αξιοποιήσουμε παράδοξα ή άλλες παρεμφερείς ιδέες που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια. Οι εκπλήξεις βρίσκονται παντού και μπορούν να εμπλουτίσουν τη διδασκαλία προκαλώντας τους μαθητές να σκεφτούν σε βάθος και να ανακαλύψουν τη γνώση. Αλλά υπάρχει ένα πρόβλημα: *οι περισσότεροι δάσκαλοι των μαθηματικών είμαστε τόσο εξοικειωμένοι με το περιεχόμενο του μαθήματος που όταν διδάσκουμε δεν μας προξενεί πλέον πραγματική «έκπληξη»*. Η τεχνική της έκπληξης βελτιώνει το καθημερινό μάθημα με εναλλακτικές προσεγγίσεις που μεταμορφώνουν την αδιατάρακτη ρουτίνα και δημιουργούν χαρούμενη διάθεση. Στα μαθηματικά παράδοξα ενυπάρχει το στοιχείο της έκπληξης που κεντρίζει την κρίση και τον αναστοχασμό. Όμως, είναι αναγκαίο κατά τη διάρκεια της μαθηματικής συζήτησης στην τάξη να ενθαρρύνονται οι μαθητές να εκφράζουν αυθόρμητα αυτά που σκέφτονται. Μόνο τότε θα βγουν στην επιφάνεια η έλλειψη κατανόησης, οι δυσκολίες και τα πραγματικά προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν. Ίσως τότε μπορεί:

- Η παρανόηση να κάνει τόπο στη μαθηματική κατανόηση.
- Η τυποποίηση να δώσει τη θέση της στην ποίηση.
- Η πλήξη να ανατραπεί από την έκπληξη.

Βιβλιογραφία

Abiteboul, O. (1998). *Le paradoxe apprivoisé,* Paris: Flammarion.

Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, Villeurbanne : IREM de Lyon, CRDP.

Behr, M. & Harel, G. (1990). Students' Errors, Misconceptions, and Cognitive Conflict in Application of Procedures. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **12(3 & 4)**, 75-84.

Berlyne, D. N. (1960). *Conflict, arousal, and curiosity*. New York : McGraw-Hill.

Brown, S.-I. & Walter, M. (1990). *The Art of Problem Posing*. Hillsdale, N.J.: LEA.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher,* **32(1)**, 9-13.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, **13(1)**, 15–42.

DeBellis, V.A. & Goldin, G. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, **63**, 131-147.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M.C. Merlin (Ed.), *Handboock of research on teaching* (pp. 119-161). New York: Macmillan Publishing Company.

Festinger, L.(1957). *A Theory of Cognitive Dissonance.* Evanston, 111: Row, Peterson.

Giordan, A. (1998). *Apprendre !* Paris: Belin.

Gomez-Chacon, I. M. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **43**, 149-168.

Hannula, M. S. (2006). Affect in Mathematical Thinking and learning. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 209-232. Rotterdam: Sense.

Johnson, D.-R. (2007). The Element of Surprise: An Effective Classroom Technique. *Mathematics Teacher*, **100**, (special issue), 56–59.

Kleiner, I. & Movshovitz-Hadar N. (1994). The role of paradoxes in the evolution of mathematics, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 101, **10**, pp. 963-974.

Knuth, E. (2002). Fostering Mathematical Curiosity. *Mathematics Teacher*, **95**, 126–30.

Kosyvas, G. (2010). Problèmes ouvertes: notion, catégories et difficultés, *Annales de Didactique et des* Sciences cognitives, 15, IREM de Strasbourg, pp. 43-71.

Kosyvas, G. & Baralis G. (2010). Les stratégies des élèves d'aujourd'hui sur le problème de la duplication du carré, Repères IREM, 78, pp. 13-36.

Malone, T.W. & M.R. Lepper (1987). Making Learning Fun: A Taxonomy of Intrinsic Motivations for Learning. In R.E. Snow and M.J. Farr (Eds), *Aptitude, Learning and Instruction: III. Conative and affective process analyses*, (pp. 223-253). Erlbaum: Hilsdale, NJ.

McLeod, D. B. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 575-596). New York: Macmillan.

Movshovitz-Hadar N. & Webb J. (1998). *One Equals Zero and Other Mathematical Surprises: Paradoxes, Fallacies and Mind Bogglers*. Emeryville (USA): Key Curriculum Press.

Movshovitz-Hadar, N. & Hadass, R. (1990). Preservice education of math teachers using paradoxes, *Educational Studies in Mathematics*, **21**, 265-287.

Movshovitz-Hadar, N. & Hadass, R. (1991). More about Mathematical Paradoxes in Preservice Teacher Education. *Teaching & Teacher Education*, **7(1)**, 79-92.

Northrup, E.- P. (1944). *Riddles in Mathematics: A Book of Paradoxes*. New York: D. Van Nostrand.

Tirosh, D. & Graeber, A. (1990). Evoking Cognitive Conflict to Explore Preservice Teachers' Thinking About Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21(2)**, 98-108.

Viau, R. (2003). *La motivation en contexte scolaire*. Bruxelles: De Boeck.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics*, **63(2)**, 113-121.

Αθανασίου, Χ. & Φιλίππου, Γ. (2007). Τα κίνητρα των μαθητών στα μαθηματικά κατά τη μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο και οι διαφορές με βάση το φύλο. Στο Χ. Σακονίδης, & Δ. Δεσλή (Επιμ.), *Πρακτικά του 2ου συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ*, (σσ. 99-109). Εκδόσεις Τυπωθήτω.

Καγκουρά, Θ., Γαγάτσης, Α., Μονογυιού, Α., & Ηλία, Ι. (2009). Επίλυση ασυνήθιστων προβλημάτων και πεποιθήσεις των μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου Ελλάδας για τα μαθηματικά. Στο Α. Γαγάτσης, Α. Φιλίππου, Π. Δαμιανού & Ε. Αυγερινός (Επιμ.), *Πρακτικά του 11ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης* (σσ. 445–468). Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Κόσυβας, Γ. (2010). Η παιδαγωγική της έκπληξης με μαθηματικά παράδοξα στο Λύκειο, *Πρακτικά 27ου συνεδρίου της ΕΜΕ,* 584-601, ΕΜΕ.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2001). *Κείμενα Παιδείας: Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Ατραπός.