ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΚΑΙ "ΟΡΙΣΜΕΝΟΙ" ΕΘΙΜΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΝΑΠΟΔΟΧΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΝΟΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Γιώργος Κόσυβας

Βαρβάκειο Πειραματικό Λύκειο

gkosyvas@yahoo.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε ένα διδακτικό πείραμα στη Γ΄ Λυκείου, στην οποία αξιοποιούνται διαφορετικές μορφές οργάνωσης της τάξης των μαθηματικών. Στο εν λόγω εγχείρημα, προεξάρχουσα σημασία έχει η κοινοτική διάσταση της σχολικής τάξης η οποία βασίζεται στην ανάλυση των δομών αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας δασκάλου-μαθητών και μαθητών-μαθητών. Διερευνούμε τη συνδιαλλαγή και συναποδοχή των μαθηματικών νοημάτων και συλλογισμών που προκύπτουν από την ενασχόληση των μαθητών με ένα παράδοξο των τυπικών μαθηματικών και τη συνακόλουθη διαχείριση των λαθών. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι ορισμένοι εθιμικοί κανόνες, που χαρακτηρίζουν τη συμμετοχική δομή της μικροκουλτούρας της ζωντανής τάξης, φαίνεται να διαμορφώνουν τις μαθηματικές αλληλεπιδράσεις τόσο στο εσωτερικό των εταιρικών ομάδων όσο και την κοινοτική ατμόσφαιρα. Επιπλέον, οι προαναφερόμενοι κανόνες εκδηλώνονται και στις περιπτώσεις που οι επικοινωνιακοί μέτοχοι αντιπαραθέτουν συγκρουόμενες ερμηνείες.

Θεωρητικό πλαίσιο

Τα τελευταία χρόνια οι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών έστρεψαν την προσοχή τους στη μελέτη των τρόπων αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας στη σχολική τάξη. Η τάξη θεωρείται ως μια κοινότητα, όπου διδάσκοντες και μαθητές υιοθετούν συνήθειες και στάσεις απέναντι στη μαθηματική γνώση, η οποία θεωρείται ως αντικείμενο συνδιαλλαγής ιδεών και πιθανής συναποδοχής νοημάτων. Οι Cobb κ. ά. (1997) πρότειναν ένα ερμηνευτικό πλαίσιο για τη *"μικροκουλτούρα της τάξης"* υπογραμμίζοντας τις *"νόρμες"* (norms) που συνδέονται κυρίως με τις δομές συμμετοχής που εφαρμόζονται στις κοινότητες. Η Lampert (1990) προσδιόρισε τις δομές συμμετοχής ανάμεσα στα πρόσωπα που λαμβάνουν μέρος σε κοινωνικά συμβάντα: *Οι δομές συμμετοχής εκφράζουν τις αμοιβαίες προσδοκίες των συμμετεχόντων σε κοινωνικά γεγονότα, τα δικαιώματα και τις υποχρεώσεις τους και την κλίμακα των αποδεκτών συμπεριφορών τους*. (Lampert, 1990, σ.

34). Τα προηγούμενα ισχύουν και για την κοινωνική ομάδα της σχολικής τάξης. Η έννοια της "μικροκουλτούρας της τάξης" εκτείνεται στην ατομική και συλλογική μάθηση σε συνδυασμό με τους κανόνες, τις πρακτικές και τα νοήματα που αναγνωρίζονται ως κοινά από τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές.

Στο πλαίσιο αυτό, πολλοί ερευνητές μελετούν τις επικοινωνιακές συνθήκες και τις μορφές αλληλεπίδρασης και αμοιβαίας επιρροής κάτω από τις οποίες οι μαθητές αξιοποιώντας τις πρότερες άτυπες εμπειρίες τους μέσα από διαδικασίες διαπραγμάτευσης συνδιαμορφώνουν τα θέματα μαθηματικής συζήτησης, εκθέτουν τις διαφωνίες τους σε αυτά και προσπαθούν να σχηματίζουν γνώσεις που συναποδέχονται (Steinbring, 2009, Seeger κ. ά. 1998, Voigt, 1998). Από την πολλαπλότητα των υποκειμενικών ερμηνειών των μαθητών, δυνάμει *κυοφορείται η διϋποκειμενική συναίνεση*. Στον περίπλοκο ιστό αμοιβαίων σχέσεων και ανταλλαγών οι ρητές ή άρρητες διαπραγματεύσεις και τα παραγόμενα μαθηματικά νοήματα εκλαμβάνονται συνήθως ως κοινά διευκολύνοντας την επικοινωνία, παρότι ορισμένες όψεις υπολανθάνουν και παραμένουν ασαφείς και δυσεξιχνίαστες (Voigt, 1998).

Η ανάπτυξη της μαθηματικής συζήτησης και τα νοήματα που προσδίδουν στις εμπειρίες τους τα μέλη της διδακτικής ομάδας συνεπηρεάζονται από τα χαρακτηριστικά της σύνθετης κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Κάθε μέλος παίρνει μέρος σε συνεχείς συνδιαλλαγές και προσαρμόζει κάθε φορά τη στάση του ανάλογα με τις εκτιμήσεις του για τις γνώσεις και τις προσδοκίες των άλλων συμμετεχόντων (Voigt, 1998). Μέσα από επικοινωνιακές διαπραγματεύσεις, διασταυρώσεις και αξιολογήσεις επιχειρημάτων, συνυφαίνεται στη σκέψη των μαθητών η διϋποκειμενική συγκρότηση των εννοιών. Μέσα από τη δυναμική της μικροκουλτούρας της ζωντανής τάξης τα προσωπικά νοήματα μετεξελισσόμενα μπορεί να εναρμονιστούν και έτσι να γίνουν συμβατά και συνεπή με τη θεσμοθετημένη γνώση της μαθηματικής κοινότητας (Lampert, 1990). Μέσω των αλληλεπιδράσεων στο πλαίσιο της σχολικής τάξης η διϋποκειμενικότητα δίνει προοδευτικά τη θέση της στην «αντικειμενικότητα».

Υπό το πρίσμα της προαναφερόμενης θεώρησης, για τη διερεύνηση των μαθησιακών διαδικασιών της σχολικής τάξης, αξιοσημείωτη είναι η υιοθέτηση της έννοιας των *‘‘εθιμικών κανόνων’’ ή ‘‘κοινοτικών νορμών’’*, δηλαδή των συλλογικών συνηθειών που σχετίζονται με τις αμοιβαίες προσδοκίες και υποχρεώσεις που συνδιαμορφώνονται από τους συμμετέχοντες και ρυθμίζουν τις μορφές διαπραγμάτευσης που αναπτύσσονται στην τάξη. Τέτοιοι κανόνες είναι οι υποχρεώσεις των μαθητών να εξηγούν και να αιτιολογούν τις λύσεις τους, να ακούν και να προσπαθούν να καταλάβουν τις λύσεις των συμμαθητών τους, να θέτουν διευκρινιστικές ερωτήσεις, να προβαίνουν σε συμπληρωματικές αιτιολογήσεις όταν η επιχειρηματολογία δεν κρίνεται πειστική, να συνεργάζονται, να είναι συνυπεύθυνοι κλπ. (McClain & Cobb, 2001). Ωστόσο, η κατανόηση των ιδιαίτερων γνωρισμάτων της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών επιβάλλει τη διάκριση ανάμεσα στους εθιμικούς κανόνες που λειτουργούν σε όλα τα γνωστικά αντικείμενα και σε εκείνους που ενδείκνυνται για την τάξη των μαθηματικών, τις *κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες* (Yackel & Cobb, 1996). Οι τελευταίες περιλαμβάνουν κριτήρια για την αποδοχή των μαθηματικών επιχειρημάτων κατά τη διαπραγμάτευσή τους στη σχολική τάξη, όπως, πότε μια μαθηματική εξήγηση γίνεται αποδεκτή, πότε η λύση ενός προβλήματος είναι διαφορετική, βέλτιστη, αποτελεσματική, πρόσφορη, τι σημαίνει "μαθηματικά διαφορετική απάντηση" ή "μαθηματικά διαφορετική μέθοδος λύσης" κτλ. (Yackel & Cobb, 1996). Οι κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες μπορεί να ποικίλουν από τάξη σε τάξη.

Αυτή η εργασία αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης στην οποία διερευνώνται οι τρόποι συνδιαλλαγής και συναποδοχής μαθηματικών νοημάτων από δύο μαθητές ενός τμήματος της Γ΄ Λυκείου καθώς αυτοί καταγίνονταν με την κριτική ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου σε ένα μαθηματικό παράδοξο και την κοινή εξεύρευση του λάθους. Ο πειραματισμός μας συγκεντρώνει το ερευνητικό ενδιαφέρον στη συλλογική οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης και τη διαπίστωση αν οι προσδοκίες και οι υποχρεώσεις των επικοινωνιακών μετόχων χαρακτηρίζονται από εθιμικούς κανόνες που αναγνωρίζονται κοινωνικά και μοιράζονται τα μέλη της κοινότητας της τάξης.

Μεθοδολογία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο ενός τμήματος με 18 μαθητές Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ τάξης του Βαρβακείου Λυκείου στην Αθήνα κατά το διδακτικό έτος 2008-9. Το πείραμα εστιάζεται στα μαθηματικά νοήματα που δημιουργούνται γύρω από τον εννοιολογικό πυρήνα αόριστο ολοκλήρωμα-παραγοντική ολοκλήρωση.

Παράδοξο: Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int (x)' \frac{1}{x}dx = x\frac{1}{x} - \int x\left(\frac{1}{x}\right)' dx = 1 - \int x\left(\frac{1}{x}\right)' dx \quad (1) \qquad 1 - \int x\left(\frac{1}{x}\right)' dx = 1 - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx \; = 1 + \int \frac{1}{x}dx \quad (2)$$

Άρα: $\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$, (3) Οπότε: **0=1!** (4) (σελ. 358 σχ. Βιβ. Γ΄ Λυκ. Θετ. Τεχν. Κατ.).

Καταγράψαμε κατά τη διάρκεια του μαθήματος το σύνολο των αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στον εκπαιδευτικό και τους μαθητές στην τάξη, καθώς και τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στους δύο μαθητές κατά τη διάρκεια της συνεργασίας τους. Η ανάλυση των δεδομένων είναι ποιοτική και αφορά κυρίως την λεπτή παρατήρηση των δυαδικών και συλλογικών μαθηματικών αλληλεπιδράσεων των μαθητών καθώς προσπαθούν να κατανοήσουν και να λύσουν το παράδοξο.

Τα αποτελέσματα

Η συνολική δραστηριότητα εκτυλίσσεται στο διδακτικό χρόνο ενός ωριαίου μαθήματος (περίπου 45 λεπτών). Μετά από μια σύντομη εισαγωγή από τον εκπαιδευτικό που αφορά την οργάνωση του εγχειρήματος (3 λεπτά), οι μαθητές συνεργάζονται ανά δυάδες στο θρανίο τους (15-17 λεπτά). Στο τέλος ακολουθεί κοινή συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη, όπου κρίνονται οι λύσεις των δυάδων (23-25 λεπτά). Όλοι οι μαθητές της τάξης μετέχουν στις δυαδικές και συλλογικές αλληλεπιδράσεις. Ωστόσο η εργασία είναι μια μελέτη περίπτωσης που περιορίζεται στην παρατήρηση δύο μαθητών.

Ανάλυση των δυαδικών μαθηματικών αλληλεπιδράσεων

Ο τρόπος που συνεπιδρούν και συνδιαλέγονται ο Παναγιώτης και ο Δημήτρης είναι μεταβλητός.

Παναγιώτης: Πρέπει να βρούμε μαζί το λάθος. Νομίζω η (1) είναι σωστή.

Δημήτρης: Δεν ξέρω... (σιωπή). Δεν μου φαίνεται σωστό.

Παναγιώτης: Λοιπόν ισχύει: $\int \frac{1}{x}dx = \int (x)' \frac{1}{x}dx = x\frac{1}{x} - \int x\left(\frac{1}{x}\right)' dx = 1 - \int x\left(\frac{1}{x}\right)' dx$.

Δημήτρης: Μισό!

Παναγιώτης: Έχει γίνει εφαρμογή της παραγοντικής ολοκλήρωσης. Αυτό είναι λάθος;

Δημήτρης: Δεν είμαι σίγουρος αν είναι σωστό.

Παναγιώτης: Είναι σίγουρα σωστό.

Δημήτρης: Συνεχίζοντας βρίσκουμε το (2): Αυτό είναι σωστό. Παραγωγίζουμε... απλοποιούμε το x και αλλάζουμε πρόσημο...

Παναγιώτης: Ακριβώς. Είναι απλό! Και το (2) είναι σωστό. Από τα (1) και (2) προκύπτει ότι και το βήμα (3) είναι σωστό.

Δημήτρης: Αν ισχύουν οι (1) και (2) τότε $\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$, δηλαδή 0=1. Αυτό είναι άτοπο. Γι' αυτό δεν συμφωνώ.

Παναγιώτης: Βγαίνει παράλογο συμπέρασμα. Όμως δεν υπάρχει λάθος.

Δημήτρης: Είσαι σίγουρος; Ίσως στην αρχή... Ίσως στην πρώτη σειρά πράξεων, ίσως κάπου ενδιάμεσα... Μπορεί... Δεν χρειάζονται τέτοια θέματα για τις γενικές εξετάσεις...

Οι μαθητές δεν καταφέρνουν να κατασκευάσουν μια κοινή ερμηνεία. Παρά τη συμφωνία τους σε επιμέρους ζητήματα οι μαθηματικές αλληλεπιδράσεις που ακολουθούν αποτυπώνουν διαφορετικούς συλλογισμούς και ερμηνείες μεταξύ των δύο μαθητών. Ανάμεσα στους δύο μαθητές παρατηρείται μια σχέση συμμετρίας. Οι προσδοκίες και οι υποχρεώσεις που προκύπτουν από τις δυαδικές αλληλεπιδράσεις καταδεικνύουν ότι ο Παναγιώτης και ο Δημήτρης προσπαθούν να αναπτύξουν μια κοινή λύση του προβλήματος. Αυτή η αντίληψη, τους οδηγεί να λειτουργούν παράλληλα λαμβάνοντας εν μέρει υπόψη την άποψη του άλλου και να επιμένουν για την εξεύρεση του "επίμαχου" σημείου της λύσης. Οι διαφωνίες και οι αποκλίνουσες ερμηνείες τους απέτρεψαν από μια κοινή απόληξη. Έτσι η δράση που ανέπτυξαν ήταν περισσότερο ατομική παρά συνεργατική. Ο Παναγιώτης δείχνει αυτοπεποίθηση και είναι βέβαιος ότι δεν υπάρχει λάθος στη διαδρομή των πράξεων. Το λάθος παρεμφαίνει μόνο στο τέλος και τότε διακατέχεται από μια έκδηλη αδυναμία να εξηγήσει την προέλευσή του. Ο Δημήτρης παρότι δίνει τη συγκατάθεσή του για την ορθότητα των βημάτων (2) και (3) διαφωνεί με τον συμμαθητή του και διαισθάνεται ότι το λάθος ενυπάρχει στο πρώτο βήμα, χωρίς ωστόσο να είναι σε θέση να στηρίξει τον ισχυρισμό του. Επιπλέον αμφισβητεί τη

σκοπιμότητα ενασχόλησης με την άσκηση θεωρώντας ότι δεν έχει νόημα αφού στερείται εξεταστικής χρησιμότητας.
Οι δύο μαθητές ενώ από τη μια πλευρά αναπτύσσουν έναν κοινό προβληματισμό ως προϊόν συνεπεξεργασίας από την άλλη η μορφή της αλληλεπίδρασης περιέχει στοιχεία ασυμφωνίας που συνιστούν μια μονοδρομική επεξεργασία. Παρά τη σαφή πρόθεσή τους, δεν κατάφεραν να συμφωνήσουν σε μια κοινή λύση. Οι παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι και οι δύο μαθητές είχαν δυσκολίες να διακρίνουν την ύπαρξη λάθους στο βήμα (4) θεωρώντας ασυναίσθητα ότι ο «κανόνας διαγραφής» ισχύει και για τα αόριστα ολοκληρώματα. Ίσως το λάθος να έχει την προέλευσή του στο σύστημα των προηγούμενων αλγεβρικών γνώσεων των μαθητών και να λειτουργεί ως ένα παγιωμένο γνωστικό σχήμα που στέκεται ως εμπόδιο στην απόκτηση νέας γνώσης.

Ανάλυση των συλλογικών μαθηματικών αλληλεπιδράσεων

Ο Δημήτρης και ο Παναγιώτης επαναλαμβάνουν τις ιδέες τους κατά την κοινή συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη. Όπως και στην πρώτη φάση του μαθήματος, η μορφή δυναμικής αλληλεπίδρασης που αναπτύσσεται ανάμεσα στους δύο επικοινωνιακούς συντρόφους ποικίλλει. Ο καθένας προβάλλει τη δική του εκδοχή. Ενώ το κείμενο της λύσης προβάλλεται σε διαφάνεια η μαθηματική "διαμάχη" γενικεύεται. Καταθέτουμε ορισμένα ενδεικτικά επεισόδια:

...Δάσκαλος: Εσείς τι λέτε; Πώς κρίνετε αυτά; (απευθύνεται σε ολόκληρη την τάξη)
Νίκος: Εδώ, πρέπει να συμφωνήσουμε στο λάθος. Να το βρούμε και να το εξηγήσουμε... Μάλλον τα (1), (2) και (3) είναι σωστά.
Βασιλεία: Αν τα τρία πρώτα βήματα ήταν σωστά, τότε θα ήταν σωστό και το συμπέρασμα. Όμως το συμπέρασμα αυτό είναι παράξενο. Δεν μπορεί να ισχύει στα μαθηματικά 0=1! Άρα κάπου υπάρχει λάθος. Πρέπει να καταλάβουμε που είναι το λάθος...

Μπήκαν στο χορό όλοι σχεδόν οι μαθητές και η τάξη χωρίστηκε σε δύο στρατόπεδα. Δημιουργήθηκε ένα κλίμα αβεβαιότητας που υποχρέωνε τους μαθητές να διατυπώνουν εικασίες, που ίσως ισχύουν, αλλά δεν έχουν επαληθευτεί, και να βιώσουν έκπληξη, αμφιβολία ή σύγκρουση. Οι διάφορες απαντήσεις που διατυπώθηκαν από τους μαθητές στο μαθηματικό παράδοξο ήταν διαφορετικές μεταξύ τους. Μοιάζουν αυθαίρετες και δύσκολα μπορούμε να φανταστούμε ότι ισχύουν όλες.

Δημήτρης: Στα (2) και (3) δεν υπάρχει λάθος. Ίσως να υπάρχει λάθος στο βήμα (1).
Αλεξάνδρα: Νομίζω ότι και το (1) είναι σωστό.
Δημήτρης: Ναι το βρήκα! Στο (1) χρειάζεται μια σταθερά c. Να εδώ.
Παναγιώτης: Γιατί;
Δημήτρης: Να γράψω στον πίνακα;
Δάσκαλος: Βεβαίως.

Δημήτρης: $\int \frac{1}{x}dx = \int (x)' \frac{1}{x}dx = x\frac{1}{x} + c - \int x\left(\frac{1}{x}\right)' dx = 1 + c - \int x\left(\frac{1}{x}\right)' dx$ (γράφει) .

Παναγιώτης: Δεν χρειάζεται σταθερά.

Αλεξάνδρα: Η σταθερά είναι λάθος.

Δημήτρης: Γιατί; Σε κάθε αόριστο ολοκλήρωμα βάζουμε μια σταθερά.

Αλεξάνδρα: Στον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος υπάρχει σταθερά. Όμως, στον τύπο της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης δεν είναι σωστό να βάλουμε σταθερά εφόσον το βιβλίο γράφει: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)'g(x)dx$, χωρίς σταθερά. Μόνο αυτόν τον τύπο χρειάζεται να μάθουμε για τις γενικές εξετάσεις.

Δημήτρης: Χρειάζεται μια σταθερά c και έτσι το λάθος βρίσκεται στο (1). Εσείς τι λέτε κύριε.

Δάσκαλος: Θα προτιμούσα να σκεφτείτε περισσότερο, και να βρείτε μόνοι σας την απάντηση. Είσαστε όλοι σύμφωνοι με τη γνώμη του συμμαθητή σας; Τελικά χρειάζεται ή όχι η σταθερά; Ποιος θέλει να μας πει κάτι; ...

Η συνέχεια της συζήτησης ήταν χωρίς αποτέλεσμα. Παρότι οι μαθητές θα έπρεπε να κρίνουν τι είναι σωστό και τι είναι λάθος, ο Δημήτρης αποτείνει εκ νέου το λόγο στο δάσκαλο ζητώντας άμεση αντιμετώπιση του αδιεξόδου. Έτσι αποφεύγει το ρίσκο του πιθανού λάθους και μεταθέτει στο δάσκαλο την ευθύνη. Ο διδάσκων καταφεύγει σε αναλυτικές εξηγήσεις διάρκειας 5 περίπου λεπτών. Αυτές αφορούν την απόδειξη του τύπου της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης και τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος.

Αξίζει να επισημανθεί η αντίληψη της μαθήτριας για την αποστήθιση του τύπου της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης και όχι της απόδειξης, αφού αυτή δεν συγκαταλέγεται στην ύλη των γενικών εξετάσεων. Είναι αδιάφορο να εξηγηθεί γιατί στη διαδικασία της απόδειξης προστίθεται σταθερά, η οποία στη συνέχεια παραλείπεται, ενώ στον τύπο του αόριστου ολοκληρώματος υπάρχει σταθερά. Οι μαθητές καλούνται να ξέρουν μόνο ότι προσδιορίζει το εξεταστικό συμβόλαιο. Τα υπόλοιπα είναι λάθος!

Δάσκαλος: ... Κατ'αναλογία με τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος $\int f(x)dx = F(x) + c$ όταν εφαρμόζουμε την παραγοντική ολοκλήρωση προσθέτουμε μια σταθερά ... Στη συγκεκριμένη περίπτωση η παράλειψη της σταθεράς είναι η αιτία της αντίφασης. Μπορεί τώρα κάποιος να εξηγήσει πώς αυτή η θεωρία εφαρμόζονται στη συγκεκριμένη άσκηση; ... Ο Παναγιώτης.

Παναγιώτης: (γράφει στον πίνακα) Η ισότητα $\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$ γράφεται $ln|x| + c_1 = 1 + ln|x| + c_2$. Οπότε $c_1 = 1 + c_2 \Rightarrow c_1 - c_2 = 1$ και όχι, 0=1. Διαγράφουμε το $ln|x|$ στα δύο μέλη, ενώ δεν επιτρέπεται να διαγράψουμε τα αόριστα ολοκληρώματα, γιατί κρύβουν διαφορετικές σταθερές c_1 και c_2. OK; Έτσι το λάθος βρίσκεται στο (4). …

Αλεξάνδρα: Κατάλαβα κύριε. Το αόριστο ολοκλήρωμα πάντα κρύβει μέσα του τη σταθερά c. Όλα όσα μας εξηγήσατε βόηθησαν τον Παναγιώτη να γράψει τη λύση και όλους εμάς να καταλάβουμε... Φανταζόμαστε τη σταθερά. Αυτό είναι. Τελικά ήταν τόσο απλό!

Παναγιώτης: Τη σταθερά που χάσαμε στο βήμα (1) την εννοούμε...

Δημήτρης: Συμφωνώ. Δεν επιτρέπεται να διαγράψουμε το σύμβολο του ολοκληρώματος από τα δύο μέλη γιατί δεν έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Είναι ένα απροσδιόριστο σύνολο... Όμως, αποκλείεται να πέσει τέτοιο θέμα στις γενικές εξετάσεις...

Οι συλλογικές αλληλεπιδράσεις μαθητών-μαθητών και δασκάλου-μαθητών συνέβαλαν στην κατανόηση και εξήγηση του παραδόξου από τους δύο συμπαίκτες. Στο τέλος, μετά από έναν απαραίτητο χρόνο ωρίμανσης, συναποδέχονται ότι το λάθος βρίσκεται στο βήμα (4) και διακατέχονται από βιώματα επιτυχίας και αναγνώρισης. Στο κοινωνικό επίπεδο, διαπιστώνουμε ότι οι μαθητές της τάξης συλλειτουργούν σε ένα αναπτυγμένο επικοινωνιακό κλίμα με κοινή επιδίωξη τη λύση του προβλήματος, αλλά φαίνεται να έχουν δυσκολίες στη διαχείριση των διαφωνιών που εμφανίζονται. Η επιχειρηματολογημένη ανταλλαγή ιδεών, η συνδιαλλαγή και η "διαπραγμάτευση" νοημάτων συνεπέφεραν τη συναποδοχή νοημάτων στην κοινότητα της τάξης. Ωστόσο τα νοήματα τα οποία δημιουργούνται δεν είναι απαραίτητα κοινά μεταξύ των συμμετεχόντων, αλλά συνήθως εκλαμβάνονται ως κοινά. Μια τέτοια άρρητη υπόθεση μπορεί ενδεχομένως να ερμηνεύσει την συχνή εμφάνιση συμφωνίας,

Η αλλαγή στον τρόπο ερμηνείας του προβλήματος προκλήθηκε από την αποφασιστική παρέμβαση του δασκάλου. Η εν λόγω παρέμβαση ζητήθηκε από το Δημήτρη, ο οποίος φαίνεται ότι προσδοκούσε άμεση μαθηματική στήριξη για τη θετική έκβαση της μαθησιακής διαδικασίας. Ως εκείνη τη στιγμή ο ρόλος του δασκάλου συνοψιζόταν στην ενθάρρυνση και διευκόλυνση του συλλογισμού των παιδιών. Η νέα φάση χαρακτηρίζεται από αναλυτικές εξηγήσεις στοιχείων της θεωρίας που κρίνονται χρήσιμες για την προαγωγή της συζήτησης, χωρίς όμως να δίνουν έτοιμη τη λύση ή να καταλήγει στην επίσημη εγκυροποίηση της σωστής απάντησης. Ουσιαστικά διακόπτεται η ροή μιας ανοιχτής διερεύνησης με πρωταγωνιστές τους μαθητές και κατά τη διαπραγμάτευση του νοήματος τα επιχειρήματα και οι εξηγήσεις του δασκάλου αποκτούν βαρύνουσα σημασία. Όμως αυτή η εμβόλιμη "διδασκαλία" δεν εκμηδένισε πλήρως τις προσδοκίες των επικοινωνιακών μετόχων για τη σημασία συνδιαλλαγής και έδωσε ώθηση στην κοινή κατανόηση του παραδόξου από τους μαθητές και τη συνακόλουθη εξεύρεση και αιτιολόγηση του λάθους. Αυτή η κατεύθυνση ευνοήθηκε κατά βάση από τη διατήρηση της "διαπραγματευτικής" πρόθεσης στην τάξη. Στην μικροκουλτούρα της τάξης, οι εθιμικοί κανόνες είναι «ορισμένοι» και οι συνακόλουθες πρακτικές είναι συστατικά στοιχεία των τρόπων με τους οποίους οι μαθητές κατασκευάζουν το μαθηματικό νόημα.

Θα μπορούσε ο δάσκαλος να είχε αφήσει την κατάσταση προβληματισμού ανοιχτή; Νομίζουμε όχι. Στη Γ΄ Λυκείου εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις πολύ δύσκολα μπορούν να ανατρέψουν ένα παγιωμένο σύστημα στο οποίο η διερεύνηση προβλημάτων είναι περιττή πολυτέλεια. Οι μαθητές της τελευταίας τάξης έχουν εθιστεί να καταναλώνουν έτοιμες λύσεις. Αξίζει να επισημανθεί ότι οι εθιμικοί κανόνες που καθορίζουν τις αμοιβαίες προσδοκίες και υποχρεώσεις όλων των συμμετεχόντων υποτάσσονται στην *εξεταστική χρησιμότητα*. Οι μαθητές προπονούνται εντατικά μόνο σε θέματα που προδιαγράφονται απαρέγκλιτα από τις γενικές εξετάσεις. Θεωρούν ότι η επιτυχία τους συνδέεται με την κατοχή της φροντιστηριακής μεθοδολογίας ενός ευρέος φάσματος ασκήσεων. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο διαστρεβλώνονται βασικές έννοιες του διαφορικού-ολοκληρωτικού λογισμού από τεχνητές ασκήσεις υπερβολικής αλγεβροποίησης με μαγικά τρυκ και απίθανες ακροβασίες. Όλα αυτά οι μαθητές καλούνται να τα μαθαίνουν χωρίς να τα σκέπτονται και να τα κατανοούν, παρότι ο δάσκαλος δηλώνει ότι πασχίζει για την εννοιολογική κατανόηση. Η μονομερής έμφαση στη διαδικαστική γνώση καθώς και η εκτεταμένη χρήση μηχανικών και αποσπασματικών τεχνικών δεν βοηθούν τους μαθητές να εμβαθύνουν στις έννοιες και σιγά-σιγά να αποκτήσουν μια πληρέστερη εικόνα της δομής των Μαθηματικών.

Συζήτηση και συμπεράσματα

Ένα κοινό στοιχείο που αναδύεται από τις διαφορετικές αλληλεπιδραστικές διαδικασίες που αναλύθηκαν είναι ότι ένα μεγάλο μέρος της *συλλογικής αλληλεπίδρασης* χρησιμεύει για αμοιβαίες εξηγήσεις του προβλήματος. Ο δάσκαλος δίνει καταλυτική ώθηση στην κατανόηση με τη μορφή εκτεταμένων ρητών επεξηγήσεων. Ασχολείται κυρίως με την τυπική πτυχή της μαθηματικής επικοινωνίας, ενώ οι μαθητές παίρνουν το λόγο αυθόρμητα χρησιμοποιώντας και άτυπες εκφράσεις, οι οποίες είναι οικείες και κατανοητές στους ίδιους. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι προσδοκίες του δασκάλου εκλαμβάνονται ως εθιμικοί κανόνες από τους μαθητές. Ομοίως, ο δάσκαλος προτρέπει τους μαθητές να κατανοήσουν τις προτάσεις των συμμαθητών τους ζητώντας να σκεφτούν και πιθανόν να συμφωνήσουν. Οι μαθητές που εκφράζονται το κάνουν χωρίς φανερές δυσκολίες. Κατ' αυτό τον τρόπο, οι μετέχοντες στις συλλογικές αλληλεπιδράσεις εξηγούν και αναζητούν την αμοιβαία κατανόηση. Σταδιακά, μέσα από "διαπραγματεύσεις" και συνδιαλλαγές οικοδομούν κοινά μαθηματικά νοήματα που συναποδέχονται στην κοινότητα της τάξης. Αυτή η δομή της αλληλεπίδρασης ενεργοποιείται εξίσου στις δυαδικές αλληλεπιδράσεις, όπου κάθε δυάδα έχει τη δική της σχεσιακή δυναμική.

Στη δυάδα που ερευνήσαμε, λειτουργεί κατά βάση μια μορφή συνεπεξεργασίας και γνωστικής αλληλοσυμπλήρωσης, όπου οι διαφορετικοί τρόποι ερμηνείας του προβλήματος, περνούν μέσα από σύντομες αντιπαραθέσεις λιγότερο ή περισσότερο επιχειρηματολογημένες. Οι δύο μαθητές εξηγούν τους συλλογισμούς τους καθ' όλη τη διάρκεια της λύσης, παρά τις γνωστικές διαφορές που τους χαρακτηρίζουν. Γενικά, επιδεικνύουν ενδιαφέρον για την εγκαθίδρυση μιας αμοιβαίας κατανόησης, παρόλο που δυσκολεύονται να καταλήξουν σε πλήρη συμφωνία, όπως το δείχνουν οι αναλύσεις που προηγήθηκαν.

Οι προαναφερόμενες διαπιστώσεις καταδεικνύουν ότι η εξήγηση και η αναζήτηση αμοιβαίας κατανόησης χαρακτηρίζουν τις συμμετοχικές επεξεργασίες στις μαθηματικές πρακτικές της τάξης, τόσο στις συλλογικές αλληλεπιδράσεις όσο και στις δυαδικές. Τα εκθεθέντα επεισόδια μας επιτρέπουν να υποθέσουμε ότι η εξήγηση και η αμοιβαία κατανόηση στο πλαίσιο των εργασιών των ομάδων αντιπροσωπεύουν, στο κοινοτικό πλαίσιο, κοινούς εθιμικούς κανόνες που αναγνωρίζονται από τη μικροκουλτούρα της τάξης (Yackel & Cobb, 1996). Κατά αυτό τον τρόπο, μια από τις ιδιομορφίες του κανόνα που προκύπτει από τη μελέτη μας είναι ότι εκφράζεται ρητά, ενώ οι εμπειρικές παρατηρήσεις του Voigt (1998) δείχνουν ότι οι εθιμικοί κανόνες στην τάξη καθιερώνονται συνήθως με τρόπο υπονοούμενο κατά τις αλληλεπιδράσεις των επικοινωνιακών μετόχων. Αυτή η διαπίστωση μας ωθεί να σκεφτούμε περισσότερο το παιγνίδι υπονοούμενου-ρητού κατά τη σύσταση της μικροκουλτούρας της τάξης.

Βιβλιογραφία

Cobb, P., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Mathematizing and symbolizing: The emergence of chains of signification in one first-grade classroom. In D. Kirshner & J. A. Whitson (Ed.), *Situated cognition, social, semiotic, and psychological perspectives* (pp. 151-233). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, **27**, 29-63.

McClain, K. & Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education,* **32(3)**, 238-266.

Seeger, F., Voigt, J. and Waschescio, U. (eds). (1998). The Culture of the Mathematics Classroom. Cambridge University Press.

Steinbring, H. (2009). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. New York: Springer.

Voigt, J. (1998). The culture of the mathematics classroom: Negotiating the mathematical meaning of empirical phenomena. In F. Seeger, J. Voigt and U. Waschescio (eds) pp. 191-220.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* **27**, 458-477.