

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ-4

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις: $A = 4x(x+3)$ και $B = x^2 + 6x + 9$.

(1) Να λύσετε την εξίσωση $A=0$.

(Μονάδες 7)

(2) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της B για $x=-4$.

(Μονάδες 7)

(3) Να κάνετε τις πράξεις και τις αναγωγές της παράστασης $A-B$.

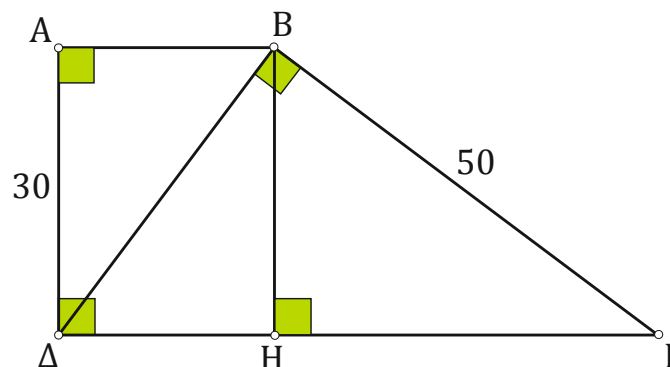
(Μονάδες 8)

(4) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A+B$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2^ο

Ένα τραπέζιο $ABΓΔ$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AD=30$ m και $BΓ=50$ m. Επίσης ισχύει $BΔ \perp BΓ$. Φέρνουμε: $BH \perp ΔΓ$.



(1) Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα $HΓ$.

(Μονάδες 8)

(2) Να βρείτε τη βάση AB του τραπεζίου.

(Μονάδες 12)

(3) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3^ο

Η Ελένη κατά τη διάρκεια των διακοπών της θέλει να κάνει ποδηλασία. Εξετάζει από το διαδίκτυο τις 15νθήμερες χρεώσεις από τρία καταστήματα ενοικίασης ποδηλάτων για να διαπιστώσει ποιο την συμφέρει να επιλέξει. Οι τρόποι χρέωσης των τριών καταστημάτων είναι οι εξής:

Κατάστημα (α): Οι πελάτες πληρώνουν σύμφωνα με τον κανόνα που προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα:

| | | | | | |
|---------------------|----|------|----|---|-----|
| Ώρες ενοικίασης (x) | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
| Χρέωση σε ευρώ (y) | 15 | 15,5 | 16 | | ... |

Κατάστημα (β): Οι πελάτες πληρώνουν **35** ευρώ και κάνουν ποδήλατο όσες ώρες του δεκαπενθημέρου επιθυμούν.

Κατάστημα (γ): Οι πελάτες πληρώνουν σύμφωνα με την παρακάτω γραφική παράσταση. Στο ακόλουθο γράφημα η σχέση που συνδέει τις ώρες ποδηλασίας με το χρηματικό ποσό που πληρώνουν παριστάνεται με σημεία της ευθείας **(γ)**.



Η Ελένη δυσκολεύεται να επιλέξει γιατί οι χρεώσεις του κάθε καταστήματος γίνονται με διαφορετικό τρόπο. Μπορείς να την βοηθήσεις να απαντήσει στα ακόλουθα ερωτήματα;

(1) Ποιος είναι ο τύπος που παρέχει άμεσα τη χρέωση y σε ευρώ του καταστήματος **(α)** για x ώρες ενοικίασης; Να αιτιολογήσεις πώς βρήκες τον τύπο.

(Μονάδες 7)

(2) Να σχεδιάσεις τη γραφική παράσταση της σχέσης του y ως προς το x για το κατάστημα **(α)** στο ίδιο σύστημα αξόνων με την ευθεία **(γ)**.

(Μονάδες 6)

(3) Πόσες ώρες ποδήλατο πρέπει να κάνει η Ελένη ώστε τα χρήματα που θα πληρώσει στα καταστήματα **(α)** και **(γ)** να είναι ίδια. Να εξηγήσεις.

(Μονάδες 5)

(4) Αν η Ελένη κάνει **20** ώρες ποδηλασίας ποια επιλογή από τις τρεις είναι η πιο συμφέρουσα και γιατί;

(Μονάδες 6)

(5) Αν η Ελένη κατά τις διακοπές της κάνει **40** ώρες ποδήλατο και επιλέξει την πιο δαπανηρή επιλογή, πόσο θα επιβαρυνθεί σε σύγκριση με την πιο συμφέρουσα;

(Μονάδες 7)

(6) Πότε συμφέρει η κάθε επιλογή;

(Μονάδες 9)

ΤΕΛΟΣ 4ου ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΟ 4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ : ΜΕΤΡΙΟ

ΘΕΜΑ 1^ο

Οι δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις είναι: $A = 4x(x+3)$ και $B = x^2 + 6x + 9$.

(1) Ισχύει: $A=0$ ή $4x(x+3)=0$. Επομένως: $x=0$ ή $x=-3$.

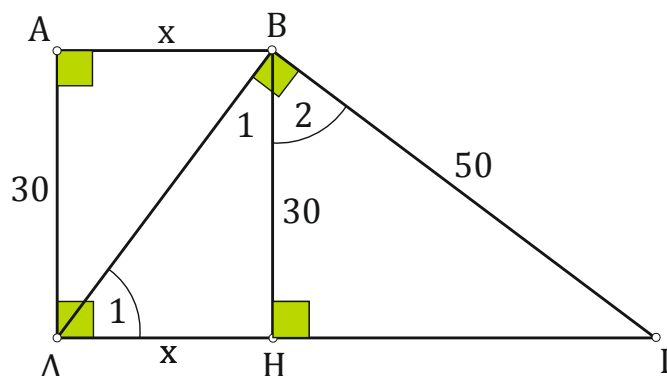
(2) Έχουμε: $B = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$. Για $x=-4$ είναι: $B = (-4+3)^2 = (-1)^2 = 1$.

(3) Είναι: $A - B = 4x(x+3) - (x^2 + 6x + 9) = 4x^2 + 12x - x^2 - 6x - 9 = 3x^2 + 6x - 9$.

(4) Είναι: $A + B = 4x(x+3) + (x^2 + 6x + 9) = 4x(x+3) + (x+3)^2 =$
 $= (x+3)[4x + (x+3)] = (x+3)(5x+3)$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Συμπληρώνουμε το σχήμα της άσκησης.



(1) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΓ είναι $BH=30$. Οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει:

$$ΓΗ^2 = ΒΓ^2 - ΒΗ^2 = 50^2 - 30^2 = 1600 \Rightarrow ΓΗ = 40 \text{ m.}$$

(2) Είναι:

$$\begin{cases} \hat{\Delta}_1 = 90^\circ - \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 = 90^\circ - \hat{B}_1 \end{cases} \text{ άρα: } \hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2 \text{ ή } \varepsilon\varphi \hat{\Delta}_1 = \varepsilon\varphi \hat{B}_2 \text{ ή } \frac{30}{x} = \frac{40}{30}. \text{ Επομένως: } \mathbf{AB = x = 22,5 \text{ m.}}$$

Εναλλακτικά μπορεί να εφαρμοστεί ομοιότητα τριγώνων.

Ένας τρίτος τρόπος προκύπτει από την εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΓΔ$:

$$\begin{cases} B\Delta^2 = 30^2 + x^2 \\ B\Delta^2 = (x+40)^2 - 50^2 \end{cases} \text{ Οπότε: } 900 + x^2 = x^2 + 80x + 1600 - 2500 \text{ ή } 80x = 1800.$$

Επομένως: **AB = x = 22,5 m.**

(3) Επίσης: $\Gamma\Delta = 40 + 22,5 = 62,5 \text{ m}$. Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$E = \frac{B+\beta}{2} \cdot \upsilon = \frac{62,5+22,5}{2} \cdot 30 = \frac{85}{2} \cdot 30 = 1275 \text{ m}^2.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

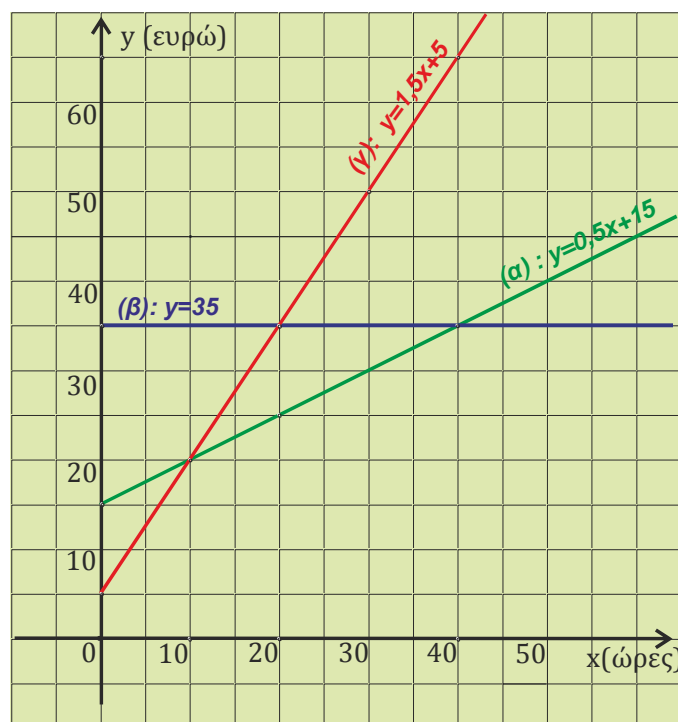
(1) Παρατηρούμε ότι οι χρεώσεις του καταστήματος (α) αυξάνονται πάντα κατά 0,5 ευρώ για κάθε επιπρόσθετη ώρα (κλίση 0,5). Στο τέλος προσθέσουμε μια στήλη ακόμα. Η δεύτερη γραμμή του πίνακα τιμών γράφεται:

| | | | | | |
|------------------------------|----------|----------|----------|-----|----------|
| Ώρες ενοικίασης (x) | 0 | 1 | 2 | ... | x |
| Χρέωση σε ευρώ (y) | 15+0,5·0 | 15+0,5·1 | 15+0,5·2 | ... | 15+0,5·x |

Έτσι ο ζητούμενος τύπος είναι: $y=0,5x+15$ (συνάρτηση ευθείας).

Εναλλακτικά, ο τύπος της συνάρτησης μπορεί να βρεθεί με αλγεβρικό χειρισμό.

(2) Η γραφική παράσταση της σχέσης ανάμεσα στη χρέωση **y** σε ευρώ του καταστήματος (**α**) και τις αντίστοιχες ώρες ενοικίασης **x**, είναι η ευθεία (**α**) και παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Η συνολική οπτικοποίηση της κατάστασης στο ίδιο σύστημα αξόνων βοηθά τις σχετικές συγκρίσεις και αποτελεί ένα πολύτιμο μέσο για την επίλυση του

προβλήματος. Στο προηγούμενο σχήμα (χωρίς να ζητείται στο ερώτημα (2)) οι τρεις γραφικές παραστάσεις συνδέονται με τους αντίστοιχους τύπους. Η εύρεση του τύπου της ευθείας (γ) γίνεται αλγεβρικά. Στη συνέχεια με αλγεβρική λύση συστήματος μπορεί να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών (α) και (γ). Η μετατροπή των χρεώσεων των τριών καταστημάτων στην ίδια αναπαράσταση διευκολύνει τις απαντήσεις των επόμενων ερωτημάτων.

(3) Από τη συνεξέταση των γραφικών παραστάσεων των τριών ευθειών διαπιστώνουμε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις συμφέρει η επιλογή του καταστήματος (α), ενώ σε άλλες του (β) ή του (γ). Από το γράφημα προκύπτει ότι για $x=10$ οι χρεώσεις των καταστημάτων (α) και (γ) **είναι ίδιες: 20 ευρώ**. Επίσης από τον τύπο του πρώτου ερωτήματος επαληθεύεται ότι το κατάστημα (α) χρεώνει τις 10 ώρες: $y=0,5x+15=0,5\cdot 10+15=20$ ευρώ. Το ίδιο προκύπτει και από τον τύπο που αντιστοιχεί στην ευθεία (γ).

(4) Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις προκύπτει ότι για 20 ώρες ποδηλασίας θα πληρώσει στο αντίστοιχο κατάστημα τα εξής χρηματικά ποσά:

- Κατάστημα (α): 25 ευρώ, που αντιστοιχεί στο σημείο (20, 25).
- Κατάστημα (β): 35 ευρώ, που αντιστοιχεί στο σημείο (20, 35).
- Κατάστημα (γ): 35 ευρώ, που αντιστοιχεί στο σημείο (20, 35).

Επομένως, για $x=20$ συμφέρει το κατάστημα (α), επειδή στο σημείο αυτό η γραφική παράσταση της συνάρτησης (α) βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση τόσο της (γ) όσο και της (β). Εναλλακτικά η απάντηση μπορεί να βρεθεί από τους τύπους των συναρτήσεων.

(5) Από το σχήμα προκύπτει ότι για 40 ώρες ποδηλασίας η πιο δαπανηρή επιλογή είναι το κατάστημα (γ) και κοστίζει 65 ευρώ, ενώ οι (α) και (β) κοστίζουν **από 35 ευρώ η καθεμιά**. Επομένως για $x=40$ έχουμε:

$$y_{\gamma}(40)-y_{\alpha}(40)=65-35=30 \text{ και } y_{\gamma}(40)-y_{\beta}(40)=65-35=30.$$

Επομένως η επιβάρυνση που δημιουργείται είναι **30 ευρώ**.

(6) Τέλος από την ανάγνωση των γραφικών παραστάσεων προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν $0 < x < 10$ συμφέρει το κατάστημα (γ), γιατί η ευθεία (γ) είναι κάτω από τις (α) και (β).
- Αν $10 < x < 40$ συμφέρει το κατάστημα (α), γιατί στο διάστημα αυτό η ευθεία (α) είναι κάτω από τις (γ) και (β).
- Αν $x > 40$ συμφέρει το κατάστημα (β), γιατί στο διάστημα αυτό η ευθεία (β) είναι κάτω από τις (γ) και (α).
- Αν $x=10$ θα πληρώνει το ίδιο στα καταστήματα (α) και (γ).
- Αν $x=40$ θα πληρώνει το ίδιο στα καταστήματα (α) και (β).

ΤΕΛΟΣ ΛΥΣΕΩΝ 4^{ου} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ