Ο ρόλος των αναπαραστάσεων για την κατανόηση των πραγματικών αριθμών

Μιχάλης Γρ. Βόσκογλου
Καθηγητής Α.Τ.Ε.Ι. Πάτρας - Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών
e-mail : voskoglou@teipat.gr , mvosk@hol.gr
URL: http://eclass.teipat.gr/RESE-STE101/document

Δρ. Γεώργιος Κόσυβας
Βαρβάκειο Πειραματικό Λύκειο - Παλαιό Ψυχικό, Αθήνα
e-mail: gkosyvas@yahoo.com

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, που είναι συνέχεια παλαιότερης (πειραματικής) μας έρευνας, αναλύουμε τις δυσκολίες, που εμφανίζονται στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών δίδοντας κάποια έμφαση στον ρόλο, που παίζουν οι αναπαραστάσεις τους (τρόποι ορισμού, περιγραφής και γραφής τους) για το ζήτημα αυτό. Για να γίνουν τα επιχειρήματα μας πιο πειστικά, παρουσιάζουμε, μεταξύ άλλων, αποσπάσματα από συνεντεύξεις μαθητών, που λήφθηκαν μετά την πειραματική μας έρευνα, καθώς και τις γνωστές μεθόδους κατασκευής του σώματος των πραγματικών αριθμών.

The role of representations in understanding real numbers

Michael Gr. Voskoglou
Professor of Mathematical Sciences
Graduate T.E.I. of Patras – School of Technological Applications

Dr. Georgios Kosyvas
Varvakeio Pilot Lyceum - Palaio Psychico, Athens

Abstract

In the present work, which is the continuation of an earlier (experimental) study, we analyze the difficulties appearing in understanding the real numbers giving some emphasis to the role of their representations (i.e. ways of defining, describing and writing them down) with respect to this matter. In order to make our arguments more convincing, we present, among others, parts from interviews taken from students after our experimental study, as well as the known methods of constructing the field ***R*** of real numbers.

1. Εισαγωγή

Η εμπειρική προσέγγιση των αριθμών ξεκινά στην προσχολική ηλικία στο πλαίσιο της κοινωνικοποίησης, όπου το μικρό παιδί διακρίνει το ένα από τα πολλά και προβαίνει σε απαριθμήσεις αντικειμένων (Gelman 2003). Αυτή η πρώτη γνωριμία με την έννοια του αριθμού βοηθά σημαντικά στην κατανόηση της δομής του συνόλου ***N*** των φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα, συντελεί στη συνειδητοποίηση της αρχής του «επόμενου φυσικού αριθμού», που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το ***N*** είναι ένα απειροσύνολο (Hartnett & Gelman 1998). Ακόμη υποστηρίζει την ανάπτυξη στρατηγικών για την πρόσθεση και την αφαίρεση, που βασίζονται στις αρχές της απαρίθμησης (Smith et al. 2005), τη σύγκριση μεταξύ φυσικών αριθμών (ορισμός διάταξης στο ***N***) κ.λ.π. Όλα αυτά ενισχύονται κατά τα δυο πρώτα χρόνια φοίτησης στο Δημοτικό Σχολείο, όπου οι μαθητές μελετούν συνήθως τους φυσικούς αριθμούς και τις πράξεις τους μέχρι το 1000.

Μετά τις δύο πρώτες τάξεις του Δημοτικού εισάγονται τα κλάσματα και οι δεκαδικοί αριθμοί, ενώ οι αρνητικοί αριθμοί εισάγονται στην πρώτη τάξη του Γυμνασίου. Είναι διαπιστωμένο ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση των ρητών αριθμών (π.χ. βλ. Smith et al. 2005). Πολλές από αυτές οφείλονται στην καταχρηστική μεταφορά γνώσεων από τους φυσικούς στο πεδίο των ρητών αριθμών (βλ. Yujing & Yong-Di 2005, Vamvakousi & Vosniadou 2004, 2007). Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι «όσα περισσότερα ψηφία έχει ένας αριθμός τόσο μεγαλύτερος είναι» (Moscal & Magone 2000), ή ότι «ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει, ενώ η διαίρεση μικραίνει τους αριθμούς» (Fischbein et al. 1985). Επιπλέον, θεωρούν ότι η «αρχή του επόμενου αριθμού» ισχύει και για ρητούς αριθμούς και δυσκολεύονται να δημιουργήσουν στη σκέψη τους τη θεμελιώδη έννοια της πυκνότητας των ρητών αριθμών (Malara 2001, Merenluoto & Lehtinen 2002).

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των ρητών αριθμών, που πιθανά επηρεάζει αρνητικά την κατανόησή τους είναι ο πολλαπλός τρόπος γραφής τους, π.χ.

μπορούμε να γράψουμε $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\ldots=0{,}5$. Πράγματι, οι αρχάριοι έχουν την τάση να κατηγοριοποιούν τα αντικείμενα με βάση τα επιφανειακά τους γνωρίσματα, παρά τα δομικά τους χαρακτηριστικά (Chi et al. 1981), με συνέπεια να δυσκολεύονται να καταλάβουν ότι διαφορετικά σύμβολα είναι δυνατό να παριστάνουν το ίδιο αντικείμενο (Markovitz & Sowder 1991). Έτσι πολλοί μαθητές θεωρούν ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός ρητού αριθμού παριστάνουν διαφορετικούς αριθμούς (Khoury & Zazkis 1994, O'Connor 2001) και ακόμη περισσότερο ότι οι δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι δυο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του συνόλου ***Q*** των ρητών αριθμών. Σημειώνουμε ότι αυτή η λανθασμένη αντίληψη έχει ριζώσει ως συνήθεια ακόμη και σε ενήλικα άτομα, που θεωρούν τα κλάσματα ως μια σχέση μέρους προς όλο (π.χ. το $\frac{3}{4}$ σημαίνει ότι χωρίζουμε την ακέραιη μονάδα σε 4 ίσα μέρη και παίρνουμε τα 3), ενώ υπάρχουν και άλλες έννοιες του κλάσματος, π.χ. ως ακριβές πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών, ως λόγος, ως σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών, ως τελεστής κ.λπ., που εμφανίζουν μικρότερο βαθμό πρόσκτησης. Αντίθετα τους δεκαδικούς τους θεωρούν αποκλειστικά ως πηλίκα διαιρέσεων (π.χ. 1:4=0,25), που μοιάζουν περισσότερο με τους φυσικούς αριθμούς.
Η κατανόηση των άρρητων αριθμών, που εισάγονται στη Β΄ Γυμνασίου, προϋποθέτει ότι ο μαθητής έχει ήδη οικειοποιηθεί τους ρητούς αριθμούς, πράγμα που όταν δεν έχει επιτευχθεί πλήρως (όπως συμβαίνει αρκετά συχνά), δημιουργεί πολλά προβλήματα. Έχει διαπιστωθεί ότι μαθητές, αλλά και φοιτητές όλων των επιπέδων, δεν είναι σε θέση να ορίσουν σωστά τις έννοιες των ρητών και άρρητων αριθμών, ούτε μπορούν να διακρίνουν τους ακέραιους από τους παραπάνω αριθμούς (Hart 1988, Fischbein et al. 1995). Γενικά η έννοια του ρητών αριθμών φαίνεται να παραμένει απομονωμένη από το ευρύτερο σύνολο ***R*** των πραγματικών αριθμών (Moseley 2005, Toepliz 2007).

Οι μελέτες, που επικεντρώνονται στην κατανόηση και τη διδακτική προσέγγιση των άρρητων αριθμών σπανίζουν. Φαίνεται ωστόσο ότι, πέρα από την ελλιπή κατοχή των ρητών αριθμών, την σαφή αναγνώριση των ιδιοτήτων τους και τις σχετικές παρανοήσεις, υπάρχουν και άλλα εγγενή εμπόδια (γνωστικά και επιστημολογικά), που καθιστούν την πρόσκτηση των άρρητων αριθμών ακόμη δυσκολότερη (Herscovics 1989, Sierpinska 1994, Sirotic & Zazkis 2007α κ.λπ.). Οι Fischbein et al. (1995) υπέθεσαν ότι πιθανά εμπόδια για την κατανόηση των άρρητων αριθμών μπορεί να είναι οι διαισθητικές δυσκολίες, που παρουσιάσθηκαν στην ιστορία των μαθηματικών κατά την ανακάλυψη (ή πιο σωστά την εφεύρεση τους) και τη συνακόλουθη μελέτη τους. Κατά τους Fischbein et al. (1995), οι δυσκολίες αυτές επικεντρώνονται στην κατανόηση της ύπαρξης *ασύμμετρων μεγεθών (incommensurable magnitudes)* και την εννοιολογική σύλληψη της *ιδιότητας του συνεχούς (property of the continuous)* του συνόλου ***R*** (παρ' ότι το ***Q*** είναι ένα παντού πυκνό σύνολο, δεν μπορεί να καλύψει όλα τα σημεία ενός δοσμένου διαστήματος, όπως συμβαίνει με το ***R***). Ωστόσο, αν και τα αποτελέσματα των πειραμάτων τους, όπως οι ίδιοι δέχονται, δεν φάνηκε να επαληθεύουν πλήρως την παραπάνω υπόθεση, προτείνουν οι διαισθητικές αυτές δυσκολίες να επισημαίνονται μάλλον από το δάσκαλο στους μαθητές, παρά να αγνοούνται, γιατί με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται μια αρτιότερη προσέγγιση της έννοιας των άρρητων αριθμών.

Η δική μας υπόθεση, χωρίς να υποβαθμίζει τις παραπάνω παραμέτρους (δηλαδή την ατελή κατανόηση των ρητών και τις διαισθητικές δυσκολίες, που παραπέμπουν στην ιστορία των μαθηματικών), εστιάζει και σε έναν άλλο προβληματισμό. Έτσι, υποθέτουμε ότι ένα βασικό εμπόδιο για την κατανόηση των πραγματικών αριθμών αφορά τις *σημειωτικές τους αναπαραστάσεις (semiotic representations)*, δηλαδή τους τρόπους με τους οποίους τους ορίζουμε, τους συμβολίζουμε και τους γράφουμε.

Η προαναφερόμενη υπόθεση, που επαληθεύτηκε σε πειραματική έρευνα, την οποία πρόσφατα πραγματοποιήσαμε (Βόσκογλου & Κόσυβας 2009), ενισχύεται σημαντικά και από ευρήματα άλλων ερευνητικών εργασιών. Η Janvier (1987, σελ. 67) περιγράφει την κατανόηση μιας έννοιας ως μια συσσωρευτική διαδικασία, που βασίζεται κυρίως στην ικανότητα του ατόμου να διαχειρίζεται με άνεση ένα διαρκώς εμπλουτιζόμενο σύνολο αναπαραστάσεων της έννοιας αυτής. Ειδικότερα έχει αναπτυχθεί μια εκτεταμένη έρευνα σχετικά με το ρόλο των αναπαραστάσεων για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (π.χ. βλ. Goldin & Janvier 1998, Cuoco 2001, Goldin 2008, Godino & Fond 2010). Όσον αφορά τους πραγματικούς αριθμούς οι Peled & Hershkovitz (1999) σε πειραματική τους μελέτη διαπίστωσαν ότι μελλοντικοί καθηγητές των μαθηματικών στο δεύτερο και τρίτο έτος των σπουδών τους, αν και γνώριζαν τους ορισμούς και τα βασικά χαρακτηριστικά των άρρητων αριθμών, απέτυχαν σε διαδικασίες, που αφορούσαν τον ευέλικτο χειρισμό διαφορετικών τους αναπαραστάσεων. Ακόμη οι Sirotic & Zazkis (2007 β) μελέτησαν την ικανότητα υποψηφίων καθηγητών στο χειρισμό των γεωμετρικών αναπαραστάσεων των άρρητων αριθμών, ενώ οι ίδιοι (Zazkis & Sirotic 2010) χρησιμοποίησαν ως θεωρητική βάση τη διάκριση των αναπαραστάσεων σε *διαφανείς (transparent)* και *αδιαφανείς (opaque)*, όπως αυτή έχει εισαχθεί από τους Lesh et al. (1987), για να μελετήσουν τους τρόπους με τους οποίους διαφορετικές δεκαδικές αναπαραστάσεις ρητών και άρρητων αριθμών επηρεάζουν τις απαντήσεις μελλοντικών καθηγητών των μαθηματικών σχετικά με την αρρητότητα τους, ή όχι.

Για να προσεγγίσουμε πρακτικά τις έννοιες των διαφανών και αδιαφανών δεκαδικών αναπαραστάσεων των πραγματικών αριθμών, δίνουμε παρακάτω κάποια δικά μας χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Οι ρητοί λοιπόν αριθμοί $\frac{3}{5}$=0.6, $\frac{1}{3}=0.33\mathbf{3}\ldots$ και $\frac{281849}{99900}$=2.821131131**131**…., έχουν διαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις, αφού μπορούμε να προβλέψουμε τα δεκαδικά τους ψηφία οποιασδήποτε τάξης. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο και με τον αριθμό

$$\frac{144}{233}=0.61802575107\ldots,$$

που έχει περίοδο 232 ψηφίων και κατά συνέπεια η παραπάνω δεκαδική του αναπαράσταση είναι αδιαφανής.

Όμως και μια δεκαδική αναπαράσταση ενός άρρητου αριθμού, παρά την πολυσύνθετη δομή της, μπορεί να είναι διαφανής. Αυτό π.χ. συμβαίνει με τους αριθμούς

2.00131311**3**11**13**111**13**1111**13**… και 0.2822**88**222**888**2222**8888**2…

Στους αριθμούς αυτούς υπάρχει κανονικότητα, αφού τα ψηφία τους επαναλαμβάνονται με ένα προφανή νόμο (στον πρώτο μετά το 2.001 και ανάμεσα σε εκάστοτε δύο τριάρια παρεμβάλλονται 1, 2, 3, … μονάδες και στο δεύτερο μετά το 28 το 2 και το 8 επαναλαμβάνονται 2,3,4,…. φορές, δηλαδή αυξανόμενα διαδοχικά κατά μία φορά), αλλά όχι περιοδικότητα.

Για όλα αυτά όμως θα επανέλθουμε και στη συνέχεια με περισσότερα παραδείγματα, αφού ο βασικός μας στόχος στο παρόν άρθρο είναι να αναλύσουμε το ρόλο των σημειωτικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών.

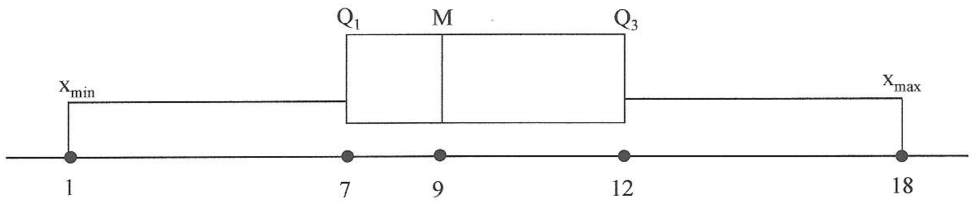
2. Η πειραματική έρευνα

Στο 26ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ στη Θεσσαλονίκη παρουσιάσαμε μια πειραματική έρευνα σχετικά με την κατανόηση των άρρητων και γενικότερα των πραγματικών αριθμών (Βόσκογλου & Κόσυβας 2009). Το πείραμά μας βασίσθηκε σε ένα ερωτηματολόγιο 15 ερωτήσεων (βλ. Παράρτημα), που απαντήθηκε από 78 μαθητές της Β΄ τάξης του 1ου Πειραματικού Γυμνασίου της Αθήνας (Πλάκα), δηλαδή ενός καλού δημόσιου σχολείου, προς το τέλος του σχολικού έτους 2008-09, λίγους μήνες μετά την πρώτη διδασκαλία των άρρητων αριθμών. Το ίδιο ερωτηματολόγιο απαντήθηκε επίσης την ίδια περίπου χρονική περίοδο και από 106 σπουδαστές του πρώτου εξαμήνου δύο τμημάτων της Σχολής Τεχνολογικών Εφαρμογών (μέλλοντες τεχνολόγοι μηχανικοί) και ενός τμήματος της Σχολής Διοίκησης και Οικονομίας του ΤΕΙ Πάτρας. Οι εν λόγω σπουδαστές είχαν βέβαια πολύ περισσότερες εμπειρίες από τους δεκατετράχρονους μαθητές του Γυμνασίου, αλλά, με βάση τις βαθμολογίες εισαγωγής τους στην Ανώτατη Εκπαίδευση, αντιστοιχούν κατά κανόνα σε μέτριους απόφοιτους των Λυκείων της χώρας μας.

Η επιλογή των υποκειμένων του πειράματος μας δεν ήταν τυχαία, ούτε έγινε επειδή είχαμε ευκολότερη πρόσβαση προς τα εκεί. Ο σκοπός μας ήταν να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δύο διαφορετικών ηλικιακών ομάδων, ελπίζοντας να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα, σχετικά με το αν η ηλικία και το μαθηματικό υπόβαθρο του κάθε ατόμου επηρεάζει την πληρέστερη αντίληψη και σωστή χρήση των πραγματικών αριθμών. Γι’ αυτόν ακριβώς το λόγο επιλέξαμε μια ομάδα καλών (κατά τεκμήριο) μαθητών του Γυμνασίου, που πρόσφατα είχαν διδαχθεί για πρώτη φορά τους άρρητους αριθμούς και μια ομάδα μέτριων (επίσης κατά τεκμήριο) απόφοιτων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, που όμως επρόκειτο να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά ως εργαλείο για την μελέτη της επιστήμης τους (σπουδαστές του ΤΕΙ, μέλλοντες μηχανικοί και οικονομολόγοι). Παρόμοια μελέτη είχε γίνει στο παρελθόν, σύμφωνα με τα όσα τουλάχιστον εμείς γνωρίζουμε, μόνο από τους Fischbein et al. (1995). Όμως η μελέτη αυτή αφορούσε, εκτός από τους μαθητές και φοιτητές/μελλοντικούς δάσκαλους των μαθηματικών, που λογικά έπρεπε να είχαν μελετήσει αναλυτικότερα το σύστημα των πραγματικών αριθμών, ένα από τα βασικά αντικείμενα της διδασκαλίας τους στο μέλλον. Οι υποθέσεις μας για τις σημειωτικές αναπαραστάσεις και τις άλλες αιτίες δυσκολιών για την κατανόηση των άρρητων αριθμών, που αναφέραμε στην εισαγωγή του άρθρου, φάνηκε να επαληθεύονται από τα αποτελέσματα αυτού του πειράματος. Εντύπωση προκάλεσε ωστόσο η παντελής σχεδόν αδυναμία των σπουδαστών του ΤΕΙ για τη γεωμετρική κατασκευή άρρητων μεγεθών (μηκών) με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος και την τοποθέτηση τους πάνω στον πραγματικό άξονα, ένα φαινόμενο που παραπέμπει στην υποβάθμιση, εδώ και χρόνια, της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο, όπου πάντως οι συγκεκριμένες εφαρμογές ελάχιστα διδάσκονταν και παλαιότερα. Από την άλλη πλευρά, οι μαθητές του Γυμνασίου, έχοντας διδαχθεί πρόσφατα και συστηματικά τις σχετικές κατασκευές, τα κατάφεραν καλύτερα στο πεδίο αυτό. Σημειώνουμε ότι στα τρία τμήματα της Β΄ Γυμνασίου χρησιμοποιήθηκαν ειδικά φύλλα εργασίας για τη διδασκαλία των άρρητων αριθμών ανάλογα με αυτά που περιγράφονται στο βιβλίο του καθηγητή (δύο ώρες επιπλέον). Τα αποτελέσματα του πειράματος έδειξαν επίσης, ότι η ηλικία, ο πλούτος των εμπειριών και το εύρος των μαθηματικών γνώσεων του κάθε ατόμου φαίνεται να επηρεάζει σε κάποιο βαθμό την κατανόηση των αριθμών, αφού η υπεροχή των απαντήσεων των σπουδαστών των ΤΕΙ, όπως μάλλον αναμέναμε, ήταν εμφανής σε σχέση με τους μαθητές του Γυμνασίου στα περισσότερα ερωτήματα.

Τα συμπληρωθέντα ερωτηματολόγια βαθμολογήθηκαν με άριστα το 20, δίδοντας σε κάθε ερώτηση ένα αριθμό μονάδων ανάλογα με τη δυσκολία της και το μέσο χρόνο, που χρειαζόταν κατά την εκτίμηση μας για να απαντηθεί (βλ. Παράρτημα). Ο χρόνος που δόθηκε συνολικά για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου ήταν μία περίπου ώρα.

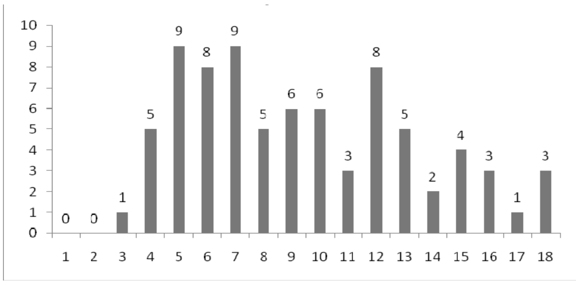
Στο θηκόγραμμα, δηλαδή το διάγραμμα της σύνοψης των πέντε σημείων [μέγιστη (x_{max}), και ελάχιστη (x_{min}) βαθμολογία, διάμεσος (Μ), πρώτο(Q_1) και τρίτο (Q_3) τεταρτημόριο], του **συνολικού δείγματος**, η διάμεσος βρίσκεται στο αριστερό μέρος του σχηματιζόμενου ορθογωνίου, πράγμα που υποδηλώνει συσσώρευση προς τις χαμηλές βαθμολογίες (βλ. Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Θηκόγραμμα του συνολικού δείγματος

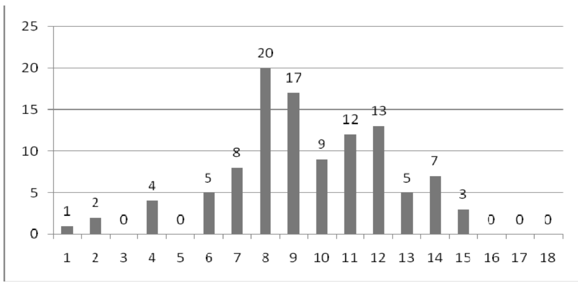
Από τους μέσους όρους που προέκυψαν, 9.41 για το Γυμνάσιο, 9.49 για το ΤΕΙ και 9.46 για το σύνολο, καταδεικνύεται ότι οι γενικές επιδόσεις είναι ανεπαρκείς σε σχέση με τις δεξιότητες και γνωστικές ικανότητες για τους πραγματικούς αριθμούς που αξιολογούνται από το ερωτηματολόγιο. Ωστόσο, και στα δύο δείγματα φαίνεται ότι ορισμένες βασικές ικανότητες υπάρχουν και ένα τουλάχιστον σημαντικό μέρος των ελλείψεων, που διαπιστώθηκαν, θα μπορούσαν να διορθωθούν.

Η αμελητέα διαφορά των μέσων όρων μεταξύ Γυμνασίου και ΤΕΙ δεν αντικατοπτρίζει την πραγματική εικόνα (σαφής υπεροχή του ΤΕΙ), αφού έχει διαμορφωθεί στο επίπεδο αυτό λόγω της πλήρους αποτυχίας των σπουδαστών του ΤΕΙ στην απάντηση της ερώτησης που αφορούσε τις γεωμετρικές κατασκευές και είχε τον υψηλότερο συντελεστή βαθμολογίας (2,5 μονάδες, πράγμα που τελικά μάλλον ήταν άδικο για τους σπουδαστές του ΤΕΙ, που, σε αντίθεση με τους μαθητές του Γυμνασίου, είχαν διδαχθεί αυτές τις κατασκευές πριν από αρκετά χρόνια), αλλά και στην υπεροχή των μαθητών του Γυμνασίου στις υψηλές βαθμολογίες (15-18).



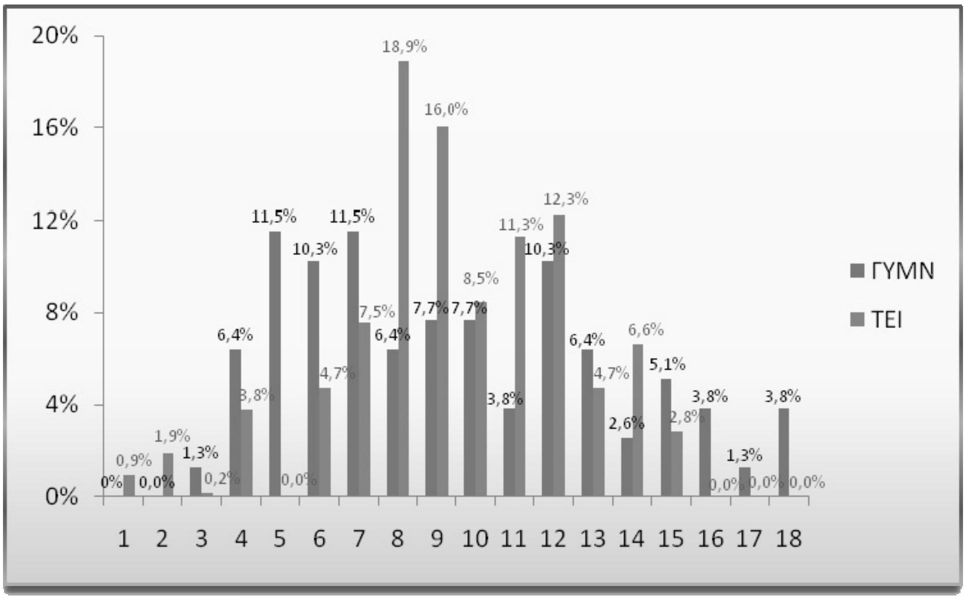
Σχήμα 2: Συχνότητες βαθμολογίας Γυμνασίου

Τα διαγράμματα των συχνοτήτων βαθμολογίας <u>χωριστά</u> για το Γυμνάσιο (βλ. Σχήμα 2) και το ΤΕΙ (βλ. Σχήμα 3), όπου στον οριζόντιο άξονα σημειώνεται η βαθμολογία και στον κατακόρυφο ο αριθμός των μαθητών/σπουδαστών, που έλαβαν τη βαθμολογία αυτή, δίδουν μια εποπτική εικόνα των αποτελεσμάτων του πειράματος μας.



Σχήμα 3: Συχνότητες βαθμολογίας ΤΕΙ

Τέλος, για να απεικονίσουμε εποπτικά και τα συμπεράσματα μας, παρουσιάζουμε στο Σχήμα 4 ένα συγκριτικό διάγραμμα των ποσοστών βαθμολογίας Γυμνασίου και ΤΕΙ.



Σχήμα 4: Συγκριτικό διάγραμμα των ποσοστών βαθμολογίας Γυμνασίου και ΤΕΙ

Μετά τη διεξαγωγή του παραπάνω πειράματος και προκειμένου να εμβαθύνουμε στις αιτίες, που ώθησαν τους μαθητές/σπουδαστές να δώσουν κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις, πήραμε επιλεκτικά από αυτούς κάποιες συνεντεύξεις (νέα, ποιοτική έρευνα). Παρακάτω παραθέτουμε ορισμένα ενδιαφέροντα αποσπάσματα από αυτές τις συνεντεύξεις, συνοδευόμενα από σύντομα σχόλια.

ΕΡΩΤ. *Γιατί απάντησες ότι ο αριθμός* $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ *είναι ρητός;*

ΑΠΑΝΤ. (Μαθήτρια) *Γιατί είναι κλάσμα.*

ΣΧΟΛ. Παρερμηνεία του ορισμού των ρητών αριθμών. Ειδικότερα η μαθήτρια εστιάζει την προσοχή της στην κλασματική παράσταση, ενώ δεν λαμβάνει υπόψη της ότι οι όροι του κλάσματος πρέπει να είναι ακέραιοι με τον παρονομαστή διάφορο του μηδενός.

ΕΡΩΤ. *Γιατί ο αριθμός* $-\sqrt{4}$ *είναι άρρητος ;*

ΑΠΑΝΤ. (Μαθητής) *Γιατί έχει τη ρίζα.*
ΣΧΟΛ. Στην περίπτωση αυτή διαπιστώνουμε ότι ο μαθητής ταυτίζει το σύμβολο της ρίζας με άρρητο αριθμό. Δε σκέπτεται ότι ο συγκεκριμένος αριθμός είναι ίσος με -2, δηλαδή είναι ρητός. Η διάκριση ανάμεσα στις διάφορες κατηγορίες αριθμών παραμένει αδιευκρίνιστη, νεφελώδης και θολή και κάθε φορά εξαρτάται από τις σημειωτικές τους αναπαραστάσεις.

ΕΡΩΤ. *Γιατί απάντησες ότι ο αριθμός* $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)$ *είναι άρρητος;*
ΑΠΑΝΤ. (Σπουδάστρια) *Κοιτάζω την άρρητη παράσταση και βλέπω ότι έχει δύο άρρητους. Αν τους πολλαπλασιάσουμε θα προκύψει πάλι άρρητος.*
ΕΡΩΤ. *Μπορείς να κάνεις τον πολλαπλασιασμό;*
ΑΠΑΝΤ. *Βέβαια* (εκτελεί τις πράξεις χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα). *Ώχ, έκαμα λάθος! Το αποτέλεσμα είναι -1.*
ΣΧΟΛ. Η σπουδάστρια από την οπτική αντίληψη των συμβόλων της τετραγωνικής ρίζας συμπεραίνει ότι ο αριθμός που παριστάνεται από την άρρητη αριθμητική παράσταση είναι άρρητος εκλαμβάνοντας τον πολλαπλασιασμό ως κλειστή πράξη στο σύνολο των άρρητων αριθμών. Θεωρούμε ότι το ζήτημα αυτό πρέπει να επισημαίνεται κατά τη διδασκαλία, ήδη από τη Γ΄ Γυμνασίου.

ΕΡΩΤ. *Ποιο είναι το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης 5:7;*
ΑΠΑΝΤ. (Σπουδαστής) *Δεν υπάρχει ακριβές πηλίκο, αφού το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι ένας άπειρος δεκαδικός αριθμός.*
ΕΡΩΤ. *Ποιο είναι το αποτέλεσμα αυτό και πώς το βρήκες;*
ΑΠΑΝΤ. *Είναι 0,71428571428… και το βρήκα με το κομπιουτεράκι.*
ΕΡΩΤ. *Μπορείς να κάνεις τη διαίρεση με το χέρι;*
ΑΠΑΝΤ. *Μάλιστα, αλλά γιατί;*
ΑΠΑΝΤ. *Θα σου εξηγήσω σε λίγο.*
Ο σπουδαστής ξεκινά πράγματι τη διαίρεση και μετά από 6 βήματα βρίσκει υπόλοιπο 5. Στο σημείο αυτό ο ερευνητής τον διακόπτει και τον ρωτά:
ΕΡΩΤ. *Μήπως εδώ έχεις να παρατηρήσεις κάτι;*
ΑΠΑΝΤ. (Μάλλον απορημένος) *Όχι.*
ΕΡΩΤ. *Το τελευταίο υπόλοιπο, που βρήκες, είναι το ίδιο με τον αρχικό διαιρετέο. Αυτό δε σημαίνει κάτι;*
ΑΠΑΝΤ. (Μετά από σκέψη) *Από εδώ και κάτω θα επαναληφθεί η ίδια διαδικασία.*
ΕΡΩΤ. *Πόσες φορές;*
ΑΠΑΝΤ. *Όσες θέλουμε* (σκέπτεται…), *άπειρες.*
ΕΡΩΤ. *Τι συνέπεια θα έχει αυτό για το αποτέλεσμα της διαίρεσης;*

ΑΠΑΝΤ. *Θα επαναλαμβάνονται διαρκώς τα δεκαδικά ψηφία 714285. Α! Τώρα θυμήθηκα. Βρίσκω περιοδικό δεκαδικό αριθμό και αυτός θα είναι το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης.*
ΕΡΩΤ. *Σωστά. Εναλλακτικά, για να αποφύγουμε όλα αυτά, δε θα μπορούσαμε να πούμε ότι το ακριβές πηλίκο είναι το κλάσμα* $\frac{5}{7}$*;*
ΑΠΑΝΤ. (Με έκπληξη) *Ε; Μάλλον ναι* (σκέπτεται ….), *σίγουρα έτσι είναι.*
ΣΧΟΛ. Παρατηρείται εμφανής δυσκολία στη διάκριση των διαφόρων σημειωτικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών. Ο σπουδαστής δεν είχε συνειδητοποιήσει ότι ακριβές πηλίκο είναι το κλάσμα $\frac{5}{7}$, ή εναλλακτικά ο περιοδικός δεκαδικός αριθμός 0,714285714285… Απλώς για το πρώτο συμφώνησε συγκαταβατικά με τον ερευνητή σε μια ερώτηση, που πρόδιδε τη σωστή απάντηση. Πρέπει πάντως εδώ να επισημάνουμε δύο πράγματα: Πρώτο ότι, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στο Δημοτικό (βλ. Κασσώτη κ. ά., 2006, σελ. 47), στα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου δε δίδεται έμφαση στο ότι ένα κλάσμα παριστάνει το ακριβές πηλίκο μιας διαίρεσης. Δεύτερο ότι ο υπολογισμός του πηλίκου μιας διαίρεσης μεταξύ ακεραίων με το κομπιουτεράκι, όπως συνήθως γίνεται σήμερα, μάλλον δε βοηθά στην αναγνώριση της περιοδικότητας του πηλίκου, ειδικά όταν το αποτέλεσμα, που προκύπτει, είναι μια αδιαφανής δεκαδική αναπαράσταση. Αυτό αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα των επιπτώσεων, στα οποία οδηγεί συχνά η αλόγιστη χρήση των υπολογιστών τσέπης. Αντίθετα εκτελώντας τη διαίρεση με το χέρι, ίσως ο μαθητής ασκηθεί καλύτερα στην προσεκτική παρατήρηση και έτσι όταν κάποια στιγμή επαναληφθεί το ίδιο υπόλοιπο, να αντιληφτεί την κανονικότητα, δηλαδή την επ' άπειρο επανάληψη της εξαψήφιας περιόδου.

ΕΡΩΤ. *Γιατί απάντησες ότι ο αριθμός 2,0013131131113111131111….* είναι περιοδικός;
ΑΠΑΝΤ. (Μαθητής) *Γιατί τα δεκαδικά του ψηφία μετά το 00 προκύπτουν με μια συγκεκριμένη διαδικασία: 13, 13<u>1</u>, 13<u>11</u>, 13<u>111</u>, 13<u>1111</u> κ.λπ.* (το εξηγεί περιγραφικά).
ΕΡΩΤ. *Και αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός είναι περιοδικός;*
ΑΠΑΝΤ. *Βέβαια!*
ΕΡΩΤ. *Από πού προκύπτει αυτό;*
Ο μαθητής μας παραπέμπει στο βιβλίο Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος κ.α. 2007, σελ. 187), όπου αναφέρεται ότι ο π δεν είναι περιοδικός αριθμός, γιατί τα άπειρα δεκαδικά του ψηφία δεν προκύπτουν με μια

συγκεκριμένη διαδικασία.
ΣΧΟΛ. Η αρχική μας εντύπωση ήταν ότι κανένας μαθητής/σπουδαστής δεν είχε παρατηρήσει την κανονικότητα, που υπάρχει στα δεκαδικά ψηφία αυτού του αριθμού! (βλ. Βόσκογλου & Κόσυβας, 2009, ερώτηση 5). Η αιτιολογία του (πολύ καλού) συγκεκριμένου μαθητή για την απάντηση του (για την οποία φαίνεται βέβαιος ότι είναι σωστή), με την παραπομπή στο σχολικό βιβλίο, δικαιώνει απόλυτα τη σχετική μας παρατήρηση στη σελ. 314 στο Βόσκογλου & Κόσυβας (2009)[1]. Επισημαίνουμε επίσης ότι στο σχολικό βιβλίο (Βλάμος κ.α. 2007, σελ. 45-52) και στην ενότητα «Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί Αριθμοί – Προβλήματα», οι άρρητοι αριθμοί ορίζονται (σωστά) αρνητικά ως μη ρητοί, χωρίς όμως να επιχειρείται η ταύτιση τους με τους ασύμμετρους δεκαδικούς αριθμούς, οι οποίοι ούτε καν ορίζονται. Απλώς δίδονται παραδείγματα προσεγγιστικού υπολογισμού τετραγωνικών ριζών, που δεν έχουν ακριβή τιμή και αναφέρεται ότι υπάρχουν και άλλοι άρρητοι αριθμοί εκτός από τις ρίζες μη τετράγωνων αριθμών, όπως π.χ. ο π. Τα ίδια περίπου επαναλαμβάνονται και στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης κ.α. 2008, σελ. 12), όπου γίνεται μια επανάληψη των πραγματικών αριθμών. Κατά συνέπεια, αν ο διδάσκων δεν κάνει τις απαραίτητες παρεμβάσεις παρακινώντας τους μαθητές του να στοχασθούν πάνω στα ζητήματα αυτά, τα παιδιά θα μείνουν (έστω και υποσυνείδητα) με την απορία: *Τι μορφή έχουν γενικά οι άρρητοι αριθμοί;* [βλ. και *κατασκευαστική άποψη για τη μάθηση* (Βόσκογλου 2010, ενότητα 3)].

ΕΡΩΤ. *Γιατί απάντησες ότι δεν υπάρχει ρητός ανάμεσα στα κλάσματα* $\frac{1}{10}$ *και* $\frac{1}{11}$, *καθώς και ανάμεσα στους δεκαδικούς 10,20 και 10,21 ;*

ΑΠΑΝΤ. (Μαθητής) *Γιατί το* $\frac{1}{11}$ *είναι το επόμενο κλάσμα του* $\frac{1}{10}$ *και ο*

[1] Προς αποφυγή κάθε παρεξήγησης πρέπει να διευκρινίσουμε ότι, κατά τη γνώμη μας, οι συγγραφείς των μαθηματικών βιβλίων των τριών τάξεων του Γυμνασίου έχουν κάνει σε γενικές γραμμές καλή προσπάθεια παρουσιάζοντας την ύλη κατά τρόπο απλό, λιτό και παραστατικό, σύμφωνα με τις σύγχρονες παιδαγωγικές και διδακτικές αντιλήψεις. Κατά συνέπεια οι παρατηρήσεις μας στο άρθρο αυτό για τα συγκεκριμένα βιβλία με κανένα τρόπο δεν πρέπει να ερμηνευθούν ως απόπειρα απόρριψης, παρά μόνο ως προσπάθεια διαλόγου για να επέλθουν πιθανά κάποιες βελτιώσεις. Γενικά πάντως, για λόγους αρχής, δεν ισχυριζόμαστε ότι οι σκέψεις μας πάνω σε θέματα διδασκαλίας των μαθηματικών είναι αναγκαστικά και οι πιο σωστές, αφού θα μπορούσαν ίσως να υποστηριχτούν και άλλες απόψεις, εξίσου καλά θεμελιωμένες.

δεκαδικός 10,21 ο επόμενος του 10,20.
ΣΧΟΛ. Ο μαθητής θεωρεί ότι, τόσο τα κλάσματα, όσο και οι δεκαδικοί αριθμοί, έχουν επόμενο αριθμό. Πρόκειται για κλασσική περίπτωση καταχρηστικής μεταφοράς ιδιότητας των φυσικών στους ρητούς αριθμούς. Θα μπορούσε να επισημανθεί σχετικά (αν και αυτό δύσκολα γίνεται κατανοητό χωρίς την έννοια της ισοδυναμίας συνόλων) ότι στο συνεχές σύνολο των πραγματικών, όποιον αριθμό ονομάσουμε «επόμενο», θα έχουμε παραλείψει τόσους αριθμούς, όσους έχει όλο το σύνολο R.

ΕΡΩΤ. *Γιατί θεώρησες την ισότητα* $\sqrt{(1-\sqrt{17})^2} = 1-\sqrt{17}$ *ως σωστή;*

ΑΠΑΝΤ. (Σπουδαστής) *Γιατί ισχύει* $\sqrt{x^2} = x$.

ΕΡΩΤ. *Δηλαδή* $\sqrt{(-3)^2} = -3$*;*

ΑΠΑΝΤ. *Όχι, η τετραγωνική ρίζα είναι πάντα θετικός αριθμός.* (Σκέπτεται…) *Με συγχωρείτε, έκαμα λάθος. Ισχύει* $\sqrt{x^2} = |x|$.

ΕΡΩΤ. *Δηλαδή* $\left|1-\sqrt{17}\right| = 1-\sqrt{17}$ *;*

ΑΠΑΝΤ. *Ναι.*

ΕΡΩΤ. *Δηλαδή* $1 > \sqrt{17}$ *;*

ΑΠΑΝΤ. *Ωχ! Απάντησα λάθος. Η ισότητα δεν είναι σωστή.*

ΣΧΟΛ. Επιπόλαιη εφαρμογή ιδιοτήτων των ριζών και του ορισμού της απόλυτης τιμής, που φαίνεται ότι δεν έχουν αφομοιωθεί πλήρως.

ΕΡΩΤ. *Γιατί απάντησες ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης* $x^2=3$ *είναι η* $x=\sqrt{3}$ *;*

ΑΠΑΝΤ. (Μαθήτρια) *Γιατί γνωρίζουμε ότι η τετραγωνική ρίζα του 3 είναι θετικός αριθμός, τέτοιος ώστε* $x^2=3$

ΕΡΩΤ. *Όμως δεν ισχύει* $(-\sqrt{3})^2=3$*;*

ΑΠΑΝΤ. *Έχετε δίκιο και το* $x=-\sqrt{3}$ *είναι επίσης λύση της εξίσωσης.*

ΣΧΟΛ. Αν και στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος κ.α. 2007) δίδονται αρκετές υποδείξεις για την επίλυση εξισώσεων της μορφής $x^2=α$ (σελ. 44: άσκηση 6, σελ. 48: άσκηση 4 κ.λπ.), ο περιορισμός ότι η τετραγωνική ρίζα πρέπει να είναι θετικός αριθμός (σελ. 41), που επαναλαμβάνεται βέβαια και στην ανασκόπηση, που γίνεται στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης κ.α. 2008, σελ. 20), φαίνεται να δημιουργεί κάποια σύγχυση. Η σύγχυση αυτή θα μπορούσε ίσως να ξεπερασθεί, αν δεχόμαστε ότι για κάθε x >0 υπάρχουν δύο τετραγωνικές ρίζες, μια θετική, που συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και η αντίθετη της $-\sqrt{x}$, που είναι βέβαια αρνητικός αριθμός. Με το συμβολισμό αυτό δε δημιουργείται πρόβλημα για τη θεώρηση της αντιστοιχίας $f(x)=\sqrt{x}$ ως συνάρτησης, που είναι το βασικό επιχείρημα των υποστηρικτών του ορισμού της ρίζας ως θετικού αριθμού, αφού δεν καταργείται το μονότιμο. Αυτό γίνεται σήμερα δεκτό σε αρκετές χώρες, όπως π.χ. η Αγγλία, ενώ γινόταν παλαιότερα και στη χώρα μας (βλ. Παπαμιχαήλ κ.α. 1981, σελ. 151). Η απόρριψη της αρνητικής ρίζας, παρότι εστιάζει στην ιδιότητα του μονότιμου συνάρτησης, είναι ένας περιορισμός, που μεταξύ άλλων δεν επιτρέπει στους μαθητές να αντιληφθούν τις ρίζες ως μια διαδικασία αντίστροφη της ύψωσης σε δύναμη (Βουγιουκλής & Ανταμπούφης, 2007). Θεωρούμε επίσης ότι είναι αφύσικο να δεχόμαστε, εξ αιτίας αυτού του περιορισμού, ότι η $\sqrt[3]{-8}$ δεν υπάρχει, τη στιγμή που $(-2)^3=-8$ (βλ. Ανδρεαδάκης κ.α. 2007, σελ. 44-45). Αυτό αργότερα μας υποχρεώνει να δεχθούμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[3]{x}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών αριθμών, πράγμα που, διαισθητικά τουλάχιστο, δε μπορεί να γίνει εύκολα αποδεκτό. Πάντως, από τη στιγμή που στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών τετραγωνική ρίζα ορίζεται ως μη αρνητικός αριθμός, ο διδάσκων θα ήταν ίσως καλύτερα να τονίζει το λόγο υιοθέτησης του ορισμού αυτού και όχι τη μηχανική χρήση του.

3. Μέθοδοι κατασκευής του ***R***

Για την καλύτερη τεκμηρίωση των όσων θα αναπτύξουμε στη συνέχεια κρίνουμε σκόπιμο να περιγράψουμε συνοπτικά τις γνωστές μεθόδους κατασκευής του συνόλου ***R*** των πραγματικών αριθμών[2].

Κατ' αρχήν οι μέθοδοι, με τις οποίες το σύνολο ***Q*** των ρητών αριθμών μπορεί να επεκταθεί στο ***R*** περιλαμβάνουν:

- Την αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών ως απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών (σύμμετροι και ασύμμετροι).
- Τη μέθοδο των *τομών (cuts) του Dedekind*.
- Τη μέθοδο των *ακολουθιών (sequences) του Cauchy*.

Με την πρώτη από τις παραπάνω μεθόδους, που, όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, είναι και η μόνη, που προσφέρεται για την παρουσίαση των πραγματικών αριθμών στο σχολείο (Γυμνάσιο και Λύκειο), θα ασχοληθούμε αναλυτικά στην επόμενη ενότητα. Εδώ απλώς,

[2] Αυτό εξάλλου ενισχύεται και από την πεποίθηση μας ότι η σφαιρική αντίληψη ενός γνωστικού αντικειμένου βοηθά στην αποτελεσματική διδασκαλία του, ακόμα κι αν για αυτήν δεν απαιτούνται όλες οι σχετικές γνώσεις.

αφού πρώτα περιγράψουμε τη μέθοδο των τομών του Dedekind, θα σκιαγραφήσουμε τον τρόπο συναγωγής από τις τομές της *αρχής του κιβωτισμού*, η οποία «δικαιολογεί» θεωρητικά τον προσεγγιστικό τρόπο γραφής κάθε πραγματικού ως απειροψήφιου δεκαδικού αριθμού.

Υπενθυμίζουμε λοιπόν, ότι μια τομή Dedekind (ή σύντομα τομή) ορίζεται ως ένα διατεταγμένο ζεύγος (Α, Β) δύο διάφορων του κενού υποσυνόλων Α και Β του $\boldsymbol{Q}$, τέτοιων ώστε:

$$A \cup B = \boldsymbol{Q},\ A \cap B = \Phi \quad \text{και} \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B \Rightarrow a < b$$

Είναι γνωστό ότι για κάθε τομή (Α, Β) υπάρχει το πολύ ένας ρητός q τέτοιος ώστε $q \geq a$, $\forall a \in A$ και $q \leq b$, $\forall b \in B$ και ότι αυτό συμβαίνει, αν και μόνο αν το Α έχει μέγιστο, ή το Β έχει ελάχιστο στοιχείο (βλ. Αναστασιάδης 1967, Θεωρήματα 2 και 3, σελ. 23-25). Σ' αυτή την περίπτωση η (Α, Β) ονομάζεται *ρητή τομή*.

Αν σε μία ρητή τομή το Β έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το q, θεωρούμε μια νέα τομή (Α΄, Β΄), που προκύπτει από την προηγούμενη, αν αφαιρέσουμε το από το Β το q και το προσθέσουμε στο Α. Στη νέα αυτή τομή το Α΄ έχει ως μέγιστο στοιχείο το q. Μπορούμε κατά συνέπεια να θεωρούμε ως ρητές τομές μόνο εκείνες στις οποίες το Α έχει μέγιστο. Με τον τρόπο αυτό ορίζεται μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των ρητών τομών και των ρητών αριθμών.

Υπάρχουν όμως και τομές, που δεν είναι ρητές. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τα σύνολα

$$B=\{x \in \boldsymbol{Q}: x>0,\ x^2>2\} \text{ και } A=\boldsymbol{Q}-B,$$

μπορεί να αποδειχθεί ότι το (Α, Β) αποτελεί μια τομή, όπου το Α δεν έχει μέγιστο και το Β δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Αυτό σημαίνει ότι $\forall x \in A$, υπάρχει πάντοτε $y \in A$ με $y>x$ και ότι $\forall x \in B$, υπάρχει πάντοτε $y \in B$ με $y<x$. Γίνεται επομένως φανερό ότι, αν θεωρήσουμε ένα νέο αριθμό a, τέτοιον ώστε $a^2=2$, μπορούμε να τον προσεγγίσουμε όσο θέλουμε, είτε από αριστερά, είτε από δεξιά με ρητούς αριθμούς. Τομές όπως η παραπάνω ονομάζονται *άρρητες τομές.*

Το άθροισμα $(A_1, B_1) + (A_2, B_2)$ δύο τομών ορίζεται ως η τομή (Α, Β), τέτοια ώστε $\forall b \in B$ μπορούμε να γράψουμε $b=b_1+b_2$, με $b_1 \in B_1$ και $b_2 \in B_2$, ενώ $A=\{q \in \boldsymbol{Q}: q<b, \forall b \in B\}$.
Μια τομή (Α, Β) θα ονομάζεται *θετική*, όταν το Α περιέχει τουλάχιστον ένα θετικό ρητό αριθμό. Το γινόμενο (A_1, B_1) x (A_2, B_2) δύο τομών, από τις οποίες η μια τουλάχιστον είναι θετική, ορίζεται ως η τομή (Α, Β), τέτοια ώστε $\forall b_1 \in B$ να μπορούμε να γράψουμε $b=b_1b_2$, με $b_1 \in B_1$ και $b_2 \in B_2$,

ενώ A={$q \in \mathbf{Q}$: q<b, $\forall$ $b \in B$}.

Θα λέμε τώρα ότι η τομή (A_1, B_1) είναι *ισοδύναμη* της (A_2, B_2), όταν $\forall$ $a_1 \in A_1$ ισχύει $a_1 \leq b_2$ για όλα τα $b_2 \in B$ και $\forall$ $a_2 \in A_2$ ισχύει $a_2 \leq b_1$ για όλα τα $b_1 \in B_1$.

Συμβολίζουμε με F το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας των τομών Dedekind. Τότε, αν το x είναι η κλάση της τομής (A_1, B_1) και το y η κλάση της τομής (A_2, B_2), το άθροισμα x+y ορίζεται ως η κλάση της τομής (A_1, B_1) + (A_2, B_2). Επίσης, αν τουλάχιστο ένα από τα x και y περιέχει μια θετική τομή (οπότε και ονομάζεται θετική κλάση), τότε το γινόμενο x.y ορίζεται ως η κλάση της τομής (A_1, B_1) x (A_2, B_2). Τέλος, αν και το x και το y είναι αρνητικά, τότε το x.y ορίζεται ως το γινόμενο (-x).(-y), ενώ, αν τουλάχιστον ένα από x και y είναι 0, τότε το x.y ορίζεται ίσο με 0.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι οι "+" και "x" είναι πράξεις καλά ορισμένες στο F, δηλαδή ανεξάρτητες από την επιλογή των αντιπροσώπων των αντίστοιχων κλάσεων και ότι το σύνολο F εφοδιασμένο με τις πράξεις αυτές αποτελεί σώμα.

Το σώμα αυτό ορίζεται (κάτω από ισομορφισμό) ως το σώμα ***R*** των πραγματικών αριθμών.

Θα ονομάζουμε τώρα *κιβωτισμό* μια ακολουθία $J_n=[a_n,b_n]$ κλειστών διαστημάτων πραγματικών αριθμών, τέτοιων ώστε κάθε διάστημα να περιέχει όλα τα επόμενα του και επίσης η ακολουθία (b_n- a_n) των μηκών τους να είναι μηδενική.

Γίνεται αμέσως φανερό ότι, αν a_n είναι το αριστερό άκρο (κατώτερο πέρας) ενός διαστήματος του κιβωτισμού J_n, τότε τα σύνολα A={$r \in \boldsymbol{R}$: $r \leq a_n$} και B= ***R***-A ορίζουν μια τομή Dedekind. Αποδεικνύεται τότε ότι, αν *s* είναι ο πραγματικός αριθμός, που αντιστοιχεί στην τομή αυτή, ισχύει $a_n \leq s \leq b_n$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς n (βλ. Αναστασιάδης 1967, Θεώρημα 10, σελ. 44). Η πρόταση αυτή, που είναι γνωστή ως *αρχή του κιβωτισμού* μας επιτρέπει να αντιστοιχήσουμε σε κάθε πραγματικό αριθμό α έναν κιβωτισμό. Πράγματι, είναι φανερό ότι τα κλειστά διαστήματα, που ορίζονται από τις διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις του α αποτελούν έναν κιβωτισμό και σύμφωνα με την προηγούμενη αρχή ο α είναι ο <u>μοναδικός</u> πραγματικός αριθμός, που ανήκει σε όλα αυτά τα διαστήματα. Για παράδειγμα, επειδή $1<\sqrt{2}<2$, $1.4<\sqrt{2}<1.5$, $1.41<\sqrt{2}<1.42$, $1.414<\sqrt{2}<1.415$, $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$, $1.41421<\sqrt{2}<1.41422$, ..., ο πραγματικός αριθμός $\alpha=\sqrt{2}$ αντιστοιχεί στον κιβωτισμό: [1, 2], [1.4, 1.5], [1.41, 1.42],
[1.414, 1.415], [1,4142, 1,4143], [1.41421, 1.41422], …….. .

Για την τρίτη μέθοδο κατασκευής του ***R*** υπενθυμίζουμε ότι μια ακολουθία (a_n) ρητών αριθμών ονομάζεται ακολουθία του *Cauchy*, αν

$$\forall e \in \mathbf{Q},\ e>0,\ \exists n_o \in \mathbf{N}\colon\ \forall n,m \geq n_o \Rightarrow |a_n - a_m| < e.$$

Στο σύνολο Μ όλων των ακολουθιών του Cauchy ορίζουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με τον προφανή τρόπο. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το Μ εφοδιασμένο με τις πράξεις αυτές είναι ένας δακτύλιος και ότι το σύνολο Ι όλων των μηδενικών ακολουθιών είναι ένα ιδεώδες του Μ. Αποδεικνύεται επίσης ότι ο *δακτύλιος - πηλίκο* Μ modulo I (*factor ring*: βλ. Lang 1971, σελ. 59), που τον συμβολίζουμε με Μ/Ι, είναι σώμα. Αν μάλιστα σε κάθε ρητό αριθμό q αντιστοιχήσουμε την κλάση του Μ/Ι, στην οποία ανήκει η σταθερή ακολουθία a_n=q, γίνεται φανερό ότι το σώμα ***Q*** των ρητών αριθμών αποτελεί (κάτω από ισομορφισμό) υπόσωμα του Μ/Ι. Το σώμα Μ/Ι ορίζεται, πάντα κάτω από ισομορφισμό, ως το σώμα ***R*** των πραγματικών αριθμών. Από καθαρά μαθηματική άποψη ο παραπάνω αποτελεί αναμφίβολα ένα πολύ κομψό ορισμό για το ***R***. Η πείρα όμως μας διδάσκει ότι ακόμη και φοιτητές των θετικών επιστημών δυσκολεύονται να προσεγγίσουν με τον τρόπο αυτό τους πραγματικούς αριθμούς. Οι αιτίες για τη δυσκολία αυτή πρέπει ίσως να αναζητηθούν στην έννοια του ορίου, που υπεισέρχεται στην παραπάνω κατασκευή και συχνά δημιουργεί προβλήματα κατανόησης και σε κάποιες περισσότερο προχωρημένες έννοιες, που απαιτούνται από την αφηρημένη Άλγεβρα.

Είναι επίσης γνωστές οι παρακάτω δύο μέθοδοι για την <u>απευθείας</u> κατασκευή του ***R*** (χωρίς δηλαδή τη μεσολάβηση του ***Q***):

- Ο ορισμός του ***R*** ως του σώματος όλων των κλάσεων ισοδυναμίας των *σχεδόν γραμμικών συναρτήσεων (almost linear functions)* στο σύνολο ***Z*** των ακέραιων αριθμών.
- Ο αξιωματικός ορισμός του ***R*** ως του μοναδικού (κάτω από ισομορφισμό) *πλήρους διατεταγμένου σώματος (complete ordered field).*

Μια συνάρτηση f: $\boldsymbol{Z} \rightarrow \boldsymbol{Z}$ ονομάζεται σχεδόν γραμμική, αν το σύνολο των αριθμών |f(m+n)-f(m)-f(n)|, m, n$\in$***Z*** είναι φραγμένο. Ακόμη δύο σχεδόν γραμμικές συναρτήσεις f και g λέγονται *ισοδύναμες*, αν το σύνολο των αριθμών |f(n)-g(n)| είναι φραγμένο. Ένας πραγματικός αριθμός a ορίζεται ως μια κλάση ισοδυναμίας σχεδόν γραμμικών συναρτήσεων, ενώ το άθροισμα και το γινόμενο των πραγματικών αριθμών, που αντιστοιχούν στις σχεδόν γραμμικές συναρτήσεις f και g ορίζονται ως οι κλάσεις ισοδυναμίας των σχεδόν γραμμικών συναρτήσεων f + g and f o g (σύνθεση συναρτήσεων) αντίστοιχα. Η κατασκευή αυτή των πραγματικών αριθμών, που δεν είναι πολύ γνωστή, οφείλεται στον Steve Schanuel (Αρτεμιάδης 2000, σελ. 486-487).

Τέλος για την αξιωματική κατασκευή του ***R*** αναφέρουμε ότι ένα διατεταγμένο σώμα Κ ονομάζεται *πλήρες* (*complete)*, αν κάθε διάφορο του κενού υποσύνολο του, που είναι φραγμένο προς τα άνω, έχει ανώτερο πέρας (supremum) στο Κ. Το ***Q*** για παράδειγμα δεν είναι πλήρες σώμα, αφού το ανώτερο πέρας του συνόλου $S=\{q\in \boldsymbol{Q}: q^2<2\}$ είναι το $\sqrt{2}$, που δεν είναι ρητός αριθμός.

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα (π.χ. το σώμα των τομών Dedekind) και ότι δύο τέτοια σώματα είναι πάντοτε ισόμορφα (βλ. Bagget 2006: Chapter 1, Theorems 1.1 και 1.2 και Appendix, ή Mac Lane & Birkoff 1988). Έτσι το ***R*** ορίζεται ως το μοναδικό (κάτω από ισομορφισμό) πλήρες διατεταγμένο σώμα. Σημειώνουμε πάντως ότι, αν κάποιος για την απόδειξη της ύπαρξης πλήρους διατεταγμένου σώματος χρησιμοποιήσει το σώμα των τομών Dedekind, π.χ. βλ. (Bagget 2006, Appendix), τότε αυτή η αξιωματική κατασκευή του ***R*** δεν είναι στην ουσία ανεξάρτητη του ***Q***. Από τη σύντομη αυτή περιγραφή της αξιωματικής του κατασκευής προκύπτει ότι στο ***R*** «θυσιάστηκε» η ιδιότητα της καλής γραφής των αριθμών, που ισχύει για τους ρητούς αριθμούς, προκειμένου να εξασφαλισθεί η ιδιότητα της ύπαρξης του supremum.

4. Η διδασκαλία των πραγματικών αριθμών στο σχολείο

Από την παρουσίαση των γνωστών μεθόδων κατασκευής του ***R***, που προηγήθηκε και με βάση τη διδακτέα ύλη των σχολικών μαθηματικών, αλλά και τις περιορισμένες γι΄ αυτή την ηλικία δυνατότητες των μαθητών να οικειοποιηθούν λεπτές και αφηρημένες έννοιες, εύκολα διαπιστώνει κανείς, ότι η μοναδική μέθοδος, που προσφέρεται για την παρουσίαση των πραγματικών αριθμών στο σχολείο (Γυμνάσιο και Λύκειο), είναι η κλασική μέθοδος της αναπαράσταση τους ως απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών.

Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση, όπου το ***R*** ορίζεται ως τα σύνολο όλων των σύμμετρων και ασύμμετρων δεκαδικών αριθμών, ασύμμετρος (ή άρρητος) είναι κάθε δεκαδικός αριθμός, ο οποίος έχει άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, που δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά με την ίδια συγκεκριμένη σειρά. Δηλαδή κάθε άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα της μορφής:

$$a_1a_2...a_\mu, \kappa_1\kappa_2...\kappa_\nu..., \qquad a_i, \kappa_j \in \{0,1,...,9\},\ i=1,2,\ ...,\ \mu,\ \ j=1,2,\ ...,\nu...$$

όπου $a_1a_2...a_\mu$ είναι το ακέραιο μέρος και κ_1, κ_2, …, κ_ν,… είναι τα ψηφία του δεκαδικού μέρους, τα οποία δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά με την ίδια συγκεκριμένη σειρά.

Για παράδειγμα, ο άρρητος αριθμός $\sqrt{2}$ γράφεται $\sqrt{2} = 1,4142135...$ και κατασκευάζεται ως το όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών, που συμπίπτει με την ακολουθία των πεπερασμένων δεκαδικών του προσεγγίσεων (βλ παράδειγμα για την αρχή του κιβωτισμού στην ενότητα 3), η οποία «τείνει» στο $\sqrt{2}$. Οι τελίτσες δείχνουν ότι η ακολουθία των δεκαδικών ψηφίων συνεχίζεται. Εξυπακούεται βέβαια ότι οι έννοιες της ακολουθίας (διαδοχής) ρητών αριθμών και του ορίου της (δηλαδή το τι σημαίνει το «τείνει») θα παρουσιασθούν στους μαθητές και θα ερμηνευθούν μέσα από ανάλογα με την περίπτωση του $\sqrt{2}$.παραδείγματα. Το γεγονός ότι δεχόμαστε την έννοια του απειροψήφιου δεκαδικού αριθμού, δε σημαίνει ότι μπορούμε να δούμε γραμμένα όλα τα ψηφία της συμβολικής του αναπαράστασης. Γνωρίζουμε μόνο τα ψηφία της εκάστοτε δεκαδικής του προσέγγισης.

Σημειώνουμε ότι παρόμοια παρουσίαση των πραγματικών αριθμών γινόταν και στα σχολικά προγράμματα των δεκαετιών του 60 και 70 (π.χ. βλ. Βαβαλέτσκος & Ταμβακλής 1969, Κεφ. ΙΙΙ, σελ. 43-63). Με την εισαγωγή των «μοντέρνων μαθηματικών» στη σχολική εκπαίδευση , επιχειρήθηκε η παρουσίαση των πραγματικών αριθμών στο Λύκειο ως διατεταγμένου σώματος, όπου η αρχή του κιβωτισμού αποτελούσε ένα κομβικό αξίωμα (βλ. Βαρουχάκης κ.α, 1984, Κεφάλαια 2, 3 και 5). Οι μαθητές ωστόσο ήταν αδύνατο να πειστούν ότι κάθε ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων οδηγεί στην κατασκευή <u>ενός και μοναδικού</u> πραγματικού αριθμού. Η αυστηρή αυτή αξιωματική προσέγγιση, αποσυνδεμένη από τις τομές Dedekind (κάτι, που έτσι κι' αλλιώς δε μπορεί να γίνει στο Λύκειο), δεν προσέφερε τίποτε περισσότερο στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών σε σύγκριση με τις απειροψήφιες δεκαδικές τους αναπαραστάσεις. Μάλιστα, όπως ίσως θα θυμούνται οι παλαιότεροι, προκάλεσε στους μαθητές σύγχυση.

Για την επιτυχή παρουσίαση των πραγματικών αριθμών ως απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών (όπου οι τερματιζόμενοι δεκαδικοί με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων θεωρούνται ως απειροψήφιοι με περίοδο το 0 ή το 9, π.χ. 2,5=2,500…=2,499…) στο σχολείο είναι απαραίτητες δύο προϋποθέσεις:

- Πρώτο, οι μαθητές θα πρέπει με βάση και τις προηγούμενες εμπειρίες τους να συνειδητοποιήσουν ότι οι περιοδικοί δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι οι <u>ίδιοι</u> αριθμοί γραμμένοι με διαφορετικό τρόπο.
- Δεύτερο, ο ορισμός των ασύμμετρων (μη περιοδικών) δεκαδικών

αριθμών πρέπει να δοθεί με σαφή τρόπο, ώστε να μην επιδέχεται παρερμηνείες (όπως η περίπτωση με το π, που αναφέραμε στην ενότητα 2). Ένας δεκαδικός είναι ασύμμετρος όχι γιατί τα δεκαδικά του ψηφία δεν προκύπτουν με μια συγκεκριμένη διαδικασία (που, όπως είδαμε στο σχετικό παράδειγμα της ενότητας 2, μπορεί και να προκύπτουν!), αλλά επειδή δεν έχει περίοδο, δηλαδή τα δεκαδικά του ψηφία δεν επαναλαμβάνονται με την ίδια συγκεκριμένη σειρά.

Η πρώτη προϋπόθεση διατυπωμένη με άλλους λόγους σημαίνει ότι οι μαθητές θα πρέπει να έχουν κατανοήσει την ισοδυναμία των δύο ορισμών των άρρητων αριθμών, που δίδονται στο σχολείο: Αφενός μεν, όπως προκύπτει και από την ετυμολογία της λέξης, ως *μη ρητών αριθμών* (δηλαδή δεν μπορούν να γραφούν ως κλάσματα της μορφής $\frac{\mu}{\nu}$, με $\mu, \nu \in \boldsymbol{Z}$ και $\nu \neq 0$) και αφ' ετέρου ως *ασύμμετρων δεκαδικών αριθμών,* κάτι που δεν τονίζεται σήμερα επαρκώς ούτε στο Γυμνάσιο ούτε στο Λύκειο.

Οι μαθητές θα πρέπει να αντιληφθούν ξεκάθαρα, ότι σε κάθε κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$, με $\mu, \nu \in Z$ και $\nu \neq 0$ η διαίρεση του αριθμητή δια του παρονομαστή οδηγεί **πάντοτε** σε σύμμετρο δεκαδικό αριθμό. Η πιθανότητα ο δεκαδικός αυτός να είναι τερματιζόμενος είναι αρκετά μικρή, αφού ένα κλάσμα, του οποίου ο παρονομαστής δεν είναι γινόμενο δυνάμεων του 2 ή του 5, δε μπορεί να γραφεί ως τερματιζόμενος δεκαδικός. Στην περίπτωση ενός μη τερματιζόμενου δεκαδικού θα πρέπει να κατανοήσουν ότι επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης $\mu : \nu$ είναι μικρότερο του ν, κατά την εκτέλεση της διαίρεσης και ύστερα από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων θα επανεμφανιστεί κάποια στιγμή το ίδιο υπόλοιπο. Αυτό όμως σημαίνει, ότι από το σημείο αυτό και μετά θα επαναλαμβάνεται περιοδικά και επ' άπειρο η ίδια διαδικασία.

Αντίστροφα θα πρέπει οι μαθητές να είναι σε θέση να μετατρέπουν έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό (είτε απλό, είτε μικτό) σε κλάσμα. Μια τυποποιημένη μέθοδος μετατροπής ενός απλού απειροψήφιου περιοδικού δεκαδικού αριθμού σε κλάσμα περιγράφεται στο σχολικό βιβλίο Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου (Βανδουλάκης κ.α. 2008, σελ. 136). Ωστόσο οι μικτοί περιοδικοί αριθμοί δεν ορίζονται και μόνο δύο άλυτα παραδείγματα αναφέρονται σε αυτούς (Ασκήσεις 2δ,ε και 3γ, σελ. 136), τα οποία παρατίθενται μετά το συμπέρασμα ότι κάθε περιοδικός δεκαδικός μπορεί να γραφεί ως κλάσμα. Θα μπορούσε βέβαια ίσως κάποιος να ισχυρισθεί ότι οι απαιτήσεις αυτές είναι υπερβολικές για το επίπεδο της Α΄

Γυμνασίου. Δε θα συμφωνήσουμε με την άποψη αυτή, δεδομένου ότι, τα όσα αναφέραμε διδάσκονταν στην τάξη αυτή πολλά χρόνια πριν (βλ. Κατσαρλίνος και Μπαϊμπάς, 1971), όταν στο Δημοτικό τα μαθηματικά, που μάθαιναν τα παιδιά, ήταν αρκετά λιγότερα από σήμερα. Ωστόσο, σε κάθε περίπτωση έχουμε την άποψη ότι είναι προτιμότερο να «ζορίζουμε» κάπως τους μαθητές θέτοντας πρόσφορες καταστάσεις εικασίας και προβληματισμού (Κόσυβας, 2008), παρά να αφήσουμε ανεξέταστες έννοιες θεμελιώδους μαθηματικής βαρύτητας, τις οποίες αν προσπεράσουν είναι πιθανό να δημιουργηθούν διαισθητικά βιώματα, που δύσκολα ξεριζώνονται (βλ. παρακάτω σχετικά με τις διαστάσεις τη γνώσης). Κατά συνέπεια κάποιες διευκρινίσεις/συμπληρώσεις και στο σημείο αυτό είναι απαραίτητες από τον διδάσκοντα.

Γενικά, αν με *A* συμβολίσουμε το ακέραιο τμήμα, με *M* το μη περιοδικό τμήμα και με *Π* την περίοδο ενός σύμμετρου δεκαδικού αριθμού *X*, για τη μετατροπή του σε κλάσμα ισχύει ο ακόλουθος τύπος:

$$X = \frac{AM\Pi - AM}{99...00...}$$

όπου στον παρονομαστή γράφουμε τόσα "εννιάρια", όσα είναι τα ψηφία της περιόδου και τόσα "μηδενικά", όσα είναι τα ψηφία του μη περιοδικού τμήματος (στο οποίο προφανώς δε συμπεριλαμβάνεται το ακέραιο μέρος). Ό,τι δεν υφίσταται για το Χ (το Α, ή το Μ και τα αντίστοιχα μηδενικά στον παρονομαστή, ή και τα δύο) διαγράφεται από τον τύπο. Διευκρινίζουμε ότι οι εκφράσεις ΑΜΠ και ΑΜ δε συμβολίζουν γινόμενα, αλλά διαδοχική γραφή αριθμών. Έτσι π.χ. βρίσκουμε:

$$0.333.... = \frac{3}{9}, \qquad 1.333... = \frac{13-1}{9} = \frac{4}{3}, \qquad 2.384242... = \frac{23842-238}{9900} = \frac{23604}{9900}$$

Βεβαίως ο ετοιμοπαράδοτος τύπος δεν προσφέρει κάτι περισσότερο στην καλύτερη κατανόηση των ρητών αριθμών. Ωστόσο μετά την περιγραφή της μεθόδου μετατροπής περιοδικού αριθμού σε κλάσμα με την αφαίρεση κατά μέλη των κατάλληλων εξισώσεων, θα μπορούσαν οι μαθητές να παρατηρήσουν τις ενυπάρχουσες κανονικότητες και να καταλήξουν στην προαναφερόμενη τυποποίηση, η οποία έχει κάποια αξία, κυρίως για μνημοτεχνικούς και εποπτικούς λόγους.

Είναι φανερό ότι κάθε μη τερματιζόμενος δεκαδικός αριθμός της μορφής $\kappa_0,\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_\nu\ldots\ \ldots$, με $\kappa_0 \in \boldsymbol{Z}$ και $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\nu, \ldots$ φυσικούς αριθμούς μικρότερους του 10 είναι ίσος με το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa_n}{10^n}$.

Ειδικότερα ο απλός περιοδικός αριθμός 0,κκκ…., όπου κ φυσικός αριθμός μικρότερος του 10, είναι ίσος με το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\kappa}{10^n}$, δηλαδή έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\kappa}{10^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\kappa}{10}+\frac{\kappa}{10^2}+....+\frac{\kappa}{10^n}\right)=\frac{\frac{\kappa}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\kappa}{9}$$

(άθροισμα των απείρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με λόγο το $\frac{1}{10}$), που για κ=9 δίνει 0,999….=1. Αυτά βέβαια προκύπτουν απευθείας και από τον τύπο μετατροπής περιοδικού αριθμού σε κλάσμα, που προαναφέραμε.

Σε σχετικό άρθρο, που δημοσιεύθηκε πρόσφατα στον «Ευκλείδη Β΄» (Κυριακόπουλος, 2010), ο συγγραφέας θεωρεί ότι ο συμβολισμός $\kappa_0,\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_\nu\ldots$ …, που αναφέραμε παραπάνω, παριστάνει τη **σειρά** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\kappa_n}{10^n}$ και **όχι** τον αντίστοιχο δεκαδικό αριθμό, που έχουμε συνηθίσει να παριστάνουμε με τον τρόπο αυτό. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με το συγγραφέα, όσα γράφουν τα σχολικά βιβλία σχετικά με τα σύμβολα αυτά (π.χ. Βανδουλάκης κ.α. 2008, σελ. 135-136) δεν έχουν νόημα, αν και τα αποτελέσματα στα οποία φθάνουν είναι συμβατικά σωστά, αφού οι πράξεις αυτές μπορούν να γίνουν και στις ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των αντίστοιχων σειρών. Ο καλός συνάδελφος στηρίζει τη θέση του αυτή στο γεγονός ότι, αντί να λέμε ότι μια σειρά **Σ** έχει άθροισμα α, έχει επικρατήσει να γράφουμε, συμβολικά και μόνο, **Σ**=α, χωρίς ο συμβολισμός αυτός να έχει τη γνωστή από τα μαθηματικά έννοια της ισότητας.

Για να αποφύγει βέβαια κάποιος όλα τα παραπάνω, θα μπορούσε να δεχθεί ότι ο συμβολισμός $\kappa_0,\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_\nu\ldots$ δεν παριστάνει την παραπάνω σειρά, αλλά το **άθροισμα της**, που είναι ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός. Κάνοντας ωστόσο την υπόθεση αυτή δημιουργείται και πάλι πρόβλημα στην περίπτωση, που όλα τα άπειρα δεκαδικά ψηφία ενός περιοδικού αριθμού είναι ίσα με 9. Πράγματι, γράφοντας τότε x=κ,999….., $\kappa\in\boldsymbol{Z}$ και συμβολίζοντας με [x] το ακέραιο μέρος του x, θα έχουμε x=κ+0,999…..=[x]+1, που είναι παράλογο. Με άλλους λόγους δηλαδή, αν δεχθούμε ότι ο συμβολισμός κ,9999…. παριστάνει ένα πραγματικό αριθμό x, θα πρέπει συμβατικά να δεχθούμε ότι στην περίπτωση αυτή ισχύει η ισότητα x=[x]+1, δηλαδή ότι δεν ισχύει το μονότιμο για το [x]! (βλ. και

Kalapodi 2010, όπου γίνεται μια πολύ ενδιαφέρουσα θεωρητική θεμελίωση της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών). Το καλύτερο λοιπόν ίσως θα ήταν, να μη θίγουμε καθόλου το λεπτό αυτό ζήτημα στο επίπεδο του σχολείου, επειδή μάλλον δημιουργεί σύγχυση και αποπροσανατολισμό στους μαθητές, χωρίς, κατά την άποψη μας, να συνεισφέρει στην εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών.

Όσον αφορά τώρα τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των άρρητων αριθμών, ο διδάσκων πρέπει να προβληματίζει διαρκώς τους μαθητές του (αυτό είναι πολύ σημαντικό!). Αν για παράδειγμα δοθούν οι προσεγγίσεις απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών, όπου εκ πρώτης όψεως δημιουργείται η πεποίθηση ότι ίσως πρόκειται για ασύμμετρους, δεν υπάρχει σίγουρη εγγύηση για αυτό. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τα ακόλουθα (κάθετα) ζεύγη αριθμών:

$$\begin{cases} \frac{22}{7} = \mathbf{3{,}14}285714... & \frac{144}{233} = \mathbf{0{,}6180}25... & \frac{1}{1861} = \mathbf{0{,}00053}73... \\ \pi = \mathbf{3{,}14}159265... & \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \mathbf{0{,}6180}33... & \frac{1}{\sqrt{3499149}} = \mathbf{0{,}00053}45... \end{cases}$$

Στους ρητούς αριθμούς της πρώτης γραμμής η ακολουθία των επαναλαμβανόμενων ψηφίων (περίοδος) κατά σειρά έχει μήκος 6, 232 και 1860 ψηφία, ενώ οι άρρητοι δεκαδικοί αριθμοί της δεύτερης γραμμής δεν έχουν συγκεκριμένη κανονικότητα, όπως συμβαίνει με τους δυο άρρητους αριθμούς με διαφανή παράσταση, που δώσαμε ως παραδείγματα στην ενότητα 1. Καθώς ένα μεγάλο μέρος των ψηφίων όλων των παραπάνω αριθμών παραμένει στην αφάνεια, αν δοθεί μόνο η δεκαδική τους αναπαράσταση, δε μπορεί κάποιος να είναι σίγουρος, αν είναι ρητοί ή άρρητοι. Πράγματι, οι παραπάνω αριθμοί μπορεί κατά κάθετα ζεύγη να ταυτίζονται σε μερικά ψηφία, αλλά τα υπόλοιπα ψηφία τους είναι αδιαφανή. Έτσι το εκάστοτε είδος τους εξαρτάται από τη συμπλήρωση της δεκαδικής τους αναπαράστασης με το άδηλο μέρος της. Η τροπή ενός κλάσματος σε δεκαδικό μπορεί να καταλήξει σε μια μακροσκελή και επίπονη διαίρεση, αν το πηλίκο, που προκύπτει, δεν είναι τερματιζόμενος δεκαδικός, ή, στην περίπτωση που είναι περιοδικός, αν δεν αποκαλυφθεί γρήγορα ή περίοδός του. Παρατηρούμε επίσης ότι, αν οι παραπάνω αριθμοί διακοπούν στα ψηφία, που είναι σε έντονη γραφή, τότε παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{cases} \mathbf{3{,}14}... & \mathbf{0{,}6180}... & \mathbf{0{,}00053}... \\ \mathbf{3{,}14}... & \mathbf{0{,}6180}... & \mathbf{0{,}00053}... \end{cases}$$

Τώρα οι σημειωτικές τους αναπαραστάσεις κατά ζεύγη ταυτίζονται με συνέπεια να υπάρχει αδυναμία κατάταξής τους σε ρητούς ή άρρητους.

Για τους μαθητές γενικά *είναι δύσκολο να κατανοήσουν έναν αριθμό, όταν δε γνωρίζουν έναν σαφή και ξεκάθαρο τρόπο γραφής του.* Για να δώσουμε μια θεωρητική ερμηνεία για το θέμα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο των *διαστάσεων της γνώσης (dimensions of knowledge)*, που προτάθηκε από τους Tirosh et al. (1998) για τη μελέτη της κατανόησης των ρητών αριθμών. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό η γνώση στα μαθηματικά έχει τις παρακάτω διαστάσεις:

- *Αλγοριθμική,* που αφορά την ικανότητα του ατόμου να εφαρμόζει κανόνες και διαδικασίες για να ανταποκρίνεται επιτυχώς στα διαδοχικά στάδια διάφορων γνωστών καταστάσεων.
- *Τυπική (formal)*, που αφορά την ικανότητα ανάκλησης και εφαρμογής ορισμών, θεωρημάτων και των αποδείξεων τους, κυρίως για την επίλυση προβλημάτων.
- *Διαισθητική (intuitive)*, που συνίσταται από τα προαισθήματα, τις ιδέες και τις πεποιθήσεις του ατόμου για τις μαθηματικές οντότητες και περιλαμβάνει νοητικά μοντέλα αναπαράστασης τους. Τη γνώση αυτή το άτομο τείνει να αποδέχεται απευθείας επιδεικνύοντας εμπιστοσύνη προς αυτήν, για αυτό και εμφανίζει μια ψυχολογική δυσκολία για την ανατροπή της (Fischbein 1987).

Φαίνεται ότι οι άνθρωποι τείνουν να προσαρμόζουν τη θεωρητική και αλγοριθμική τους γνώση για την προώθηση των συμπερασμάτων, που προκύπτουν από τη διαισθητική τους γνώση, πράγμα που πιθανά οφείλεται στην τάση τους για λογική συνέπεια. Όταν λοιπόν τα συμπεράσματα της διαισθητικής τους γνώσης δεν είναι ξεκάθαρα και ακριβή, όπως συμβαίνει με τις αδιαφανείς αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών, είναι πολύ πιθανό να προκύψουν λάθη και παρερμηνείες. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο λάθος, που συχνά παρατηρείται, είναι η ταύτιση των αντίστοιχων πραγματικών αριθμών με μια ρητή τους προσέγγιση (π.χ. ταύτιση του π με το 3,14, ή το $\frac{22}{7}$, του $\frac{144}{233}$ με το 0,180257, όταν κάποιος κάνει τη διαίρεση 144:233 με υπολογιστή τσέπης κ.λπ.).

Τα προβλήματα κατανόησης ωστόσο αυξάνονται ακόμη περισσότερο όταν φθάσουμε στο ερώτημα: *Ποιοι αριθμοί μπορούν να γραφούν ως ασύμμετροι δεκαδικοί αριθμοί;* Το ερώτημα αυτό προκύπτει εντελώς φυσιολογικά για τον σκεπτόμενο μαθητή, με δεδομένο ότι τα κλάσματα αντιστοιχούν στους σύμμετρους δεκαδικούς. Στο Γυμνάσιο οι μαθητές διδάσκονται ότι οι τετραγωνικές ρίζες, που δεν έχουν ακριβή τιμή, μπορούν να γραφούν ως ασύμμετροι δεκαδικοί. Στο Λύκειο αργότερα μπορούν να διαπιστώσουν ότι το ίδιο συμβαίνει και με τις ρίζες οποιασδήποτε τάξης. Υπάρχουν ωστόσο και άρρητοι αριθμοί, που δεν έχουν αυτή τη μορφή και γενικότερα δεν είναι ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές (δηλαδή *αλγεβρικοί αριθμοί*). Με τον τρόπο αυτό φθάνουμε στην έννοια των *υπερβατικών αριθμών (trascendental numbers)*, για τους οποίους, πέρα από κάποια παραδείγματα, όπως το π και η βάση e των φυσικών λογαρίθμων, δεν γνωρίζουμε πολλές λεπτομέρειες. Γι’ αυτό ακριβώς το λόγο τους έχουμε παρομοιάσει σαν μια «μαύρη τρύπα» (με την αστρονομική έννοια του όρου) μέσα στο «σύμπαν» των πραγματικών αριθμών (Βόσκογλου 2011) Η ονομασία τους οφείλεται στον Euler, επειδή δεν περιγράφονται με αλγεβρικές μεθόδους, δηλαδή υπερβαίνουν την ισχύ των μεθόδων αυτών (transcendental= υπερφυσικός, μεταφυσικός).

Ο διδάσκων ωστόσο θα μπορούσε σε κάποια φάση να μιλήσει στους μαθητές του για τους αλγεβρικούς και υπερβατικούς αριθμούς, ώστε να αποκτήσουν μια ολοκληρωμένη εικόνα του «φάσματος» των πραγματικών αριθμών. Μια καλή ευκαιρία για το σκοπό αυτό δίδεται κατά την ανασκόπηση των βασικών συνόλων των αριθμών στο Λύκειο, που συνήθως προηγείται της διδασκαλίας των μιγαδικών αριθμών ή των συναρτήσεων, χωρίς να αποκλείονται αναφορές και σε προγενέστερο στάδιο. Συνήθως τα νέα είδη αριθμών εξάπτουν τη φαντασία και μαγνητίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών προκαλώντας μια παιδαγωγική ατμόσφαιρα μυστηρίου και έκπληξης (Κόσυβας, 2011β).

Θα κλείσουμε αυτή την ενότητα με κάποια σχόλια για τις *γεωμετρικές προεκτάσεις* της διδασκαλίας των πραγματικών αριθμών στο σχολείο, που τις θεωρούμε ιδιαίτερα χρήσιμες. Στο πολιτισμικό περιβάλλον των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, ακόμα και μετά την εισαγωγή των αξιωμάτων του Ευκλείδη, φαίνεται ότι το γεωμετρικό σχήμα ήταν το πλαίσιο για το ξεδίπλωμα της μαθηματικής σκέψης. Βοηθούσε στην παραγωγή εικασιών, γόνιμων μαθηματικών ιδεών και αιτιολογήσεων. Με βοηθητικές ευθείες, οπτικές ανασυνθέσεις και νέα τροποποιημένα σχήματα αρθρώνονται πειστικά αποδεικτικά επιχειρήματα και έτσι ο μαθηματικός συλλογισμός γίνεται πληρέστερος.

Όσον αφορά τους πραγματικούς αριθμούς, σύμφωνα με την παράδοση ο Ίππασος ο Μεταπόντιος το 450 περίπου π. Χ. ανακάλυψε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος τον άρρητο $\sqrt{2}$ (πρώτο ιστορικά) ως το μήκος της διαγωνίου τετραγώνου με πλευρά τη μονάδα των μηκών, ενώ μετά αποκαλύφθηκαν και άλλοι. Στη συνέχεια ο Εύδοξος ο Κνίδιος (407-354 π.Χ.) θεμελίωσε ένα μεγάλο μέρος της μελέτης των άρρητων αριθμών βγάζοντας τους Πυθαγόρειους από την κρίση, που είχε ξεσπάσει στις τάξεις τους μετά τη διαπίστωση της ύπαρξης ασύμμετρων γεωμετρικών μεγεθών, που επέφερε θανάσιμο πλήγμα στην κοσμοθεωρία τους ότι τα πάντα εξαρτώνται από τους φυσικούς αριθμούς (και κατά συνέπεια ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ταυτίζεται πάντα με το λόγο δύο φυσικών αριθμών). Σημειώνουμε ότι ο ορισμός των τομών του Dedekind (βλ. ενότητα 3) αποτελεί στην ουσία μετεξέλιξη του ορισμού της αναλογίας γεωμετρικών μεγεθών του Ευδόξου. Πράγματι, αν α και β είναι δύο λόγοι γεωμετρικών μεγεθών, τότε κατά τον Εύδοξο : «*α=β τότε και μόνο τότε, όταν το σύνολο όλων των ρητών, που είναι μικρότεροι του α, συμπίπτει με το σύνολο όλων των ρητών, που είναι μικρότεροι του β και όταν το ίδιο συμβαίνει με τα σύνολα των ρητών, που είναι μεγαλύτεροι του α και β αντίστοιχα*» (Αρτεμιάδης 2000, σελ. 485). Ο διδάσκων, ιδιαίτερα στο Λύκειο, μπορεί να αξιοποιήσει όλο αυτό το ιστορικό υλικό για την πληρέστερη κατανόηση των πραγματικών αριθμών από τους μαθητές (π.χ. βλ. Βλάμος κ.α. 2007, Κεφάλαιο 2) φθάνοντας, αν βέβαια οι συνθήκες της τάξης του το επιτρέπουν και το κρίνει και ο ίδιος σκόπιμο, με τη βοήθεια του παραπάνω ορισμού του Ευδόξου σε μια πρώτη πρακτική περιγραφή των ιδεών, που κρύβονται πίσω από τις τομές Dedekind (Τασσόπουλος 2008).

Οι περισσότεροι βέβαια άρρητοι αριθμοί, όπως π.χ. οι $\sqrt[3]{2}$, π, e κλπ., αντιπροσωπεύουν μήκη γεωμετρικών μεγεθών, που δεν είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη. Ωστόσο αντιστοιχούμε και στους αριθμούς αυτούς σημεία του πραγματικού άξονα με ένα αξιωματικό, ή αν προτιμάτε προσεγγιστικό τρόπο (στην ουσία πρόκειται για την αρχή του κιβωτισμού), που συνήθως δε γίνεται ξεκάθαρα αντιληπτός από τους μαθητές. Στο 27^{o} Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ στη Χαλκίδα (2010), έμπειρη συνάδελφος, που διδάσκει για πολλά χρόνια στο Αρσάκειο Γυμνάσιο, μας διηγιόταν τη δύσκολη θέση, στην οποία βρέθηκε, όταν δέχθηκε από μαθητή της την ακόλουθη ερώτηση: *«Υπάρχουν κύκλοι, των οποίων το μήκος της περιφέρειας είναι ρητός αριθμός; Δε συμβαίνει π.χ. αυτό με τον κύκλο, που έχει ακτίνα ίση με* $\frac{1}{\pi}$*; »*. Η παρατήρηση του μαθητή είναι θεωρητικά σωστή. Το πρόβλημα, που προκύπτει ωστόσο, είναι ότι το μήκος $\frac{1}{\pi}$, άρα και ο αντίστοιχος κύκλος, δεν είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη[3]! Αντίθετα προς τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, στο σημερινό σχολείο προεξάρχει η αριθμητική σκέψη. Βέβαια η αριθμητική σε σύγκριση με τη γεωμετρική κουλτούρα είναι περισσότερο διαδεδομένη μέσα στο σύγχρονο κόσμο και επίσης κυριαρχεί στις παραστάσεις, που οικοδομούν οι μαθητές μέσα από τα σχολικά βιώματα. Έχουμε την πεποίθηση ωστόσο ότι η υπερβολική αριθμητικοποίηση τραυματίζει τη γεωμετρική διαίσθηση. Γενικά, θεωρούμε ότι η πλούσια εμπειρία των μαθητών με γεωμετρικές μορφές, πριν ακόμη εισαχθούν στην αριθμητικοποίηση και την αναλυτική απόδειξη, είναι όχι μόνο χρήσιμη, αλλά και αναγκαία (Πατρώνης, 1996, Arcavi et al. 1987).

Από τα όσα συζητήθηκαν στην ενότητα αυτή σχετικά με την κατανόηση των πραγματικών αριθμών, προκύπτει ότι, επειδή από τη μια πλευρά οι δεκαδικές αναπαραστάσεις ρητών και άρρητων αριθμών έχουν υψηλή πιθανότητα αδιαφάνειας και από την άλλη λόγω της ύπαρξης των υπερβατικών αριθμών, είναι αναπόφευκτο να παραμένουν κενά, ασάφειες και παρανοήσεις στους μαθητές, αλλά και στους ενήλικες μετά την αποφοίτηση τους από το σχολείο.

Πρέπει τέλος να διευκρινιστεί ότι τα όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα αυτή αποτελούν απλώς κάποιες ιδέες που στόχο έχουν να βοηθήσουν στο δύσκολο θέμα της διδακτικής πραγμάτευσης των πραγματικών αριθμών στο σχολείο. Δεν θα πρέπει επομένως να εκληφθούν ως προσπάθεια εισήγησης ή επιβολής ενός μοντέλου διδασκαλίας, γιατί κάτι τέτοιο δεν υπάρχει.

Σε γενικές γραμμές η διδακτική μας πρόταση είναι: Γόνιμη αξιοποίηση των άτυπων γνώσεων και αντιλήψεων, που προϋπάρχουν για τους αριθμούς, ενεργητική μάθηση με ανακάλυψη, οικοδόμηση της γνώσης από τους μαθητές, ατομικά ή ομαδικά στην πραγματική σχολική τάξη. Η κατασκευή της γνώσης ακολουθεί την οπτική γωνία του μαθητή και όχι του διδάσκοντα, ο οποίος θέτει υπό συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη τις εσφαλμένες αντιλήψεις ή παρερμηνείες που παρατηρούνται (Kosyvas, 2010, Κόσυβας, 2011α).

Επιπλέον, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών (οι ρητοί σε μορφή κλάσματος και οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί, οι άρρητοι ως μη ρητοί και ασύμμετροι δεκαδικοί αριθμοί, οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις κ.λπ.) και οι ευέλικτες μετακινήσεις ανάμεσα σε αυτές

[3] Αν ο μαθητής είχε προτείνει ως μονάδα μέτρησης το μήκος του κύκλου, δηλ. Γ=2π, τότε από τον αλγεβρικό χειρισμό προκύπτει: $2\pi = 2\pi \cdot R$ ή $R = 1$ (μοναδιαίος κύκλος). Όμως η γεωμετρική κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος μήκους 2π είναι αδύνατη, αφού δεν μπορεί με κανόνα και διαβήτη.

νομίζουμε ότι είναι μαθησιακά ωφέλιμες για τους μαθητές. Η πεποίθηση μας ωστόσο αυτή, αν και τεκμηριώνεται εν μέρει από την πειραματική μας έρευνα και τα ευρήματα από τις συνεντεύξεις των μαθητών και σπουδαστών, αλλά και από σχετικά πορίσματα άλλων ερευνητών (Peled & Hershkovitz 1999, Sirotic & Zazkis 2007 κ.λπ.) χρειάζεται περαιτέρω στατιστική διερεύνηση.

Για να ορίσουμε το σύνολο των ρητών αριθμών και εφόσον ρητός είναι κάθε κλάσμα της μορφής $\frac{\mu}{\nu}$, με μ και ν ακέραιους αριθμούς, $\nu \neq 0$, προσθέτουμε τον περιορισμό Μ.Κ.Δ. (μ, ν)=1, ώστε να θεωρήσουμε κάθε ρητό αριθμό μία μόνο φορά

Ανάλογο θέμα προκύπτει και για τον ορισμό του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Πράγματι κάθε πεπερασμένος δεκαδικός αριθμός έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές αναπαραστάσεις (π.χ. 2,5=2,5000…=2,4999…. . Ακόμη, για κάθε ακέραιο αριθμό κ ισχύει κ,999…=κ+1. Κατά συνέπεια το σύνολο των πραγματικών αριθμών πρέπει να ορισθεί ως το σύνολο όλων των απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών και των αντίθετων τους με τον <u>περιορισμό</u> ότι αν $\alpha,\kappa_1\kappa_2$….. είναι ένας τέτοιος δεκαδικός αριθμός, υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε δεν μπορεί να είναι $\kappa_\mu=9$ για κάθε $\mu \geq \nu$.

5. Τελικά συμπεράσματα

Από τα όσα αναπτύχθηκαν στο άρθρο αυτό προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Η κατανόηση των άρρητων αριθμών είναι θεμελιώδης στην αναδημιουργία και επέκταση της έννοιας του αριθμού από τους μαθητές της Β/θμιας Εκπαίδευσης. Η οικοδόμηση των πραγματικών αριθμών αποτελεί μια εννοιολογική υπέρβαση της έννοιας του ρητού αριθμού. Η μετάβαση όμως από το σύνολο των ρητών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών προσκρούει σε εγγενείς δυσκολίες, που συνδέονται με τη φύση των άρρητων αριθμών.
- Το σώμα ***R*** των πραγματικών αριθμών μπορεί να κατασκευασθεί με την αναπαράσταση των στοιχείων του ως απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών, με τη μέθοδο των τομών Dedekind, από την οποία προκύπτει και η αρχή του κιβωτισμού, των ακολουθιών του Cauchy και των σχεδόν γραμμικών συναρτήσεων του ***Z***, ενώ μπορεί να ορισθεί επίσης και αξιωματικά ως το μοναδικό (κάτω από ισομορφισμό) πλήρες διατεταγμένο σώμα. Με βάση τη διδακτέα ύλη των σχολικών μαθηματικών, αλλά και τις περιορισμένες δυνατότητες των μαθητών σε

αυτή την ηλικία να κατανοήσουν έννοιες λεπτές και αφηρημένες, από τις παραπάνω μεθόδους κατασκευής του ***R*** μόνο η πρώτη ενδείκνυται για τη σχολική διδασκαλία των πραγματικών αριθμών (Γυμνάσιο και Λύκειο).

- Από την πειραματική μας έρευνα και τη διενέργεια των συνεντεύξεων με τους μαθητές του Γυμνασίου και τους σπουδαστές του ΤΕΙ προκύπτει ότι πιθανές δυσκολίες για την εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών αποτελούν: 1) Οι παρανοήσεις και η ελλιπής κατανόηση των ρητών πριν από τη διδασκαλία των άρρητων αριθμών. 2) Τα επιστημολογικά εμπόδια, που παραπέμπουν στην ιστορία των μαθηματικών, δηλαδή η δυσκολία της κατανόησης των ασύμμετρων μεγεθών και της πυκνότητας του ***Q*** σε αντιδιαστολή με τη συνέχεια του ***R***. 3) Η αδυναμία παρουσίασης στο σχολείο (Γυμνάσιο και Λύκειο) των άρρητων (εκτός από τις ρίζες που δεν έχουν ακριβή τιμή) και κύρια των υπερβατικών αριθμών με άλλο τρόπο πέραν της αναπαράστασης τους ως απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών. 4) Οι αδιαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις, που εμφανίζουν με μεγάλη συχνότητα τόσο οι ρητοί όσο και οι άρρητοι αριθμοί. 5) Η συχνή ταύτιση πραγματικών αριθμών με συγκεκριμένες ρητές προσεγγίσεις τους, πράγμα που μπορεί να ερμηνευθεί με το μοντέλο των διαστάσεων της γνώσης των Tirosh et al. (1998). 6) Η ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών, που υπερβαίνουν τις εμπειρίες και τις προϋπάρχουσες γνώσεις για τους αριθμούς και δεν μπορούν να περιγραφούν με αλγεβρικές μεθόδους. 7) Η αξιωματική/προσεγγιστική αντιστοίχιση μη κατασκευάσιμων με κανόνα και διαβήτη ασύμμετρων μεγεθών σε σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών κ.λπ.
- Τα ευρήματα της (περιορισμένης κλίμακας) πειραματικής μας έρευνας δείχνουν ότι η ηλικία και το εύρος των μαθηματικών γνώσεων του κάθε ατόμου επηρεάζουν σε ένα βαθμό την κατανόηση των πραγματικών αριθμών, πράγμα που διασταυρώνεται και από πορίσματα άλλων μελετών (π.χ. βλ. Fischbein et al 1995, σελ. 31), Το συμπέρασμα ωστόσο αυτό δεν θα πρέπει να θεωρηθεί ως απόλυτα τεκμηριωμένο στατιστικά.
- Η διδασκαλία των πραγματικών αριθμών στο σχολείο θα μπορούσε να βασίζεται πάνω στην κατανόηση από τους μαθητές της ισοδυναμίας των ορισμών των άρρητων αριθμών ως μη ρητών (δηλαδή δε μπορούν να γραφούν ως κλάσματα) και ως ασύμμετρων δεκαδικών αριθμών. Αυτό επιτυγχάνεται, όταν οι μαθητές αντιληφθούν με σαφήνεια γιατί ένα κλάσμα με διαίρεση του αριθμητή δια του παρονομαστή του

μετατρέπεται **πάντοτε** σε περιοδικό (σύμμετρο) δεκαδικό αριθμό και αντίστροφα, όταν είναι σε θέση να μετατρέπουν κάθε τέτοιο αριθμό (απλό, ή μικτό) σε κλάσμα. Έτσι μπορεί να μετριαστεί η σύγχυση των μαθητών ανάμεσα στους περιοδικούς δεκαδικούς και στους άρρητους αριθμούς.

- Ο ορισμός των ριζών ως θετικών αριθμών **μόνο**, αν και εστιάζει στο μονότιμο της συνάρτησης f(x)=$\sqrt{x}$, x$\in$$\boldsymbol{R}$, x$\geq 0$, στερεί από τους μαθητές τη δυνατότητα να θεωρήσουν την εξαγωγή ρίζας ως αντίστροφη διαδικασία της ύψωσης σε δύναμη. Ακόμη δημιουργεί δυσκολίες κατά την επίλυση εξισώσεων της μορφής $x^n = a$, με $n \in$ ***N***, $n \geq 2$, αλλά και στον προσδιορισμό του πεδίου ορισμού συναρτήσεων, όπως π.χ. η $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Κατά συνέπεια, αφού στα σχολικά βιβλία της χώρας μας έχει επιλεγεί αυτός ο τρόπος ορισμού, χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή κατά το διδακτικό χειρισμό των σχετικών θεμάτων, όπου είναι καλύτερα να τονίζει κανείς το λόγο υιοθέτησης του ορισμού αυτού και όχι τη μηχανική χρήση του.
- Στη σημερινή διδασκαλία η επαφή των μαθητών με τις απειροψήφιες δεκαδικές αναπαραστάσεις καθώς και με γεωμετρικές αναπαραστάσεις των άρρητων αριθμών είναι μάλλον υποτονική. Τονίζεται κατά βάση ότι άρρητος είναι κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός. Ο ορισμός των ασύμμετρων δεκαδικών αριθμών πρέπει να δίδεται με μεγάλη προσοχή, ακρίβεια και σαφήνεια, ώστε να μην επιδέχεται παρερμηνείες.
- Οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών εμπλουτίζουν τη διδασκαλία τους συνδέοντας την (μεταξύ άλλων) και ιστορικά με τη διαπίστωση της ύπαρξης των ασύμμετρων μεγεθών και τη σχετική θεωρία του Ευδόξου. Μπορούν να οργανωθούν δραστηριότατες γεωμετρικών κατασκευών στην τάξη που συνδυάζουν την Ιστορία των Μαθηματικών με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, όπως για παράδειγμα το κλασσικό πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου (Δήλιο πρόβλημα), που εμφανίζεται στον πλατωνικό διάλογο *Μένων* (Kosyvas & Baralis, 2010). Γενικά οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών και οι ευέλικτες μετακινήσεις ανάμεσα σε αυτές φαίνεται να είναι μαθησιακά ωφέλιμες για τους μαθητές.

6. Ανοικτά ερωτήματα

Από τη συζήτηση, που έγινε στο άρθρο αυτό, προκύπτουν κάποια ανοικτά για παραπέρα μελέτη και έρευνα ερωτήματα, τα οποία και συνοψίζουμε παρακάτω:

- Πόσο χρήσιμη είναι για την πληρέστερη κατανόηση των πραγματικών αριθμών η πλαισίωση της διδασκαλίας τους με γεωμετρικές αναπαραστάσεις (γεωμετρικές κατασκευές ασύμμετρων μεγεθών, αντιστοίχηση ρητών και άρρητων αριθμών με σημεία του πραγματικού άξονα κ.λπ.); Σημειώνουμε ότι η πειραματική μας έρευνα (βλ. ενότητα 2) δεν έδωσε μια σαφή απάντηση στο θέμα αυτό, αφού η παντελής σχεδόν αδυναμία των σπουδαστών του ΤΕΙ να ανταποκριθούν με επιτυχία στις παραπάνω κατασκευές δε φαίνεται να επηρέασε σημαντικά την ικανότητα τους στην απάντηση των υπόλοιπων ερωτήσεων του τεθέντος ερωτηματολογίου.
- Πώς μπορούν να αντιληφθούν καλύτερα οι μαθητές την προσεγγιστική/αξιωματική αντιστοίχηση μη κατασκευάσιμων γεωμετρικά ασύμμετρων μεγεθών με σημεία του πραγματικού άξονα; Σημειώνουμε π.χ. ότι για την κατασκευή του μήκους $\sqrt[3]{2}$, που στην ουσία αποτελεί Δήλιο πρόβλημα, που ήδη έχουμε αναφέρει (διπλασιασμός του κύβου με πλευρά τη μονάδα μέτρησης του μήκους), θα μπορούσε να γίνει χρήση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ (ή της $f(x)=x^3$-2) κατασκευασμένης με απόλυτη ακρίβεια (Sirotic & Zazkis 2007 β, παράγραφος 4.1). Κάτι τέτοιο όμως μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με τη βοήθεια Η/Υ, οπότε θα υπάρχει απόσταση ανάμεσα στη θεωρητική και την πρακτική προσέγγιση του προβλήματος.
- Ποιοι τρόποι ενδείκνυνται (σε κάθε βαθμίδα και τάξη) για τη μελέτη της συνέχειας του $\boldsymbol{R}$ σε αντιδιαστολή με την πυκνότητα του $\boldsymbol{Q}$; Πώς δηλαδή, με άλλα λόγια, μπορούν να πειστούν οι μαθητές ότι σε ένα δοσμένο διάστημα (αριθμών, ή σημείων, αν πρόκειται για ευθύγραμμο τμήμα) είναι δυνατό να έχουμε μια απειρία στοιχείων ενός ορισμένου τύπου (ρητοί αριθμοί, ή τα αντίστοιχα σημεία τους) και παρ' όλα αυτά στο ίδιο διάστημα να μπορούμε επίσης να προσθέσουμε μια απειρία άλλων στοιχείων διαφορετικού τύπου (άρρητοι αριθμοί, ή τα αντίστοιχα σημεία τους), όταν αυτό δε συμφωνεί με τη συνηθισμένη λογική και τη διαίσθηση τους;
- Πώς μπορεί μέσα από τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο να μεταδοθεί στους μαθητές όχι μόνο η χρησιμότητα τους στην πράξη, αλλά και η πραγματική ομορφιά τους ως ενός συμπαγούς και δομικά οργανωμένου συνόλου γνώσης, μέσα στο οποίο τα γνωστά συστήματα αριθμών παίζουν ένα πρωτεύοντα ρόλο (Fischbein et al. 1995, σελ. 29);

Εξυπακούεται βέβαια ότι η απάντηση στο τελευταίο ερώτημα δε θα πρέπει να παραπέμπει σε επιστροφή στα «μοντέρνα μαθηματικά», όπου όλη η διδασκαλία βασίζεται στη θεωρία των συνόλων, των αλγεβρικών δομών και τη μαθηματική λογική, όπως συνέβη με την μεταρρύθμιση της δεκαετίας του 60 στη σχολική εκπαίδευση, η οποία απέτυχε παταγωδώς.

Ωστόσο θα ήταν ίσως σκόπιμο να εξεταστεί, αν και κατά πόσο θα βοηθούσε στη βαθύτερη κατανόηση των πραγματικών (αλλά και των μιγαδικών) αριθμών, η διδασκαλία με διερευνητικές μεθόδους ή ανοιχτές προσεγγίσεις στην τελευταία τάξη του Λυκείου ορισμένων βασικών στοιχείων της θεωρίας των αλγεβρικών δομών, παράλληλα με την ανασκόπηση των βασικών συνόλων των αριθμών, που προηγείται της διδασκαλίας των μιγαδικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, ότι τα $\boldsymbol{Q}$ και $\boldsymbol{R}$ ως προς τις γνωστές ιδιότητες της πρόθεσης και του πολλαπλασιασμού αποτελούν σώματα (χωρίς κατ' ανάγκη να έχουν προηγηθεί ο ορισμοί της ομάδας και του δακτυλίου και οι αντίστοιχες αξιωματικές θεμελιώσεις) και η έννοια του ισομορφισμού ως μιας 1-1 απεικόνισης μεταξύ δυο αλγεβρικών δομών (εδώ σωμάτων), που «διατηρεί» τις πράξεις. Η έννοια αυτή, που αποτέλεσε και το νέο «μήνυμα» των μαθηματικών κατά τον $20^{ο}$ αιώνα, θα βοηθούσε σίγουρα τους μαθητές στην εννοιολογική κατανόηση του γιατί το $\boldsymbol{R}^2$ και το σώμα $\boldsymbol{C}$ των μιγαδικών αριθμών στην ουσία ταυτίζονται. Ίσως επίσης να τους βοηθούσε να διακρίνουν πιο ξεκάθαρα γιατί το σύνολο των περιοδικών δεκαδικών αριθμών είναι το ίδιο με το σύνολο των αλγεβρικών κλασμάτων, αν και στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε ισομορφισμό, αλλά διαφορετικό τρόπο γραφής των ίδιων αριθμών. Όλα τα παραπάνω θα μπορούσαν ίσως να υλοποιηθούν και μέσα από ένα προαιρετικό πειραματικό μάθημα εμβάθυνσης μαζί με άλλες κανονικότητες, που παρουσιάζονται στα μαθηματικά, αν βεβαίως ευοδωθούν οι εξαγγελίες για το νέο πρόγραμμα του Λυκείου.

Γνωρίζου

με βέβαια ότι η θέση μας αυτή θα δώσει λαβή για ποικίλες κριτικές του τύπου: «Όταν σήμερα η κατασκευαστική άποψη (constructivism) αποτελεί την επικρατούσα θεωρία μάθησης, τέτοιου είδους προσεγγίσεις είναι εκτός τόπου και χρόνου». Όπως όμως έχουμε τονίσει κατ' επανάληψη και στο παρελθόν (π.χ. βλ. συμπεράσματα στην τελευταία ενότητα στα Βόσκογλου 2005, 2006), πεποίθηση μας είναι ότι σε τέτοιου είδους ζητήματα δεν πρέπει να είμαστε απόλυτοι. Πράγματι, καμία από τις επιστημολογικές/φιλοσοφικές τάσεις στα μαθηματικά και κατ' επέκταση και στη διδακτική τους δε μπορεί να χαρακτηρισθεί ως τέλεια. Κάθε μια από αυτές παρουσιάζει πλεονεκτήματα και αδυναμίες, που επηρεάζουν ανάλογα την πορεία της μαθηματικής επιστήμης. Το ζητούμενο λοιπόν είναι να υπάρξει ένα είδος «ισορροπίας» ανάμεσά τους, ώστε να μπορέσουμε να προωθήσαμε πιο αποτελεσματικά ένα συνδυασμένο επιστημονικό και διδακτικό όραμα για την έρευνα και τη διδασκαλία των μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α) ΕΛΛΗΝΙΚΉ

Αναστασιάδης, Ι. (1967), *Θεωρία Πραγματικών Συναρτήσεων*, Τόμος Ι, Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Ανρεαδάκης, Σ. κ.α. (2007), *Άλγεβρα (Α΄ Γενικού Λυκείου)*, 7η Έκδοση, ΟΕΔΒ, Αθήνα

Αργυράκης, Δ. κ.α. (2008), *Μαθηματικά (Γ΄ Γυμνασίου)*, 2η Έκδοση, ΟΕΔΒ, Αθήνα

Αρτεμιάδης, Ν. (2000), *Ιστορία των Μαθηματικών (Από της Σκοπιάς του Μαθηματικού)*, Ακαδημία Αθηνών.

Βαβαλέτσκος Θ. & Ταμβακλής Ι. (1969), *Μαθηματικά (Γ΄ Γυμνασίου, Τόμος Πρώτος),* 2η Έκδοση, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Βανδουλάκης, Ι. κ.α. (2008), *Μαθηματικά (Α΄ Γυμνασίου)*, 2η Έκδοση, ΟΕΔΒ, Αθήνα

Βαρουχάκης, Ν. κ.α. (1984), *Μαθηματικά (Α΄Λυκείου, Άλγεβρα)*, 6η Έκδοση, ΟΕΔΒ, Αθήνα

Βλάμος, Π. κ.α. (2007), *Μαθηματικά (Β΄ Γυμνασίου)*, 2η έκδοση, ΟΕΔΒ, Αθήνα

Βόσκογλου, Μ. (2005), Διδάσκοντας τα μαθηματικά με εφαρμογές: Από την αρχαία Κίνα μέχρι σήμερα, *Πρακτικά 22ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας ΕΜΕ*, 557-566, Λαμία.

Βόσκογλου, Μ. (2006), Η φιλοσοφία των μαθηματικών και οι σχολές της μαθηματικής σκέψης, *Πρακτικά 23ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας ΕΜΕ*, 142-151, Πάτρα.

Βόσκογλου, Μ. & Κόσυβας, Γ. (2009), Η κατανόηση των άρρητων αριθμών, *Πρακτικά 26ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας ΕΜΕ*, 305-314, Θεσσαλονίκη.

Βόσκογλου, Μ. (2010), Απόψεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο, *Πρακτικά 27ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας ΕΜΕ*, Χαλκίδα

Βόσκογλου, Μ. (2011), Υπερβατικοί αριθμοί: Μια «μαύρη τρύπα» στο «σύμπαν» των πραγματικών αριθμών, Ευκλείδης Α΄, 81 (υπό δημοσίευση).

Βουγιουκλής Θ. & Ανταμπούφης Ν. (2007), Η τετραγωνική ρίζα ως κίνητρο αξιοποίησης θεμάτων υπερδομών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ,* 133-144, Βόλος.

Κασσώτη, Ο. κ.ά. (2006), *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, 1ο τεύχος,* ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Κόσυβας Γ. (2008), Εικασίες και μαθηματική συζήτηση στην τάξη, *Πρακτικά του 25ου Συνεδρίου της ΕΜΕ*, 434-448, Βόλος:.

Κόσυβας Γ. (2011α), Είδη συλλογισμού κατά την ομαδοσυνεργατική λύση του προβλήματος του κουμπαρά στην Α΄ Γυμνασίου, *Ευκλείδης Γ΄*, 74, 56-82, Αθήνα.

Κόσυβας Γ. (2011 β), Μπορεί η έκπληξη να ανατρέψει την πλήξη; Δοκιμές μαθηματικών παραδόξων στην τάξη, *Πρακτικά 13ου Παγκύπριου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης,* 49-60, Κύπρος.

Κυριακόπουλος, Α. (2010), Σειρές και αλγεβρικά αθροίσματα, *Ευκλείδης Β΄,* **78**, 74-76.

Παπαμιχαήλ, Δ. κ.α. (1981), *Μαθηματικά (Β΄ Γυμνασίου),* 4η Έκδοση, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Πατρώνης Τ., Σπανός Δ. (1996), *Σύγχρονες Θεωρήσεις και Έρευνες στη Μαθηματική Παιδεία*, εκδόσεις, Γ.Α. Πνευματικού.

Τασσόπουλος Γ. (2008), Από τον Εύδοξο στον Dedekind, *Πρακτικά του 25ου Συνεδρίου της ΕΜΕ*, 525-539, Βόλος.

Β) ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

Arcavi, A., Bruckheimer, M. & Ben-Zvi, R. (1987), History of mathematics for teachers: the case of irrational numbers, *For the Learning of Mathematics*, **7**(2), 18-23.

Bagget, L. W. (2006), *Analysis of functions of a single variable: A detailed development,* University of Colorado.

Available at: http://spot.colorado.edu/~bagget/analysis.book.pdf.

Chi, M. T. H., Feltovich, P. J. & Glaser, R. (1981), Categorization and representation of physics problems by experts and novices, *Cognitive Science*, **5**, 121-152.

Fiscbein, E., et al. (1985), The role of implicit models in solving problems in multiplication and division, *Journal for Research in Mathematics Education*, **16**, 3-17.

Fiscbein, E. et al. (1995), The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers, *Educational Studies in Mathematics*, **29**, 29-44.

Gelman, R. (2003), The epigenesis of mathematical thinking, *Journal of*

Applied Developmental Psychology, **21**, 27-33.

Godino, J. D. & Font, V. (2010), The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education, *Mediterranean Journal for Researchin Mathematics Education,* **9** (1), 189-210

Goldin, G. & Janvier, C. E. (Eds.) (1998), *Representations and the psychology of mathematics education, parts I and II*. Special issue of the *Journal of Mathematical Behavior,* **17** (1 & 2).

Goldin, G. (2008), Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.): *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 176-201).

Greer, B. & Verschafel, L. (2007), Nurturing conceptual change in mathematics education. In S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakousi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp.319-328), Oxford: Elsevier.

Hart, K. (1988), Ratio and proportion. In: Hiebert, L. & Behr, M. (Eds.), *Number Conceptsand Operations in te Middle Grades* (v. 2, pp. 198-219), LEA Publishers.

Hartnett, P. M. & Gelman, R. (1998), Early understanding of number: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction*, **18**, 341-374.

Herscovics, N. (1989), Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In Wagner, S. & Kieran, C. (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 60-86), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Janvier, C. (1987), Representation and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 7-72), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kalapodi, A. (2010), The decimal representation of real numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* **41**(7), 889-900.

Khoury, H. A. & Zarkis, R. (1994), On fractions and non-standard representations: Pre-service teachers' concepts, *Educational studies in Mathematics,* **27**, 191-204.

Kosyvas, G. & Baralis, G. (2010), Les stratégies des élèves d'aujourd'hui sur le problème de la duplication du carré, *Repères IREM*, **78**, 13-36.

Kosyvas G. (2010). Problèmes ouvertes: notion, catégories et difficultés, *Annales de Didactique et des Sciences cognitives*, 15, IREM de

Strasbourg, 43-71.

Lang, S. (1971), *Algebra*, 4th Printing, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts – Menlo Park, California – London – Sydney – Manila

Lesh, R. et al. (1987), Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.): *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Mac lane, S. & Birkoff, G. (1988), *Algebra*, 3d Edition, Chelsea Publ. Company, NY.

Malara, N. (2001), From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density. In: J. Novotna (Ed.), *Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research Mathematics Education, II* (pp.35-46). Prague: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogicka Faculta.

Markovits, Z. & Sowder, J. (1991), Students' understanding of the relationship between fractions and decimals, *Focus on Learning Problems in Matematics*, **13(1)**, 3-11.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2002), Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In Limon, M. & Mason, L. (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 233-258), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Moseley, B. (2005), Students' Early Mathematical Representation Knowledge: The Effects of Emphasizing Single or Multiple Perspectives of the Rational Number Domain in Problem Solving, *Educational Studies in Mathematics*,, **60**, 37-69.

Moskal, B. M. & Magone, M. E. (2000), Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task, *Educational studies in Mathematics,* **43**, 313-335.

O'Connor, M. C. (2001), "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion, *Educational studies in Mathematics,* **46**, 143-185.

Peled, I. & Hershkovitz, S. (1999), Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* **30** (1), 39-46.

Smith, C. L. et al. (2005), Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter, *Cognitive Psychology*, **51**, 101-140.

Sierpinska, A., (1994), *Understanding in Mathematics*, Falmer Press, London.

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007α), Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge, *Educational Studies in Mathematics*, **65**, 49-76.

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007β), Irrational numbers on the number line – where are they, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* **38** (4), 477-488.

Toeplitz, O. (2007), *The Calculus: A Genetic Approach University,* The University of Chicago Press.

Vamvakoussi X. & Vosniadou, S. (2004), Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach, *Learning and Instruction,* **14**, 453-467.

Vamvakoussi X. & Vosniadou, S. (2007), How many numbers are there in a rational numbers' interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. In Vosniadou, S., Baltas, A. & Vamvakoussi, X. (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 265-282), Oxford: Elsevier.

Yujing, N. and Yong-Di, Z. (2005), Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias, *Educational Psychologist*, **40(1)**, 27-52.

Zazkis, R. & Sirotic, N. (2010), Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link, *CBMS Issues in Mathematics Education*, **16**, 1-27.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Κατάλογος των ερωτήσεων της πειραματικής μας έρευνας και μονάδες βαθμολογίας

1. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι και πραγματικοί -2, $-\frac{5}{3}$, 0, $9,08$, 5, $7,333...$, $\pi = 3,14159...$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{4}$, $\frac{22}{11}$, $5\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$, $\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)$, $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{7}-2$, $\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2}$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)**.

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με **Σ** αν είναι σωστές και με **Λ** αν είναι λάθος. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.
$\frac{2}{3} \prec \frac{14}{21}$, $\frac{2001}{1001} > 2$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 1)**.

3. Ποιο είναι το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης $\frac{5}{7}$; **(ΜΟΝΑΔΕΣ 1)**

4. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{7}{3}$ σε δεκαδικό αριθμό. Τι είδους δεκαδικός αριθμός είναι αυτός και γιατί ονομάζεται έτσι; **(ΜΟΝΑΔΕΣ 1)**.

5. Είναι ο αριθμός 2,8254131131… περιοδικός; Αν ναι ποια είναι η περίοδός του; Να εξετάσετε το ίδιο για τον αριθμό: 2,0013131131113111 **(ΜΟΝΑΔΕΣ 1,5)**.

6. Να συμπληρώσετε τις ισότητες: $\sqrt{9} =$, $\sqrt{100} =$ και $\sqrt{169} =$. Να περιγράψετε πώς βρήκατε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών αυτών **(ΜΟΝΑΔΕΣ 1)**.

7. Μεταξύ ποιων ακεραίων αριθμών βρίσκεται το $\sqrt{2}$ και μεταξύ ποιων δεκαδικών αριθμών με 1 δεκαδικό ψηφίο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας **(ΜΟΝΑΔΕΣ 1,5)**.

8. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με **Σ** αν είναι σωστές και με **Λ** αν είναι λάθος: $\sqrt{2}$ =1,41 , $\sqrt{2}$ =1,414444…, $\sqrt{2} \approx$ 1,41, δεν υπάρχει ακριβής τιμή του $\sqrt{2}$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 1,5)**.

9. Να αναφέρετε δύο ρητούς και δύο άρρητους αριθμούς ανάμεσα στο $\sqrt{10}$ και $\sqrt{20}$. Πόσοι ρητοί αριθμοί νομίζετε ότι υπάρχουν ανάμεσα σε αυτούς τους δύο αριθμούς; **(ΜΟΝΑΔΕΣ 1)**

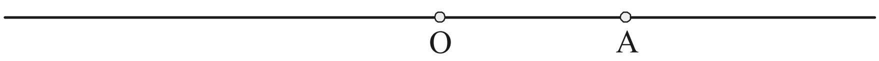
10. Να αναφέρετε δύο ρητούς και δύο άρρητους αριθμούς ανάμεσα στο 10 και το 20. Πόσοι άρρητοι αριθμοί νομίζετε ότι υπάρχουν ανάμεσα σε αυτούς τους δύο αριθμούς; **(ΜΟΝΑΔΕΣ 1)**

11. Υπάρχει ρητός αριθμός ανάμεσα στο $\mathbf{\frac{1}{10}}$ και το $\mathbf{\frac{1}{11}}$; Αν ναι βρείτε έναν. Πόσοι ρητοί αριθμοί νομίζετε ότι υπάρχουν ανάμεσα σε αυτούς τους δύο αριθμούς; **(ΜΟΝΑΔΕΣ 1)**

12. Υπάρχει ρητός αριθμός ανάμεσα στο 10,20 και στο 10,21; Αν ναι βρείτε έναν. Πόσοι ρητοί αριθμοί νομίζετε ότι υπάρχουν ανάμεσα σε αυτούς τους δύο αριθμούς; **(ΜΟΝΑΔΕΣ 1)**

13. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με **Σ** αν είναι σωστές και με **Λ** αν είναι λάθος. Σε περίπτωση λάθους να συμπληρώσετε στην τελευταία στήλη τη σωστή απάντηση.
$\sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\sqrt{3\cdot 7}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$, $\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$, η μοναδική λύση της εξίσωσης $\chi^2=3$ είναι η $\chi=\sqrt{3}$, $\sqrt{\left(1-\sqrt{17}\right)^2}=1-\sqrt{17}$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)**.

14. Στο παρακάτω σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ παριστάνει τη μονάδα μέτρησης μηκών. Με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$. Στη συνέχεια να τοποθετήσετε τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{3}$ πάνω στον άξονα με μονάδα μέτρησης μηκών το ΟΑ. Να περιγράψετε σύντομα την κατασκευή **(ΜΟΝΑΔΕΣ 2,5)**.



15. Είναι δυνατό το άθροισμα δύο αρρήτων να είναι ρητός; Αν ναι να δώσετε ένα παράδειγμα **(ΜΟΝΑΔΕΣ 1)**.