ΑΤΥΠΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΧΕΙΡΑΨΙΩΝ

Γιώργος Δ. Κόσυβας, Βαρβάκειο Πειραματικό Λύκειο
gkosyvas@yahoo.com

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται ένα διδακτικό πείραμα που πραγματοποιήθηκε στην Α΄ Γυμνασίου. Ανατέθηκε στους μαθητές το πρόβλημα των χειραψιών για ομαδοσυνεργατική λύση. Από τα ευρήματα της έρευνας προκύπτει ότι οι μαθητές ανέδειξαν άτυπα μοντέλα συνδυαστικού συλλογισμού, γενίκευσης και γεωμετρικής άλγεβρας. Η άτυπη μοντελοποίηση ήταν αυθόρμητη και είχε άμεση σχέση με τις προσωπικές εμπειρίες των μαθητών αλλά και την προηγούμενη διδασκαλία.

Εισαγωγή και θεωρητικό πλαίσιο

Τα μοντέλα είναι απλουστευμένες παραστάσεις, που παρουσιάζουν μόνο τα ουσιώδη μέρη της πραγματικότητας, ενώ παραλείπουν πολλές λεπτομέρειες. Ένα απλό παράδειγμα είναι οι χάρτες. Τα μαθηματικά μοντέλα είναι μαθηματικές χαρτογραφήσεις της πραγματικότητας. Στη βιβλιογραφία έχουν ερμηνευτεί με ποικίλους τρόπους (Romberg *et al*. 2005, Gravemeijer *et al*. 2000, Greer 1997, Kaiser 2011). Σύμφωνα με μια εκδοχή τα μοντέλα είναι «*συστήματα στοιχείων, διαδικασιών, σχέσεων και κανόνων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν, να εξηγήσουν, ή να προβλέψουν τη συμπεριφορά άλλων συστημάτων*» (Doerr & English, 2003, σ. 112). Τα μοντέλα αποσκοπούν στη συναγωγή συμπερασμάτων για την πραγματικότητα και διακρίνονται σε περιγραφικά (ερμηνευτικά ή πρόβλεψης) και κανονιστικά.

Η μαθηματική μοντελοποίηση αποτελεί μια αμοιβαία γονιμοποίηση των μαθηματικών και του υπόλοιπου κόσμου (Pollak 1979). Η διαδικασία μοντελοποίησης έχει ως αφετηρία μια κατάσταση προβληματισμού με διάχυτες συνήθως πληροφορίες η οποία τοποθετείται στον εξωμαθηματικό κόσμο. Η συστηματική εξέταση του πραγματικού προβλήματος περιλαμβάνει το χωρισμό του σε βήματα, καθώς και την ανάλυση και συνύφανσή τους. Η διαδικασία μοντελοποίησης συνεχίζεται με τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος, τη δημιουργία του μοντέλου και τη λύση του με κατάλληλες μαθηματικές έννοιες. Τέλος, με επιστροφή στο αρχικό πρόβλημα γίνεται ερμηνεία των αποτελεσμάτων και έλεγχος συμφωνίας τους με τα πραγματικά γεγονότα. Αν τα αποτελέσματα απέχουν πολύ από την πραγματικότητα μπορεί να τροποποιηθεί το μαθηματικό μοντέλο με προσθήκη νέων παραμέτρων και να επαναληφθεί η σχετική διαδικασία ώστε τα αποτελέσματα να ανταποκρίνονται καλύτερα στο αρχικό πρόβλημα (Κλαουδάτος 1990).

Η μαθηματική μοντελοποίηση χωρίς να ταυτίζεται με τις εφαρμογές των μαθηματικών, ζητά από τους μαθητές να αναπτύσσουν κριτικές ικανότητες και να αναγνωρίζουν σχέσεις ανάμεσα στον πραγματικό κόσμο και τα μαθηματικά. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές χτίζουν γνωστικές γέφυρες μεταξύ των μαθηματικών ως εργαλείου κατανόησης του κόσμου και ως αφηρημένης δομής. Η προσέγγιση της μοντελοποίησης αποτελεί μια απαιτητική διαδικασία που υπηρετεί πολύπλευρους μαθησιακούς στόχους, όπως η κατανόηση της κατάστασης προβληματισμού, η χρήση των μαθηματικών για τη διαμόρφωση πειστικών απαντήσεων και η μεταφερσιμότητα γνώσεων από άλλα επιστημονικά πεδία. Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης καλλιεργούν ικανότητες διερεύνησης και δημιουργικότητας και αναπτύσσουν κατάλληλες στρατηγικές, ενώ η ανάπτυξη του συλλογισμού των μαθητών υπερβαίνει τη συνήθη σχολική εμπειρία. Πολλοί ερευνητές εστίασαν την προσοχή τους στη μαθηματική μοντελοποίηση αποδίδοντας σημαντική βαρύτητα στις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων στην αίθουσα διδασκαλίας (Κολέζα 2009, Blum & Niss 1991, Lesh & Doerr 2003b, English 2006). Οι μαθηματικές έννοιες καθώς συνδέονται αμεσότερα με τον πραγματικό κόσμο προσφέρουν στους μαθητές πλούσιες ευκαιρίες μάθησης και εννοιολογικής επεξεργασίας ενθαρρύνοντας τη μελετημένη χρήση ποικίλων μέσων συνοπτικής περιγραφής και την ανάπτυξη γενικεύσεων (Lesh, & Doerr 2003a, Mousoulidis *et al*. 2010).

Στη σχολική τάξη η διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης δεν καταλήγει πάντοτε σε τυποποίηση ή γενίκευση, αλλά συνήθως επηρεάζεται από την άτυπη γνώση. Τα κοινωνικο-πολιτισμικά χαρακτηριστικά της βιωματικής γνώσης διαμορφώνονται στο εξωσχολικό περιβάλλον ή παράλληλα με το σχολείο. Τα άτυπα μαθηματικά αναφέρονται σε γνώσεις οι οποίες όμως δεν έχουν οργανωθεί σύμφωνα με τα επίσημα γνωρίσματα που αναγνωρίζονται από τη μαθηματική κοινότητα. Τα μοντέλα που δημιουργούν οι ίδιοι οι μαθητές αποτελούν εννοιολογικά και εποπτικά συστήματα που συμβάλλουν στην κατανόηση των γνωστικών διεργασιών της μαθηματικής τους σκέψης. Κατά τη διαδικασία της μοντελοποίησης οι μαθητές σχηματίζουν πρόσφορες νοητικές εικόνες που διευκολύνουν τις διαδικασίες αφαίρεσης ή γενίκευσης. Σε αυτή την εργασία θα συγκεντρώσουμε την προσοχή μας στην άτυπη μοντελοποίηση του προβλήματος των χειραψιών από τους μαθητές.

Κυκλοφορούν διάφορα προβλήματα χειραψιών. Το πλέον συνηθισμένο είναι το ακόλουθο: *πόσες διαφορετικές χειραψίες είναι δυνατές σε ένα δωμάτιο με ν άτομα;* Στο πρόβλημα αυτό είναι αδύνατο να χαιρετήσει κάποιος τον εαυτό του ή να κάνει πολλές χειραψίες με το ίδιο άτομο. Έτσι θα υπάρχουν πάντα δύο άτομα στο δωμάτιο, τα οποία θα χαιρετηθούν με το ίδιο πλήθος χειραψιών. Αυτή η ερμηνεία χρησιμοποιεί την αρχή των κελιών του Dirichlet. Για ν άτομα, το πλήθος των χειραψιών προκύπτει από το άθροισμα των ν-1 διαδοχικών φυσικών αριθμών: 1+2+…+ν-1. Το άθροισμα αυτό είναι θεμελιώδες για πολλές καταστάσεις αρίθμησης (Bezuszka & Kenney 2004). Είναι: $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$.

Ο Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ανακάλυψε τον τύπο υπολογισμού του αθροίσματος των ν πρώτων διαδοχικών φυσικών αριθμών όταν ήταν μαθητής του δημοτικού σχολείου (Billstein *et al.* 2007). Ο δάσκαλος είχε ζητήσει από τους μαθητές της τάξης να υπολογίσουν το άθροισμα των πρώτων 100 φυσικών αριθμών αναμένοντας ότι θα απασχολούσε την τάξη για αρκετό χρόνο. Ο Gauss απέφυγε την ανόητη μονοτονία των ατέρμονων προσθέσεων και προτού ο δάσκαλος προλάβει να επιστρέψει στην έδρα, σχεδόν ακαριαία ανακάλυψε τη λύση καταπλήσσοντάς τον. Παρατήρησε ότι τα αθροίσματα της ακολουθίας και της αντίστροφης ακολουθίας είναι ίσα:

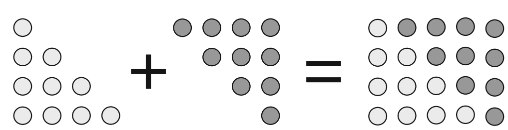
$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Sigma} &=& 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 \\ \mathbf{\Sigma} &=& 100 + 99 + 98 + \ldots + 1 \\ \hline 2\mathbf{\Sigma} &=& 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 \end{array}$$

Σε κάθε στήλη το άθροισμα είναι 101 και υπάρχουν 100 στήλες. Έτσι υπάρχουν 100 αθροίσματα του 101 και η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ανάγεται σε πολλαπλασιασμό:

$$2\mathbf{\Sigma} = 100 \times 101 \ \text{ ή } \ \mathbf{\Sigma} = (100 \times 101)/2 = 5.050.$$

Επομένως, το πλήθος των χειραψιών ν ατόμων είναι: $1+2+\ldots+(\nu-1)=\frac{\nu(\nu-1)}{2}$.

Οι αριθμοί που περιγράφονται στον τελευταίο τύπο ονομάζονται τρίγωνοι αριθμοί. Η συμμετρία της λύσης για μια πενταμελή παρέα μπορεί επίσης να παρατηρηθεί στην ακόλουθη οπτική απόδειξη:



$\frac{5 \times 4}{2} = 10$ χειραψίες.

Το πρόβλημα των χειραψιών συνδέεται στενά με τη γεωμετρία και τη συνδυαστική. Δύο γεωμετρικά ισοδύναμα προβλήματα είναι: α) *Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός των σημείων τομής που σχηματίζονται από ν ευθείες του επιπέδου;* β) *Πόσες ευθείες διέρχονται από ν σημεία του επιπέδου, αν ανά 3 δεν είναι συνευθειακά;* Η απάντηση δίνεται από τον τύπο των συνδυασμών των ν αντικειμένων ανά δύο:

$$\binom{\nu}{2} = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$$

Το πρόβλημα με τις χειραψίες είναι θαυμάσιο για όλες τις ηλικίες των μαθητών και ξεχωρίζει για τις πολλαπλές λύσεις, την ποικιλία των διαφορετικών αναπαραστάσεων και τον πλούτο των μαθηματικών ιδεών. Αξιοσημείωτη είναι η στρατηγική της αυθόρμητης δραματοποίησης που παρατηρήθηκε σε δεκάχρονους μαθητές (Κόσυβας 1996). Οι πειραματικές δοκιμές στις σχολικές τάξεις έχουν αποκαλύψει λύσεις σε διαφορετικά επίπεδα αφαίρεσης (Billington & Evans 1987) και έχουν συνεισφέρει στη μελέτη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών (Blanton & Kaput 2003). Στην παρούσα εργασία διερευνάται η συμβολή του προβλήματος στη γενίκευση και το συνδυαστικό συλλογισμό.

Η σημασία της γενίκευσης κατά τη διαδικασία λύσης μαθηματικού προβλήματος βρίσκεται στην καρδιά των μαθηματικών (Mason 1996). Στις δύο τελευταίες δεκαετίες το ερευνητικό ενδιαφέρον για τη γενίκευση συγκεντρώνεται στην αναγνώριση, εκμαίευση και περιγραφή κανονικοτήτων ή δομών καθώς και την ανακάλυψη κανόνων και μοντέλων από τους ίδιους τους μαθητές. Στη διδασκαλία των μαθηματικών οι κανονικότητες θεωρούνται ως σημαντικός συνδετικός κρίκος ανάμεσα στην Αριθμητική και την Άλγεβρα (Κολέζα 2009). Επιπλέον οι διερευνήσεις προβλημάτων αποτελούν σημείο εκκίνησης για την εύρεση του κανόνα και τη συναρτησιακή μοντελοποίηση. Οι προσεγγίσεις αυτές εστιάζουν στη γενική έκφραση μοτίβων, καθώς τα μαθηματικά θεωρούνται ως η επιστήμη της συστηματικότητας και οι περισσότερες μαθηματικές ιδέες παραπέμπουν στη γενίκευση.

Ο συνδυαστικός συλλογισμός είναι ένα είδος σκέψης που συνδέεται με προβλήματα απαρίθμησης των στοιχείων πεπερασμένων συνόλων. Δεν είναι πάντοτε εύκολη η άμεση απαρίθμηση των στοιχείων οποιουδήποτε συνόλου. Για παράδειγμα αν θέλουμε να βρούμε πόσες εξάδες πρέπει να παίξουμε στο LOTTO για να έχουμε σίγουρη την επιτυχία η λύση σκοντάφτει στο μεγάλο πλήθος των εξάδων που πρέπει να καταμετρηθούν. Για τη μελέτη τέτοιων προβλημάτων διαμορφώθηκε ένας ιδιαίτερος κλάδος των διακριτών Μαθηματικών, η Συνδυαστική, που επεξεργάζεται συστηματικές μεθόδους υπολογισμού, που είναι σύντομες και οικονομικές χωρίς προσφυγή στην άμεση καταγραφή και καταμέτρηση. Οι διάφορες εργασίες για τον συνδυαστικό συλλογισμό καταγίνονται με διάφορα προβλήματα (π. χ. με καρτεσιανά γινόμενα, μεταθέσεις, διατάξεις ή συνδυασμούς) και ανταποκρίνονται στην ανάγκη μελέτης των πιθανοτήτων. Σύμφωνα με τους Piaget και Inhelder (1951) οι συνδυαστικές διεργασίες είναι λογικομαθηματικά μοντέλα που χαρακτηρίζουν το στάδιο του τυπικού συλλογισμού. Με αυτή την θέση συμπλέουν και οι Fischbein *et al*. (1970), που επιπλέον ανέδειξαν τη σημασία των διαισθητικών μοντέλων και πρότειναν τη χρήση του δεντροδιαγράμματος. Η πρόωρη διδασκαλία των τύπων της Συνδυαστικής διαταράσσει τις «εμπειρικές και διαισθητικές στρατηγικές» οι οποίες διευκολύνουν τους μαθητές να συλλαμβάνουν και να χειρίζονται συνδυαστικές καταστάσεις (Fischbein & Gazit 1988). Σύμφωνα με τους Batanero *et al*. (1997) οι καταστάσεις αυτές ταξινομούνται σε τρία διαφορετικά συνδυαστικά μοντέλα: επιλογή, διαμερισμός και κατανομή (selection, partition and distribution). Ο Rudat (2007) πρόσθεσε και ένα τέταρτο μοντέλο τη σύνδεση (association), στο οποίο κατατάσσεται και το πρόβλημα των χειραψιών.

Σκοπός και μεθοδολογία

Η μοντελοποίηση ζητά από τους μαθητές να διατυπώνουν εικασίες και μαθηματικά επιχειρήματα και να αναπτύσσουν τις δικές τους ιδέες και στρατηγικές. Το εν λόγω ερευνητικό εγχείρημα αποσκοπεί στη μελέτη της άτυπης μοντελοποίησης του προβλήματος των χειραψιών από τους μαθητές της Πρώτης Γυμνασίου και τη διερεύνηση του συνδυαστικού συλλογισμού και της γενίκευσης. Οι μαθητές, μη κατέχοντας τυπικές γνώσεις Συνδυαστικής και Άλγεβρας, στην προσπάθεια μοντελοποίησης τους κόσμου τους, υποθέτουμε ότι θα χρησιμοποιήσουν άτυπα συνδυαστικά και αλγεβρικά μοντέλα. Η ερευνητική σκηνοθεσία περιλαμβάνει την ομαδοσυνεργατική λύση ενός προβλήματος (Κόσυβας 2011). Το πρόβλημα τέθηκε κατά το διδακτικό έτος 2008-9 στην Α΄ τάξη του 1ου Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών. Η διατύπωση είναι η ακόλουθη:

Το πρόβλημα των χειραψιών

1) *Όταν ξανασυναντήθηκαν 2 συμμαθητές μιας παρέας, χαιρετήθηκαν σφίγγοντας το δεξί τους χέρι με μια χειραψία. Σήμερα το πρωί ξαναβρέθηκαν οι* ***4*** *μαθητές της παρέας. Πόσες χειραψίες αντάλλαξαν συνολικά μεταξύ τους; Πώς μπορείτε να το δείξετε στα άλλα μέλη της ομάδας σας; Αναλογιστείτε και συζητήστε το μαζί.*

2) *Στην τάξη υπάρχουν* ***30*** *μαθητές και ανταλλάσσουν χειραψίες μεταξύ τους. Αν ο κάθε μαθητής χαιρετά καθέναν από τους άλλους με μια χειραψία, πόσες διαφορετικές χειραψίες θα κάνουν συνολικά όλοι οι μαθητές της τάξης; Πώς θα πείσετε κάποιον που αμφιβάλλει ότι η απάντηση της ομάδας σας είναι σωστή;*

3) *Πόσες χειραψίες θα κάνουν οι* ***ν*** *μαθητές ενός σχολείου αν χαιρετηθούν όλοι μεταξύ τους; Μπορείτε να βρείτε ένα γενικό κανόνα ή ένα μαθηματικό τύπο για να υπολογίζετε εύκολα πόσες θα είναι κάθε φορά οι χειραψίες αν γνωρίζετε το πλήθος των μαθητών του σχολείου; Να σκεφτείτε και να αιτιολογήσετε τους συλλογισμούς σας.*

Το πρόβλημα χωρίστηκε σε τρία υποπροβλήματα: Το πρώτο αφορά μια μικρή συλλογή (ν=4) και ευνοεί την εφαρμογή της απαρίθμησης των δυνατών ζευγών σε ένα βιωματικό ή γεωμετρικό πλαίσιο και την παρατήρηση βασικών κανονικοτήτων. Το δεύτερο αφορά μια μεγαλύτερη συλλογή (ν=30) και παραπέμπει σε υπολογιστικούς χειρισμούς. Ο γεωμετρικός και ο αριθμητικός τύπος απάντησης συνιστούν δύο ξεχωριστά είδη αναπαράστασης. Το τρίτο υποπρόβλημα παραπέμπει στη γενίκευση.

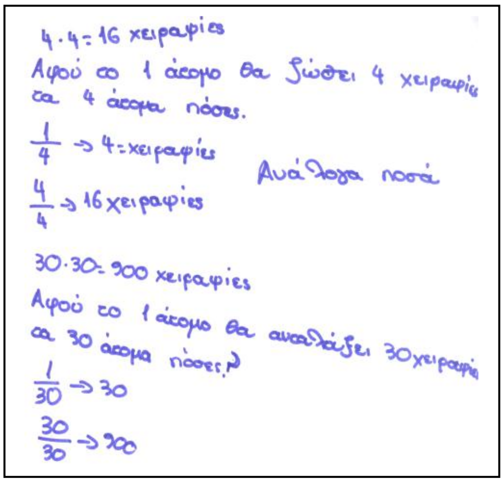
Η ανάλυση των δεδομένων είναι ποιοτική και αφορά κυρίως τη λεπτή παρατήρηση των μαθηματικών αλληλεπιδράσεων των μαθητών καθώς προσπαθούν να κατανοήσουν και να λύσουν το πρόβλημα (Kosyvas 2010).

Παρουσίαση και συζήτηση των στρατηγικών μοντελοποίησης

Στο εν λόγω πρόβλημα οι μαθητές επινόησαν ποικίλα μοντέλα για την περιγραφή του προβλήματος ή την εύρεση ενός κανόνα. Δοκίμασαν άτυπες στρατηγικές όπως χρήση ονομαστικών καταλόγων, φυσικών κινήσεων ή κατάλληλων σχημάτων (δεντροδιαγράμματα, πίνακες διπλής εισόδου). Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ορισμένες από τις στρατηγικές μοντελοποίησης των μαθητών που εμφανίστηκαν.

α) Μοντέλα απαρίθμησης και υπολογισμού

Παρακάτω παρουσιάζεται χωρισμένη σε δύο μέρη η συζήτηση πάνω στην εργασία της ομάδας Β (Ελ. Δ. Γκ. Αν). Η ομάδα αυτή αποτελείται από τρεις μέτριους και έναν αδύνατο μαθητή.



Δάσκ.: *... Τι λέτε για αυτό το μέρος της εργασίας της ομάδας Β;*

Στ.: *Δεν είναι ανάλογα τα ποσά.*

Γκ.: *Βρήκαμε ότι το 1/ 4 των παιδιών θα κάνει 4 χειραψίες. Τότε τα 4/4 θα κάνουν 16 χειραψίες.*

Στ.: *… Όμως δεν είναι 16 όλες οι χειραψίες.*

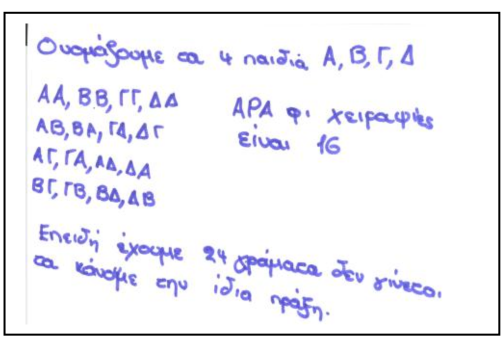
Γκ.: *Αφού το 1 άτομο θα δώσει 4 χειραψίες, τα 4 θα δώσουν 16.*

Στ.: *Το ένα άτομο δεν δίνει 4 χειραψίες.*

Γκ.: *Εμείς ...*

Στ.: *Το ένα άτομο δίνει 3 χειραψίες…*

Οι μαθητές της ομάδας αυτής θεώρησαν ότι το πρόβλημα λύνεται με αναλογία. Ο λόγος χρήσης της αναλογίας παραπέμπει σε κοινωνικές συμβάσεις οι οποίες όμως δεν ισχύουν στο πρόβλημα των χειραψιών. Η γνωστική διαμάχη των μαθητών για τον τρόπο υπολογισμού των χειραψιών είναι θεμελιώδης και συνδέεται με την ανάπτυξη του συνδυαστικού συλλογισμού.



Δάσκ.: *... Τι λέτε για αυτό;*

Ε.: *Σωστά συμβόλισαν τα παιδιά της παρέας με Α, Β, Γ και Δ. Όμως δεν καταλαβαίνω τα ΑΑ ή ΒΒ.*

Δ: *Το παιδί Α κάνει χειραψία με το Α!*

Ε.: *Αυτό δε γίνεται!*

Δ: *Γιατί δε γίνεται;*

Ε.: *Μπορεί το παιδί Α να χαιρετήσει το Α;*

Δ: (Σιωπή) *Όχι. …*

Λ.: *Να προσθέσω ότι το παιδί Α θα χαιρετήσει το Β μόνο μια φορά.*

Ελ.: *Ναι έτσι είναι.*

Λ.: *Γράφετε για παράδειγμα ΑΒ και ΒΑ. Αυτές είναι δύο χειραψίες και όχι μία.*

Δ: *Ναι αφού ο Α δίνει χειραψία και ο Β παίρνει. Είναι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ …*

Λ.: *Ναι αλλά στη διαφάνεια υπάρχουν επίσης ΒΑ, ΓΒ και ΔΓ. Έτσι αντί για 6 χειραψίες που είναι το σωστό βρίσκετε 16.*

Ελ: *Βρήκαμε ότι οι χειραψίες της παρέας των τεσσάρων παιδιών είναι 16. Τις συμβολίσαμε με γράμματα και τις μετρήσαμε όλες μία-μία. Όμως δεν μπορούμε να βρούμε τις χειραψίες των 30 μαθητών γιατί έχουμε 24 γράμματα!*

Μαθητές: *Όχι! Όχι!*

…

Δάσκ.: *Η Κα.*

Κα.: *Δεν έπρεπε να τις ξαναμετρήσουν. Οι χειραψίες των τεσσάρων παιδιών είναι 6: ΑΒ και ΓΔ, ΑΓ και ΒΔ, ΑΔ και ΒΓ.*

Δ.: *Τώρα κατάλαβα.*

…

Δάσκ.: *Μπορεί κάποιος από την ομάδα Β να διορθώσει;*

Δ.: *Θα προσπαθήσω. Λοιπόν είπαμε ότι δεν μπορεί κάποιος να κάνει χειραψία με τον εαυτό του. Έτσι αν σβήσουμε τα ΑΑ, ΒΒ, ΓΓ και ΔΔ οι χειραψίες γίνονται 12. Πρέπει όμως να σβήσουμε τις διπλές χειραψίες. Έτσι θα κρατήσουμε τις μισές : ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ και ΓΔ. Τελικά οι χειραψίες είναι 6.*

Δάσκ.: *Μπράβο!*

Λ.: *Να διορθώσω το δεύτερο πρόβλημα;*

Δάσκ.: *Βεβαίως!*

Λ.: *Ας πούμε ότι κάθε παιδί δέχτηκε 30 χειραψίες. Τότε θα είχαμε 30×30=900 χειραψίες. Όμως, κανένα παιδί δεν μπορεί να δώσει χειραψία στον εαυτό του. Έτσι μένουν 900-30=870 χειραψίες. Όμως αυτές έχουν μετρηθεί δύο φορές αφού δύο απλωμένα χέρια είναι μια χειραψία. Έτσι θα υπάρχουν 870 ÷ 2 = 435 χειραψίες.*

Δάσκ.: *Μπράβο!*

Στον προηγούμενο διάλογο θα πρέπει να υπογραμμιστεί η αναστοχαστική επανεξέταση και διόρθωση της λύσης από τον Δ., μέλος της ομάδας Β, και η προσωρινή αποδοχή της ψευδούς εικασίας από τον Λ. που συνέβαλε στην αναδόμηση και ανασκευή των υπολογισμών και την ανακάλυψη νέας πρωτότυπης στρατηγικής. Η εν λόγω λύση δείχνει βαθύτερη κατανόηση. Αξιοπρόσεκτη είναι η ποικιλία άτυπου συνδυαστικού συλλογισμού. Οι πρώτες εσφαλμένες στρατηγικές αφορούσαν απαριθμήσεις τεμαχισμών (ΑΒ, ΓΔ) και κυκλικές απαριθμήσεις (πχ. ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ) χωρίς συστηματική καταγραφή. Ορισμένοι μαθητές προέβησαν σε επαναληπτικές διατάξεις (ΑΑ, ΒΒ, ΓΓ κλπ), διατάξεις (ΑΒ, ΒΑ, ΑΓ, ΓΑ κλπ) ή δημιούργησαν έναν ημιτελή κατάλογο συνδυασμών με τη μέθοδο δοκιμής και πλάνης. Κάποιοι έδωσαν διαφορετικό νόημα στη χειραψία θεωρώντας ότι δύο μαθητές κάνουν δύο χειραψίες (ο Α δίνει και ο Β παίρνει) και μέτρησαν τον αριθμό των διατεταγμένων ζευγών. Στις ανεπιτυχείς υπολογιστικές στρατηγικές συγκαταλέγονται: επαναληπτικές διατάξεις ($4\times4=16$) και διατάξεις ($3\times4=12$). Το φαινόμενο της σύγχυσης διατάξεων και συνδυασμών έχει επισημανθεί στη βιβλιογραφία (Sriraman & English 2004).

Η επικοινωνία στις συνεργατικές ομάδες αύξησε τη μαθηματική αυτοπεποίθηση και διατήρησε το ενδιαφέρον των αδύνατων μαθητών διευκολύνοντάς τους να αλλάξουν τις αρχικές ιδέες τους και να σημειώσουν πρόοδο. Οι ανακρίβειες, οι παρανοήσεις και οι δυσκολίες που αποκαλύφθηκαν καθώς οι μαθητές μοιράζονταν τις σκέψεις τους αποτέλεσαν γόνιμες μαθησιακές ευκαιρίες που συνέβαλαν στην επιτυχή ολοκλήρωση του έργου τους. Στις σωστές στρατηγικές απαρίθμησης συγκαταλέγονται εκείνες που παρουσιάζουν μια οργανωμένη καταγραφή χωρίς επαναλήψεις ή διπλομετρήματα των δυνατών συνδυασμών και ταξινομούνται ως εξής: α) Συστηματική απαρίθμηση με ένα στοιχείο σταθερό. Παίρνουν ένα αντικείμενο ως αρχικό και μετρούν με τη σειρά τους δυνατούς συνδυασμούς ανάμεσα σε αυτό και τα άλλα αντικείμενα της συλλογής. Για παράδειγμα στη συλλογή Α, Β, Γ, Δ, οι μαθητές σταθεροποιούν το Α και απαριθμούν τα ακόλουθα ζεύγη: ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. Έπειτα ξαναρχίζουν από το Β και τέλος από το Γ. β) Διορθωμένη απαρίθμηση: Στην αρχή απαριθμούν όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (π.χ. ΑΒ και ΒΑ), όμως στη συνέχεια εξαλείφουν τα διπλομετρήματα κατανοώντας ότι στους συνδυασμούς δεν λαμβάνεται υπόψη η σειρά. γ) Απαρίθμηση των μερών μετά από διαδοχικούς τεμαχισμούς: Οι μαθητές χωρίζουν το σύνολο των τεσσάρων αντικειμένων σε δύο δυάδες και επαναλαμβάνουν τη διαδικασία μέχρι να εξαντλήσουν όλες τις περιπτώσεις. Για παράδειγμα οι συστηματικές διαιρέσεις του συνόλου των Α, Β, Γ, Δ καταλήγει διαδοχικά στα ακόλουθα ζεύγη διαμερισμών: ΑΒ και ΓΔ, ΑΓ και ΒΔ και τέλος ΑΔ και ΒΓ.

Η διάκριση της έννοιας του συνδυασμού από εκείνη της διάταξης μπορεί να διευκρινιστεί με ένα παράδειγμα όπου από 4 αντικείμενα Α, Β, Γ, Δ επιλέγουμε 2. Για κάθε συνδυασμό των δύο αντικειμένων μπορούν να προκύψουν 2 μεταθέσεις των αντικειμένων αυτών. Αρχίζουμε με μια διάταξη τεσσάρων από τα αντικείμενα Α, Β, Γ και Δ, την οποία γράφουμε στη δεύτερη στήλη αριστερά. Γράφουμε τις υπόλοιπες μεταθέσεις αυτών των αντικειμένων στην ίδια στήλη. Στην τρίτη στήλη γράφουμε μια διάταξη που δεν έχει ακόμα χρησιμοποιηθεί (ΑΓ), και συμπληρώνουμε τις υπόλοιπες. Έτσι ολοκληρώνουμε τη διαδικασία γράφοντας όλες τις διατάξεις των τεσσάρων αντικειμένων από τα Α, Β, Γ και Δ. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Διατάξεις	**ΑΒ**, ΒΑ	**ΑΓ**, ΓΑ	**ΑΔ**, ΔΑ	**ΒΓ**, ΓΒ	**ΒΔ**, ΔΒ	**ΓΔ**, ΔΓ
Συνδυασμοί	ΒΑ	ΓΑ	ΔΑ	ΓΒ	ΔΒ	ΔΓ

Ο προηγούμενος πίνακας μάς δείχνει τη διαδικασία εύρεσης του πλήθους των συνδυασμών. Σε κάθε στήλη υπάρχουν όλες οι διαφορετικές μεταθέσεις που μας δίνουν τον ίδιο συνδυασμό. Για να βρούμε το πλήθος των συνδυασμών αρκεί να απαριθμήσουμε τις στήλες[1].

---

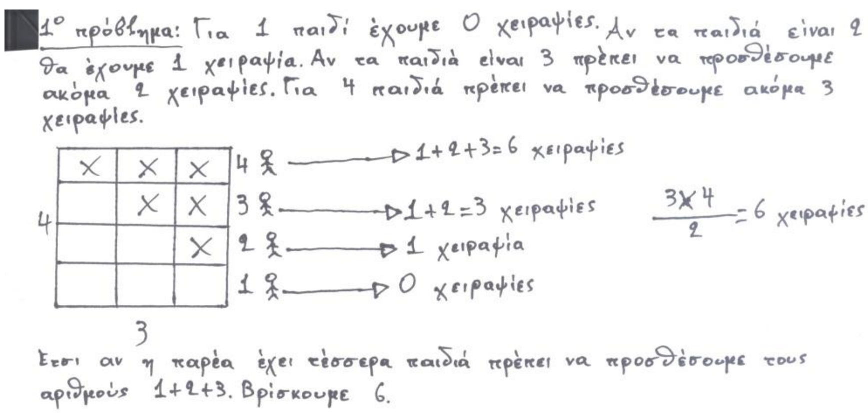
[1] Υπάρχουν Δ_2^4 διατάξεις των 2 αντικειμένων από τα 4, δηλαδή συνολικά υπάρχουν Δ_2^4 στοιχεία. Σε κάθε στήλη υπάρχουν 2! στοιχεία και διαιρώντας βρίσκουμε ότι πρέπει να υπάρχουν $\frac{\Delta_2^4}{2!}$ στήλες, δηλαδή $\frac{\Delta_2^4}{2!}$ συνδυασμοί. Επειδή $\Delta_2^4 = \frac{4!}{(4\text{-}2)!}$ θα υπάρχουν $\frac{4!}{(4\text{-}2)!\cdot 2!}$ συνδυασμοί των 2 αντικειμένων από τα Α, Β, Γ και Δ. Επομένως:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4\text{-}2)!\cdot 2!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6 .$$

Έτσι υπάρχουν 6 συνδυασμοί με 2 αντικείμενα από τα Α, Β, Γ και Δ.

β) Μοντέλα αλγεβρικά, γεωμετρικά και γεωμετρικής άλγεβρας

Παρακάτω παρουσιάζεται χωρισμένη σε μέρη η συζήτηση πάνω στην εργασία της ομάδας Γ (Α., Γ., Β., Μ). Η ομάδα αυτή αποτελείται από δύο πολύ καλούς μαθητές, έναν καλό και έναν μέτριο μαθητή.



Με αφορμή την προηγούμενη διαφάνεια ακολουθούν ορισμένα στιγμιότυπα του διαλόγου σε ολόκληρη την τάξη.

Δάσκ.: ... *Θα περάσουμε τώρα την εργασία της ομάδας Γ. Ποιος εκπρόσωπος θα παρουσιάσει τη διαφάνεια;*

Β.: (Διαβάζει εξηγεί τη διαφάνεια) … *Έτσι όπως βλέπετε τα 4 παιδιά θα κάνουν 1+2+3=6 χειραψίες.*

Δάσκ.: *Τώρα να συζητήσετε στις ομάδες σας. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με αυτή τη λύση;*

Ερ.: …*Λοιπόν συμφωνούμε. Στο πρώτο πρόβλημα, και στη δική μας ομάδα βρήκαμε ότι τα 4 παιδιά θα κάνουν 6 χειραψίες. Τότε όμως τα 8 θα κάνουν 12 χειραψίες.*

Μ.Κ..: *Και τα 30 παιδιά πόσες χειραψίες θα κάνουν;*

Ερ.: *Λοιπόν. Αφού τα 4 παιδιά θα κάνουν 6 χειραψίες, τα 2 παιδιά θα κάνουν 3 χειραψίες και τα 10 παιδιά θα κάνουν… 12 και 3 … 15 χειραψίες. Και τέλος τα 30 παιδιά θα κάνουν τριπλάσιες χειραψίες.*

Μ.Κ..: *Δηλαδή τα 30 παιδιά θα κάνουν 45 χειραψίες;*

Ερ.: *Ναι. Έτσι είναι.*

Αν.: *Δεν συμφωνώ… Οι 45 χειραψίες είναι λίγες…*

Ν.: *Οι 45 χειραψίες είναι λάθος γιατί δεν έχουμε αναλογία. Εμείς στην ομάδα μας φτιάξαμε πίνακα για να δούμε αν υπάρχει αναλογία.*

Δάσκ.: *Μπορείς να δείξεις τη διαφάνεια;*

Ν.: *…Ναι.* (παρουσιάζει ένα μέρος της εργασίας της ομάδας του).

Μαθητές	2	3	4	5	6	7	8
Χειραψίες	1	3	6	10	15	21	28

Δάσκ.: *Τι προκύπτει από αυτόν τον πίνακα;*

Ν.: *Δεν έχουμε αναλογία.*

Δάσκ.: *Γιατί; Μπορείς να το εξηγήσεις;*

Ν.: *Λοιπόν. Από τον πίνακα οι 2 μαθητές κάνουν 1 χειραψία. Αν είχαμε ανάλογα ποσά θα έπρεπε οι 4 μαθητές να κάνουν 2 χειραψίες και οι 6 να κάνουν 3. Όμως στον πίνακα έχουμε άλλους αριθμούς…*

Δάσκ.: *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το πρώτο πρόβλημα για να λύσετε το δεύτερο; Πώς από τις χειραψίες τις τετραμελούς παρέας θα μπορέσουμε να βρούμε το πλήθος των χειραψιών της τάξης των 30 μαθητών;*

Π.: *Εμείς συνεχίσαμε με άλλες παρέες μαθητών. Ζωγραφίσαμε 5 παιδιά και χαράξαμε τις γραμμές που τα ενώνουν. Υπάρχουν 10 γραμμές. Το πέμπτο παιδί δεν μπορεί να κάνει χειραψία με τον εαυτό του. Είδαμε ότι το πέμπτο παιδί πρόσθεσε στις 6 χειραψίες των τεσσάρων παιδιών άλλες 4. Έτσι έχουμε 6 και 4 κάνουν 10 χειραψίες. Τότε σκεφτήκαμε ότι αν υπήρχε ένα έκτο παιδί θα χαιρετούσε τα 5 παιδιά και θα υπήρχαν συνολικά 15 χειραψίες, οι προηγούμενες 10 και οι 5 χειραψίες που προσθέτει το νέο παιδί. Το έβδομο παιδί θα προσθέσει ακόμα 6 χειραψίες και αυτό θα συνεχίζεται κανονικά…*

Ν.: *Έχω μια διαφορετική ιδέα. Το κάθε παιδί από τα 4 χαιρετάει τα άλλα 3. Έτσι οι χειραψίες είναι 4 φορές το 3, δηλαδή 12. Όμως οι σωστές χειραψίες είναι οι μισές γιατί τις έχουμε μετρήσει δύο φορές. Έτσι τα 4 παιδιά θα κάνουν 6 χειραψίες. Οι χειραψίες των 5 παιδιών θα είναι 5 φορές το 4 διά 2, δηλαδή 10.*

Π.: *10 βρήκαμε κι εμείς.*

Ν.: *Σωστά. Όμως ξέρατε ότι τα 4 παιδιά θα κάνουν 6 χειραψίες. Μετά είπατε ότι τα 5 παιδιά θα κάνουν 6+4=10. Εντάξει;*

Π.: *Εντάξει! Επίσης για 6 παιδιά θα είναι 10+5=15 και για 7 παιδιά θα είναι 15+6=21. Δηλαδή κάθε φορά στις γνωστές χειραψίες προσθέτουμε έναν αριθμό λιγότερο από τους μαθητές που έχει η παρέα. Ο πίνακας που βλέπουμε μας βοηθάει να κάνουμε τις προσθέσεις.*

Ν.: *Σωστά. Όμως για να βρείτε τις χειραψίες των 7 πρέπει να ξέρετε πόσες έχουν κάνει οι 6. Για να βρείτε τις χειραψίες 30 πρέπει πρώτα να έχετε βρει τις χειραψίες των 29. Και ο πίνακας δε φτάνει στο 30. Εντάξει;*

Π.: *Σωστά!*

Β: *Αυτό όπως βλέπετε διαπιστώσαμε και εμείς…*

Π: *Ναι αλλά σταματήσατε στο 4.*

Β.: *Το πρόβλημα ζητούσε να βρούμε πρώτα πόσες χειραψίες θα κάνουν 4 παιδιά και ύστερα πόσες χειραψίες θα κάνουν 30… Εσείς βρήκατε πόσες χειραψίες θα κάνουν οι 30 μαθητές;*

Π: *Φτάσαμε μέχρι τους 13 μαθητές. Καταλάβαμε ότι υπάρχει κάτι το κανονικό, αλλά μπερδευτήκαμε και δεν ξέρω πώς θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε αν όλα τα παιδιά ήταν 30 ή περισσότερα.*

Σ. *…Χωρίσαμε τους 13 μαθητές σε 7 και 6. Βρήκαμε ότι οι 7 μαθητές θα κάνουν 21 χειραψίες και οι 6 μαθητές 15.*

Δάσκ.: *Και οι 13 μαθητές; Εσείς δώσατε κάποια απάντηση στο ερώτημα;*

Σ. *Προσθέσαμε 21+15=36. Όμως δεν είναι έτσι.*

Δάσκ.: *Για να το σκεφτείτε για λίγο στις ομάδες σας… Τι λέτε τώρα;*

Π: *Τώρα που το ξανασκέφτομαι νομίζω ότι δεν είναι 36 γιατί χαιρετιούνται και τα παιδιά των δύο μικρών ομάδων. Έτσι έχουμε ακόμα 6×7=42 χειραψίες. Έτσι θα υπάρχουν συνολικά 15+21+42=78 χειραψίες. Έτσι δεν είναι;*

Α: *Ναι έτσι είναι. Δεν πρέπει να ξεχάσουμε να προσθέσουμε τις 42 χειραψίες που θα κάνουν οι δύο ξεχωριστές ομάδες μεταξύ τους. Εμείς το σκεφτήκαμε στην ομάδα μας και βρήκαμε ότι οι τελικές χειραψίες μιας τάξης με 13 μαθητές θα είναι 78. Συμφωνούμε …*

Δάσκ.: *Τι θα μπορούσατε να πείτε για το πλήθος των χειραψιών όταν η τάξη έχει 30 μαθητές;*

Ν.: *Είπαμε ότι τα 4 παιδιά θα κάνουν* $\frac{4\times 3}{2}=6$ *χειραψίες, τα 5 παιδιά θα κάνουν* $\frac{5\times 4}{2}=10$ *χειραψίες και τα 6 παιδιά θα κάνουν* $\frac{6\times 5}{2}=15$ *χειραψίες. Από αυτά τα παραδείγματα μπορούμε να πούμε ότι τα 30 παιδιά θα κάνουν* $\frac{30\times 29}{2}=435$ *χειραψίες.*

Π.: *Γιατί συμβαίνει αυτό;*

Ν.: *Νομίζω ότι είναι λογικό να βγάλουμε αυτό το συμπέρασμα. Αν πάρουμε και άλλες ομάδες μαθητών μπορούμε να βρίσκουμε κάθε φορά πόσες χειραψίες θα έχουμε.*

Π.: *Ναι! Ίσως να είναι σωστό.*

Ν.: *Αν έχουμε 7 παιδιά οι χειραψίες θα είναι* $\frac{7\times 6}{2}=21$*. Οπότε για 30 παιδιά πολλαπλασιάζουμε το 30 με το 29 που είναι ένα λιγότερο και διαιρούμε με το 2.*

Π.: *Φαίνεται να είναι έτσι, αλλά γιατί είναι σωστό; …*

Δάσκ.: *Ας συνεχίσουμε. Ίσως η συνέχεια της συζήτησης θα μάς προσφέρει μια πιο πειστική αιτιολόγηση.*

Κατά την παρουσίαση στην τάξη εκτέθηκε από τον εκπρόσωπο της ομάδας Γ η διαδικασία εξερεύνησης των κανονικοτήτων που οδήγησε στην προσθετική στρατηγική μετά από απαριθμήσεις των χειραψιών: 1+2+3=6 χειραψίες. Η διευθέτηση της πρώτης γνωστικής διένεξης εστιάστηκε στο «λάθος γραμμικότητας» που παρέπεμπε στο «διδακτικό συμβόλαιο» και απασχόλησε δύο ομάδες της τάξης. Επιπλέον, στο πλαίσιο της διερεύνησης των κανονικοτήτων, αξίζει να επισημανθούν τρεις σημαντικές στρατηγικές που εκφράστηκαν από ισάριθμους μαθητές:

- Η οπτικοποίηση των χειραψιών μιας 5μελούς ομάδας με την κατασκευή ενός πενταγώνου και η συνακόλουθη απαρίθμηση των πλευρών και των διαγωνίων του από σταθερό σημείο οδήγησε στον αριθμό 10. Το ίδιο γεωμετρικό μοντέλο διαπιστώσαμε όταν θέσαμε το πρόβλημα σε δεκάχρονους μαθητές (Κόσυβας 1996). Η εν λόγω γεωμετρική μοντελοποίηση υπέβαλε στους μαθητές της ομάδας την αναδρομική διαδικασία ότι για 6 παιδιά πρέπει να προστεθούν 5 ακόμα χειραψίες, για 7 παιδιά άλλες 6 κλπ.

- Ο χωρισμός της ομάδας 13 μαθητών σε δύο υποομάδες των 7 και 6 μαθητών οδήγησε στον υπολογισμό 21+15=36 ενδοομαδικών χειραψιών. Αξιοσημείωτη ήταν η διόρθωση της λύσης με την προσθήκη 42 διομαδικών χειραψιών. Έτσι το συνολικό πλήθος είναι: 21+15+42=78 χειραψίες. Πάντως η ιδέα του χωρισμού δεν αξιοποιήθηκε για τον προσδιορισμό του αριθμού των χειραψιών της τάξης των 30 μαθητών.

- Η γνωστική σύγκρουση ανάμεσα στον Ν. και την Π. ανέδειξε την υπεροχή του γενικού τύπου της αριθμητικής προόδου σε σχέση με τον αναδρομικό.

> Η εύρεση του κανόνα για την τάξη των 30 μαθητών έγινε αποδεκτή, όμως η αιτιολόγηση του λεκτικού κανόνα «*πολλαπλασιάζουμε το 30 με το 29 που είναι ένα λιγότερο και διαιρούμε με το 2*» δεν ήταν απόλυτα πειστική.

Η ανακάλυψη του προαναφερόμενου κανόνα είναι εύλογη και πιθανή και παραπέμπει σε ένα νέο είδος συλλογισμού. Όταν συνάγουμε συμπεράσματα για ένα φαινόμενο που δεν μπορούμε ποτέ να συλλάβουμε πλήρως, σύμφωνα με τον Peirce χρησιμοποιούμε μαζί δύο συμπληρωματικά είδη συλλογισμού: τον απαγωγικό (abductive) και επαγωγικό (inductive) συλλογισμό[2]. Ο απαγωγικός συλλογισμός περιλαμβάνει τη διατύπωση μιας λογικής υπόθεσης για το φαινόμενο. Στο πρόβλημα των χειραψιών εφαρμόζονται όσα αναφέρει ο Radford (2008) για την αλγεβρική γενίκευση κανονικοτήτων (patterns): «(Είναι) *η ικανότητα των μαθητών να εκμαιεύουν μια κανονικότητα που παρατήρησαν σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις της ακολουθίας, η επέκταση και η γενίκευση της κανονικότητας για όλους τους επόμενους όρους και η ικανότητα να την χρησιμοποιούν για να παρέχουν μια άμεση απάντηση για κάθε όρο της ακολουθίας*» (σ. 115). Με άλλα λόγια, για να διατυπώσουμε μια υπόθεση, την επαληθεύουμε πολλές φορές και εξετάζουμε αν έχει νόημα. Όταν γενικεύουμε μια κανονικότητα με βάση ένα μικρό «δείγμα» χρειάζεται να στρέψουμε την προσοχή μας στον τρόπο με τον οποίο συνεργούν η απαγωγή και η επαγωγή στο σχηματισμό και την αιτιολόγηση μιας πλήρους και έγκυρης αλγεβρικής γενίκευσης (Rivera & Becker 2009).

[2] Ο Peirce εισήγαγε την απαγωγή (abduction), ενώ θεώρησε ότι η επαγωγή (induction) και η παραγωγή (deduction) είναι αναγκαία και συμπληρωματικά εργαλεία για αυτήν. Η απαγωγή είναι ένα τρίτο είδος συλλογισμού, όπου από μια συλλογή δεδομένων, γεγονότων ή παρατηρήσεων συλλαμβάνουμε μια υπόθεση που τα εξηγεί καλύτερα από άλλες. Η εν λόγω επεξηγηματική υπόθεση είναι πιθανώς αληθινή. *«Στην επαγωγή γενικεύουμε από έναν αριθμό περιπτώσεων στις οποίες κάτι είναι αλήθεια και συνάγουμε ότι το ίδιο πράγμα είναι πιθανά αληθινό για ολόκληρη την τάξη. Αλλά στην απαγωγή, περνάμε από την παρατήρηση ορισμένων γεγονότων στην υπόθεση μιας γενικής αρχής που εξηγεί τα γεγονότα»* (Fann, 1970, p. 10). Όταν οι γιατροί κάνουν μια γνωμάτευση ή όταν οι δικαστές αναλύουν μια υπόθεση με ελλιπή στοιχεία το πρώτο στάδιο της συναγωγής των συμπερασμάτων τους περιέχει απαγωγή.

Η ασυνήθιστη δραστηριότητα με τις χειραψίες ανέτρεψε την παθητική ρουτίνα και είχε ως επακόλουθο την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών. Η βαθύτερη μαθηματική κατανόηση έχει μεγαλύτερη σημασία από την πρόσκαιρη επίδοση σε επιφανειακές δεξιότητες.

Δάσκ.: *Ποιος θα ήθελε από την ομάδα Γ να εξηγήσει πώς βρήκατε το πλήθος των χειραψιών των 30 μαθητών;*

Β.: *Καλύτερα ο Α που είχε και τη μαγική ιδέα!*

2° πρόβλημα: Το τριακοστό παιδί απλώνει το δεξί του χέρι και σφίγγ 29 άλλα χέρια, έτσι πρέπει να προσθέσουμε τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 29. Για να τους προσθέσουμε εύκολα υπάρχει ένα κόλπο. Βάζουμε τους αριθμούς στη σειρά όπως παρακάτω:

$$\begin{array}{l} 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+ \\ 29+28+27+26+25+24+23+22+21+20+19+18+17+16+15 \\ \hline 29+29+29+29+29+29+29+29+29+29+29+29+29+29+29 = 15\times 19 = 435. \end{array}$$

Βλέπουμε ότι πολλαπλασιάζουμε κάθε φορά του μισό του 30 με το 29, που είναι 1 λιγότερο από το 30, δηλαδή

$$\text{αριθμός χειραψιών} = \frac{30}{2}\times(30-1) = 15\times 29 = 435$$

3° πρόβλημα: Ο γενικός κανόνας μπορεί να είναι: πολλαπλασιάζουμε το μισό του ν με το ν-1, δηλαδή μάλλον είναι:

$$\text{γενικός αριθμός χειραψιών} = \frac{\nu}{2}\times(\nu-1).$$

Αυτός νομίζουμε ότι θα πρέπει να είναι ο γενικός τύπος.

Α.: *Λοιπόν! Ζευγαρώσαμε όλους τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 14 με τους αριθμούς που βρίσκονται κάτω με ανάποδη σειρά, από το 28 μέχρι το 15* (διαφάνεια). *Δεν ζευγαρώσαμε το 29 που μπαίνει πρώτος στη δεύτερη γραμμή. Προσθέσαμε όλους τους αριθμούς από πάνω προς τα κάτω. Βρίσκουμε πάντα 29: 1+28=29, 2+27=29, 3+26=29, κλπ. Μαζί με το 29 έχουμε 15 φορές το 29. Έτσι το άθροισμα όλων των αριθμών από το 1 μέχρι το 29 είναι το ίδιο με το γινόμενο 15×29=435. Οπότε οι χειραψίες είναι 435.*

Δ.: *Πολύ δύσκολο! Εγώ δεν θα μπορούσα να σκεφτώ κάτι τέτοιο! Δεν καταλαβαίνω γιατί ο γενικός αριθμός των χειραψιών που γράψατε πρέπει να είναι* $\frac{\nu}{2}\times(\nu-1)$.

Ελ.: *Ούτε κι εγώ! Όμως, τώρα, και καλά, το έχω!*

I. *Στη διαφάνεια γράφει: «το τριακοστό παιδί απλώνει το δεξί του χέρι και σφίγγει 29 άλλα χέρια». Μόνο το τριακοστό παιδί το κάνει αυτό;*

A.: *Όχι. Το 30ο κάνει 29 χειραψίες, το 29ο κάνει 28 γιατί χαιρέτησε το 30ο και συνεχίζεται.*

I. *Γιατί κάνει 15×29;*

A.: *Έχουμε 15 φορές το 29. Αντί να κουραστούμε κάνοντας μια πολύ μεγάλη πρόσθεση με όλους τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 29 φτάσαμε στο αποτέλεσμα μόνο με έναν πολλαπλασιασμό. Αντί να προσθέτουμε πολλές φορές πολλαπλασιάζουμε …*

I. *Και μετά;*

A: *Μετά καταλήξαμε στον τύπο. Στον πολλαπλασιασμό 15×29 το 15 είναι το μισό του 30 και το 29 ένα λιγότερο από το 30. Νομίζω ότι αυτό θα γίνεται πάντα.*

K.: *Μισό! Γιατί θα γίνεται πάντα; Πώς ο ξέρεις; Κι αν είχαμε 31 μαθητές αντί για 30;*

A.: (σιωπή) *Δεν είμαι σίγουρος, όμως έτσι φαίνεται να είναι.*

B.: *Το δοκιμάσαμε και για άλλους αριθμούς. Για τέσσερα παιδιά έχουμε*

$$\frac{4}{2}\times(4-1)=2\times3=6 \text{ χειραψίες.}$$

Αυτό γίνεται συχνά αφού ο κανόνας ισχύει για πολλούς αριθμούς.

K.: *Δεν ισχύει όταν το πλήθος των μαθητών της τάξης είναι περιττός αριθμός.*

A.: *Αν είχαμε 100 παιδιά σε ένα σχολείο, τότε όλες οι χειραψίες που θα μπορούσαν να ανταλλάξουν είναι* $\frac{100}{2}\times(100-1)=50\times99=4950$. *Εντάξει;*

Κ.: Σωστά! Όμως αν το σχολείο είχε 31 παιδιά;

Α.: Για 31 … (σιωπή)

Δάσκ.: Νέο πρόβλημα! Για να σκεφτείτε προτού απαντήσετε…

…

Α.: Το βρήκα! Οι χειραψίες που θα κάνουν τα 31 παιδιά θα είναι 1+2+…29+30. Βάζουμε πάλι κάτω από το 1 το 30, κάτω από το 2 το 29 και στο τέλος κάτω από το 15 το 16. Να το γράψω στον πίνακα;

Δάσκ.: Βεβαίως !

Α.: (Γράφει στον πίνακα τη νέα λύση). *Όπως βλέπετε έχουμε 15 φορές το 31. Όμως το 15 δεν είναι οι μισοί μαθητές… Οι μισοί μαθητές είναι 15,5. Αλλά …*

Σ.: Όχι! Δεν κόβουμε στη μέση τα παιδιά.

Α.: … Όμως έχουμε $31\times15=\frac{31}{2}\times30=\frac{31}{2}\times(31-1)$. *Δηλαδή είναι σωστό και για περιττό αριθμό παιδιών. Τώρα αν ν είναι ο αριθμός των παιδιών τότε ο γενικός τύπος των χειραψιών θα πρέπει να είναι* $\frac{\nu}{2}\times(\nu-1)$. *Νομίζω ότι η ιδέα είναι λογική και σωστή. Εκτός και αν υπάρχει μια μαθηματική απόδειξη…*

Στην προηγούμενη διαφάνεια της ομάδας Γ παρουσιάζεται μια όμορφη και κομψή αιτιολόγηση παρόμοια με εκείνη που επινοήθηκε από τον Gauss. Η απροσδόκητη μέθοδος υπολογισμού του αθροίσματος είναι εκπληκτική και έχει χαρακτήρα αλγεβρικής γενίκευσης και οδηγεί στις ακόλουθες μοντελοποιήσεις:

$$\text{αριθμός χειραψιών} = \frac{30}{2}\times(30-1) \text{ ή } \frac{31}{2}\times(31-1) \quad \text{και γενικός αριθμός χειραψιών} = \frac{\nu}{2}\times(\nu-1)$$

Η προαναφερόμενη στρατηγική συνιστά υπέρβαση της προσθετικής με πολλαπλασιαστική στρατηγική. Το πρωτότυπο τέχνασμα του ζευγαρώματος και η συνακόλουθη επιχειρηματολογία για τους άρτιους και τους περιττούς αριθμούς δεν κατανοήθηκαν από ορισμένους μαθητές της τάξης. Το προηγούμενο μοντέλο είναι ευρετικό εφόσον δεν είναι αποτέλεσμα μιας αξιωματικής απόδειξης όπως ή μαθηματική επαγωγή. Η μεταβλητή ν παριστάνει έναν γενικευμένο αριθμό, που στο πλαίσιο της συναρτησιακής σχέσης αντικαθίσταται με τις τιμές ν=4, ν=30, ν=31 και ν=100. Στις αριθμητικές παραστάσεις οι αριθμοί χρησιμοποιούνται σχεδόν ως μεταβλητές (αριθμοί στη θέση γραμμάτων) και έτσι ελαττώνουν την απόσταση ανάμεσα στην αριθμητική και την αλγεβρική γενίκευση. Μάλιστα ο «μεγάλος» αριθμός (100) χρησιμεύει ως ενδιάμεσος συνδετικός κρίκος για να εκφράσει την αλγεβρική γενίκευση με αριθμητικά σύμβολα (Κόσυβας 2009).

Δάσκ.: *Θα ήθελα να επιστρέψουμε για λίγο στην πρώτη διαφάνεια της ομάδας Γ και να ρωτήσω κάτι τους μαθητές της ομάδας Γ. Σας βοήθησε το ορθογώνιο με διαστάσεις 3×4 που σχεδιάσατε για να βρείτε το πλήθος των χειραψιών;* (προβάλλεται εκ νέου)

Β: *Ήταν μια πρώτη ιδέα του Γ ή της Μ.*

Γ.: *Πρώτα είπαμε ότι τα 4 παιδιά της παρέας θα κάνουν 3×4=12 χειραψίες. Σκεφτήκαμε να το δείξουμε και φτιάξαμε το ορθογώνιο με τα τετραγωνάκια που είναι οι χειραψίες τους.*

Δάσκ.: *Πώς το σκεφτήκατε αυτό;*

Μ.: *Θυμάμαι στο δημοτικό είχα λύσει το πρόβλημα: «4 παιδιά αντάλλαξαν δώρα μεταξύ τους. Πόσα δώρα πήραν όλα τα παιδιά;». Σκέφτηκα ότι κάθε παιδί πήρε 3 δώρα. Έτσι όλα τα παιδιά πήραν 4×3=12 δώρα. Θυμάμαι την εικόνα που η δασκάλα είχε σχεδιάσει με όλα τα δώρα σε ένα ορθογώνιο. Στην αρχή πίστεψα ότι με το ίδιο ορθογώνιο μπορούμε να* *βρούμε και τις χειραψίες. Όμως μετά συμφώνησα με τον Α και το Γ να διαιρέσουμε το γινόμενο με το 2, αφού χρειάζονται δύο χέρια για μια χειραψία.*

Γ.: *Έτσι σκεφτήκαμε και φτιάξαμε το ορθογώνιο και βάλαμε χι στα μισά τετραγωνάκια. Ο σωστός αριθμός χειραψιών είναι :* $\frac{3\times 4}{2}$.

Α.: *Αυτός είναι ίδιος με τον τύπο* $\frac{4}{2}\times(4-1)$.

Γ.: *Έτσι είναι. Για αυτό γράψαμε:* $\frac{\nu}{2}\times(\nu-1)$.

Α.: Ο *γενικός τύπος του εμβαδού του ορθογωνίου είναι* $\nu\times(\nu-1)$ *. Αν φανταστούμε ένα πολύ μεγάλο ορθογώνιο με διαστάσεις ν και ν-1 τότε θα έχει* $\nu\times(\nu-1)$ *τετράγωνα. Όμως για να μη μετρήσουμε δύο φορές τις χειραψίες θα διαιρέσουμε με το 2.*

Οι μαθητές γενίκευσαν τις δικές τους μαθηματικές ιδέες αναπτύσσοντας πλούσια εννοιολογική κατανόηση. Ξεκινώντας από ένα σύνολο ειδικών περιπτώσεων κατέληξαν στην αλγεβρική γενίκευση και την οπτική αιτιολόγηση. Ωστόσο, δεν ήταν εύκολο σε όλους να κάνουν μεταφράσεις ανάμεσα στις οπτικές και συμβολικές αναπαραστάσεις. Στην προηγούμενη συζήτηση το ορθογώνιο ερμηνεύτηκε ως μοντέλο εμβαδού. Συνδέθηκε με ένα κατ' αναλογία πρόβλημα που είχε συναντήσει η Μ. στο δημοτικό (πρόβλημα δώρων) και παραπέμπει στο καρτεσιανό γινόμενο. Το πιο ενδιαφέρον εύρημα είναι ότι το προαναφερόμενο ευρετικό γεωμετρικό μοντέλο συνδέει με επιτυχία την εικονιστική μορφή με τη γενίκευση του προβλήματος των χειραψιών: $\frac{\nu}{2}\times(\nu-1)$. Η γεωμετρική μοντελοποίηση προσφέρει έναν ανεκτίμητο τρόπο για την προώθηση της οπτικής σκέψης και λειτουργεί ως αναλογικό πλαίσιο αναφοράς που δίνει νόημα στον αλγεβρικό τύπο.

Συζήτηση και συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή παρουσιάσαμε τα ευρήματα από την ομαδοσυνεργατική λύση του προβλήματος των χειραψιών στην Α΄ Γυμνασίου. Το εν λόγω πρόβλημα ήταν μια πνευματική πρόκληση που ανέδειξε τις δυνατότητες των μαθητών. Το πλούσιο μαθησιακό περιβάλλον βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν το πρόβλημα, να εμπλακούν ολόπλευρα στις μαθηματικές ανακαλύψεις της τάξης τους και να σχηματίσουν ποικίλες αναπαραστάσεις. Χωρίς να έχουν διδαχθεί τυπικές μαθηματικές γνώσεις κατάφεραν να εξερευνήσουν κανονικότητες, να διατυπώσουν εικασίες και να φτάσουν στη μαθηματική μοντελοποίηση. Οι μαθητές αναθεώρησαν προοδευτικά τις αρχικές παρανοήσεις τους και συμμετείχαν ενεργά στη διαδικασία διαπραγμάτευσης μαθηματικών νοημάτων καταλήγοντας σε μοντέλα κοινής αποδοχής. Η γνώση του επίσημου σχολικού προγράμματος οργανώνεται με κεντρικό άξονα τα τυπικά μαθηματικά, όμως το τελικό αποτέλεσμα επηρεάζεται από την προϋπάρχουσα άτυπη γνώση. Στην έρευνά μας η άτυπη μοντελοποίηση ήταν αυθόρμητη και συνδέθηκε με τις προσωπικές εμπειρίες των μαθητών και την προηγούμενη διδασκαλία. Ήταν μια πολύτιμη διδακτική συνιστώσα που διαμόρφωσε τις μαθηματικές αλληλεπιδράσεις της τάξης και τη γενικότερη μαθησιακή ατμόσφαιρα. Τα καθημερινά βιώματα των μαθητών τροφοδότησαν τα μαθηματικά νοήματα κατά τις διαδικασίες επίλυσης του προβλήματος. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές ήταν ικανοί να αξιοποιήσουν τις άτυπες γνώσεις τους και να αναπτύξουν μεταξύ άλλων μοντέλα συνδυαστικού συλλογισμού και γεωμετρικής άλγεβρας. Τα εν λόγω ευρήματα συνάδουν με τη μοντελοποίηση τους κόσμου τους και αξίζει να τονιστούν ιδιαίτερα.

Η έννοια του καρτεσιανού γινομένου είναι μάλλον η ευκολότερη συνδυαστική έννοια για τους μαθητές σε σύγκριση με τις διατάξεις και τους συνδυασμούς. Αυτό κυρίως βρίσκεται σε αλληλουχία με την εξοικείωση των μαθητών προς τα προβλήματα πολλαπλασιασμού που συναντούν νωρίς από το δημοτικό σχολείο στα οποία η αντιστοιχία ένα προς πολλά είναι σαφής[3]. Οι Nunes και Bryant (1996) υπογράμμισαν ότι η σχέση ένα προς πολλά είναι θεμελιώδης στον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό και διευκρινίζει τη διαφορά ανάμεσα στις προσθετικές και τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Στη χώρα μας ο

[3] Για παράδειγμα: *σε μια χορευτική πλατεία υπάρχουν 3 αγόρια και 4 κορίτσια που θέλουν να χορέψουν. Αν όλα τα αγόρια χορέψουν με όλα τα κορίτσια, πόσα ζευγάρια μπορούν να σχηματιστούν;*

συνδυαστικός συλλογισμός παρότι υπάρχει στο βιβλίο της Γ΄ Λυκείου δεν διδάσκεται.

Το προαναφερόμενο πρόβλημα περιγράφει μια χειροπιαστή κατάσταση συνδυασμού όπου οι δυαδικές συνδέσεις (χειραψίες) δεν είναι τόσο αφηρημένες όσο οι εξάδες στο LOTTO. Τα προβλήματα συνδυασμών μοιάζουν με τα προβλήματα διατάξεων, αφού οι μαθητές από ένα μεγαλύτερο σύνολο στοιχείων πρέπει να σχηματίσουν υποσύνολα, στα οποία όμως η σειρά εμφάνισης των στοιχείων δεν έχει ως επακόλουθο νέους τρόπους. Οι μαθητές κατά τις απαριθμήσεις τους δυσκολεύονταν να απαλείφουν τις περιπτώσεις που ήταν ίδιες αλλά διέφεραν στη σειρά. Παρότι ορισμένοι μαθητές δεν ολοκλήρωσαν τις λύσεις τους ανέπτυξαν ενδιαφέρουσες στρατηγικές και χρησιμοποίησαν άτυπες σημειωτικές παραστάσεις και αυθόρμητες μοντελοποιήσεις όπως σχεδιασμούς γεωμετρικών σχημάτων, πινακοποιήσεις κλπ. επιδεικνύοντας κατανόηση. Ανάλογες άτυπες στρατηγικές έχουν επισημανθεί σε άλλες έρευνες (Lynn 2008, Tarlow 2008). Οι αρχικές στρατηγικές των παιδιών πρέπει να αναγνωριστούν και να αποτελέσουν σημεία εκκίνησης για την κατανόηση της ποικιλίας των διαφορετικών συνδυαστικών καταστάσεων και την αναζήτηση πιο συστηματικών στρατηγικών.

Η εμπλοκή των μαθητών στη λύση του προβλήματος ευνόησε την ικανότητα γενίκευσης. Οι μαθητές από ένα επαρκές πλήθος ειδικών περιπτώσεων (4 ή 30) βρήκαν τον κανόνα σχηματισμού όλων των όρων προβλέποντας το πλήθος των χειραψιών για οποιονδήποτε αριθμό μαθητών. Η εν λόγω δραστηριότητα παρείχε στους μαθητές ευκαιρίες αναζήτησης, εξερεύνησης και επέκτασης της κανονικότητας καθώς και διατύπωσης γενικεύσεων που εκφράστηκαν με λέξεις, αλγεβρικά σύμβολα και αναφορικά γεωμετρικά μοντέλα. Τα εν λόγω ευρετικά μοντέλα υπέβαλαν στους μαθητές οπτικές αποδείξεις ή αιτιολογήσεις παρέχοντας νόημα στην αλγεβρική μοντελοποίηση. Η οπτική σκέψη τροφοδοτεί τον αριθμητικό χειρισμό και την αλγεβρική σκέψη, για αυτό μπορούμε να μιλάμε για μοντέλα γεωμετρικής άλγεβρας. Σε αντιδιαστολή με την τυπική άλγεβρα έχουμε μια αναφορική άλγεβρα, αφού περιέχει μοντέλα, περιγραφές και στρατηγικές που αναφέρονται στη γεωμετρία, τα οποία ενισχύουν τους δεσμούς ανάμεσα στην άλγεβρα και τη γεωμετρία και καθιστούν ευκολότερη τη μετάβαση προς τους αλγεβρικούς τύπους.

Τα μαθηματικά αποτελούν ανεξάντλητη πηγή μαθηματικών μοντέλων τα οποία μάς επιτρέπουν να κατανοούμε καλύτερα τον κόσμο που μας περιβάλλει. Η μαθησιακή προσέγγιση της μοντελοποίησης αποτελεί ένα ευέλικτο, ισχυρό και ελκυστικό εργαλείο που η μελετημένη αξιοποίησή του βοηθά στην οπτικοποίηση αφηρημένων μαθηματικών σχέσεων, βελτιώνει την ικανότητα λύσης προβλήματος και συμβάλλει στην κατανόηση ποσοτικών καταστάσεων και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Παρότι τα μαθηματικά διεισδύουν σε όλο και περισσότερους τομείς της ζωής, αυτό το γεγονός συνειδητοποιείται όλο και λιγότερο. Η διδασκαλία των μαθηματικών έχει επιπτώσεις στη στάση που διαμορφώνουν οι σημερινοί μαθητές για τη σημασία των μαθηματικών στη μελλοντική τους ζωή. Η ανάπτυξη της ικανότητάς τους να χρησιμοποιούν με κριτικό τρόπο τα μαθηματικά στη ζωή τους αποτελεί θεμελιώδη στόχο της εκπαίδευσης. Η προσέγγιση της μοντελοποίησης πρέπει να αναδεικνύει την ξεχωριστή ομορφιά των μαθηματικών, το εύρος εφαρμογών τους σε διάφορους τομείς της κοινωνικο-οικονομικής ζωής και του πολιτισμού καθώς και τις διεπιστημονικές και επιστημολογικές προεκτάσεις τους. Οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να εμπλουτίσουν τη διδασκαλία τους με δραστηριότητες μοντελοποίησης, εισάγοντες νέες έννοιες με πραγματικές καταστάσεις και συνεισφέροντας στην ικανότητα λύσης προβλήματος και τη βελτίωση της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών τους.

Βιβλιογραφία

Batanero, C., Godino, J. D., Navarro-Pelayo, V. (1997). Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32* (181-199).

Bezuszka, S. & Kenney, M. (2004). That Ubiquitous Sum: 1 + 2 + 3 +…+ n. *Mathematics Teacher*, *98(5)*, 316–321.

Billington, J. & Evans, P. (1987). Levels of Knowing 2: the Handshake, *Mathematics Teaching*, 120, 12-19.

Billstein, R., Libeskind, S., Lott, J. W. (2007). *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers,* (9th edition), Addison Wesley.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2003). Developing Elementary Teachers' "Algebra Eyes and Ears". Teaching Children Mathematics, (10)2, 70-77.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.

Doerr, H., & English, L. (2006). Middle grade teachers' learning through students' engagement with modelling tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9,* 5–32.

English, L.D. (2006). Mathematical modelling in the primary school: Children's construction of a consumer guide, *Educational Studies in Mathematics,* 63(3), 303-323.

Fann, K. T. (1970). Peirce's theory of abduction. The Hague: Martinus Nijhoff.

Fischbein, E., & Gazit, A., (1988). The Combinatorial Solving Capacity in Children and Adolescent. *ZDM*, *5* (193-198).

Fischbein, E., Pampu, I., Minzat, I., (1970). Effects of age and instruction on combinatory ablilty in children. *British Journal of Educational Psychology*, 261-270.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P., Cobb, E., Yackel, K., McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools and instructional design*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, 7, 293-307.

Kaiser, G., (2011). Mathematical thinking within mathematical modelling processes. PME 35, pp. 91-96. In B., Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 91–96). Ankara, Turkey: PME.

Kosyvas, G. (2010). Problèmes ouvertes: notion, catégories et difficultés, *Annales de Didactique et des Sciences cognitives*, *15*, IREM de Strasbourg, 43-71.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003a). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. In R., Lesh, & H. M., Doerr (Eds.), Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003b). In what ways does a models and modelling perspective move beyond constructivism. In R., Lesh, & H. M., Doerr (Eds.), Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching (pp. 519-556). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lynn, T. (2008). Sense-able Combinatorics: Students' Use of Personal Representations, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 484-489.

Mason, J.: 1996, "Expressing generality and roots of algebra", in N., Bednarz, C., Kieran & L., Lee, (eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 65–86.

Mousoulides, N., Pittalis, M., Christou, C., Sriraman, B. (2010). Tracing students' modeling processes in school. In R., Lesh et al. (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competences* (pp. 119-129). Springer. doi: 10.1007/978-1-4419-056-1_1.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). Children Doing Mathematics. Oxford: Blackwell Publishers Ltd.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1951-1974). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant. Paris*. Presses Universitaires de France.

Pollak, H. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. In UNESCO (Ed.): *New Trends in mathematics teaching*, Vol IV. Paris, p. 232 – 248.

Radford, L. (2008). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns in Different Context, *ZDM* 40(1), pp. 83−96.

Rivera, F. D., & Becker, J. (2009). Algebraic Reasoning through Patterns, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(4), pp. 212-221.

Romberg, T. A., Carpenter, T. P., & Kwako, J. (2005). Standards- based reform and teaching for understanding. In T. A., Romberg, T. P., Carpenter, & E., Dremock (Eds.), Understanding *mathematics aid science matters* (pp. 3-26). Mahwah, NJ: Erlbaurm.

Rudat, R. (2007). *Modèles combinatoires implicites et résolution de problèmes en classe de 4ème : une étude des effets liés à la sémantique des situations*. Thèse d'état. Université Paris V. http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/27/0/0/60/PDF/These_Rudat_2007.pdf.

Sriraman, B., & English, L. (2004). Combinatorial Mathematics: Research into Practice. *Mathematics Teacher*, *98(3)*, 182–91.

Tarlow, L. (2008). Sense-able Combinatorics: Students' Use of Personal Representations, *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), pp. 484-489.

Κλαουδάτος, Γ. (1990). Μοντελοποίηση: ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο, *Ευκλείδης Γ΄*, *25*, 42-65, Αθήνα: ΕΜΕ.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*, Αθήνα: Τόπος.

Κόσυβας, Γ. (1996). *Η πρακτική του ανοιχτού προβλήματος στο δημοτικό σχολείο, γόνιμος χαρακτήρας και ανατροπή των παγιωμένων αντιλήψεων*, Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Κόσυβας, Γ. (2009). Διδακτικές-μαθησιακές διαδρομές βασισμένες στη διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών, *Το Φ*, *6*, σσ. 133-160, Αθήνα.

Κόσυβας, Γ. (2011). Είδη συλλογισμού κατά την ομαδοσυνεργατική λύση του προβλήματος του κουμπαρά στην Α΄ Γυμνασίου, *Ευκλείδης Γ΄*, *74*, 56-82, Αθήνα: ΕΜΕ.