ΕΝΑ ΣΧΗΜΑ

ΜΕ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΣΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

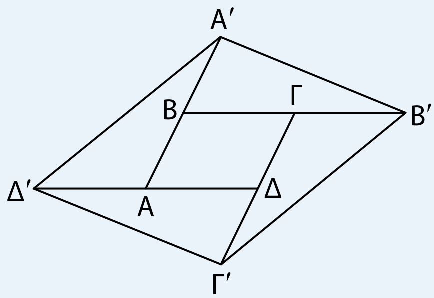
Κόσυβας Γιώργος

1ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών

Σε αυτή την εργασία παρουσιάζονται ορισμένες αξιοσημείωτες παρατηρήσεις πάνω σε ένα πλούσιο σχήμα, το οποίο επιτρέπει ποικίλες προσεγγίσεις από την Ευκλείδεια και τη Διανυσματική Γεωμετρία, την Τριγωνομετρία και τους Μιγαδικούς αριθμούς.

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, όπου τα σημεία Α, Β, Γ και Δ είναι αντιστοίχως τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΔΔ΄, ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄.
Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου Α′Β′Γ′Δ′ ;



Το ερώτημα είναι ανοιχτό έτσι ώστε, οι διερευνήσεις των μαθητών να απελευθερωθούν από μεθοδολογικούς περιορισμούς.

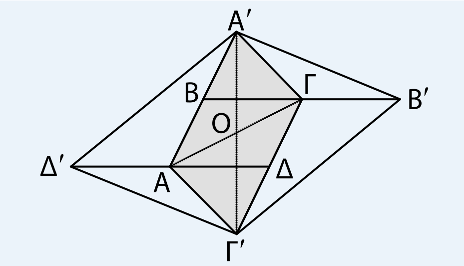
Τα κριτήρια των παραλληλογράμμων

Η προσφυγή στα κριτήρια των παραλληλογράμμων μάς παρέχει τις πρώτες αποδείξεις. Τα κύρια κριτήρια που εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο είναι:

- Κ1: Οι απέναντι πλευρές είναι ανά δύο ίσες
- Κ2: Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
- Κ3: Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

Πρώτη απόδειξη

Επειδή ΑΑ΄//ΓΓ΄ και ΑΑ΄= ΓΓ΄ σύμφωνα με το Κ3 το τετράπλευρο Α΄ΓΓ΄Α είναι παραλληλόγραμμο. Έτσι οι Α΄Γ΄ και ΑΓ έχουν το ίδιο μέσο Ο. Ομοίως το ΒΒ΄ΔΔ΄ είναι παραλληλόγραμμο και επομένως οι διαγώνιοί του ΒΔ και Β΄Δ΄ διχοτομούνται. Επειδή το Ο είναι κοινό μέσο των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, χρησιμοποιώντας το Κ2 συμπεραίνουμε ότι το Ο θα είναι το μέσο των Α΄Γ΄ και Β΄Δ΄. Άρα το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι παραλληλόγραμμο.



Η συμμετρία ως κέντρο

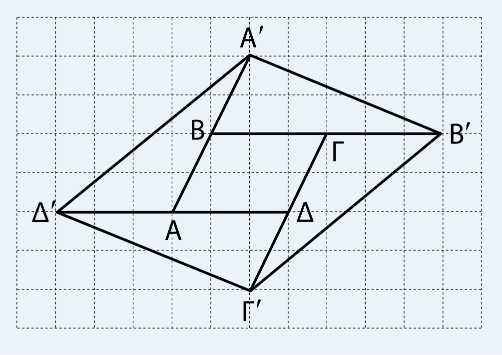
Η κεντρική συμμετρία ως προς το κέντρο Ο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μας επιτρέπει να εμβαθύνουμε στη σχέση που ενυπάρχει ανάμεσα στο παραλληλόγραμμο και στη συμμετρία ως προς κέντρο.

Δεύτερη απόδειξη

Έστω Ο το κέντρο του ΑΒΓΔ. Τα συμμετρικά των Γ και Δ ως προς το Ο είναι Α και Β. Επειδή το Δ είναι το μέσο του ΓΓ΄ και η συμμετρία ως προς κέντρο διατηρεί τα μέσα, το Β θα είναι το μέσο του ΑΑ΄΄, όπου το Α΄΄ παριστάνει το συμμετρικό του Γ΄. Επομένως τα σημεία Α΄΄ και Α΄ ταυτίζονται και τα Α΄ και Γ΄ είναι συμμετρικά ως προς το Ο. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι το Ο είναι το μέσο του Β΄Δ΄. Άρα το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ σύμφωνα με το Κ2 είναι παραλληλόγραμμο.

Αλγεβρικά διανύσματα (συντεταγμένες διανύσματος)

Σύμφωνα με το πρόγραμμα οι μαθητές εισάγονται στις συντεταγμένες διανύσματος στη Β΄ Λυκείου. Ωστόσο θα μπορούσαμε στο επίπεδο του Γυμνασίου να έχουμε μια νέα απόδειξη κάνοντας αναπαραγωγή του σχήματος σε τετραγωνισμένο χαρτί.



Στο προηγούμενο σχήμα δεν είναι απαραίτητο να σημειώσουμε συντεταγμένες σημείων. Ο ευκολότερος τρόπος εισαγωγής των συντεταγμένων διανύσματος είναι μέσω[1] μετατοπίσεων. Για παράδειγμα, οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ μπορούν να βρεθούν, αν προβούμε διαδοχικά σε μια

[1] Αυτή η προσέγγιση θα μπορούσε να υπάρχει στο επίπεδο του Γυμνασίου. Όμως στο νέο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου εισάγεται η γεωμετρική έννοια του διανύσματος χωρίς τον χειρισμό με συνταγμένες όπως προβλεπόταν στο παλιό βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου.

οριζόντια μετατόπιση μιας μονάδας προς τα αριστερά (-1) και μιας κάθετης μετατόπισης δύο μονάδων προς τα κάτω (-2). Έτσι οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$ είναι $(-1,-2)$ και συμβολικά γράφουμε: $\overrightarrow{AB}=(-1,-2)$.

Είναι γνωστό ότι δύο διανύσματα είναι ίσα, αν έχουν ίσες τις αντίστοιχες συντεταγμένες τους. Αν χρησιμοποιήσουμε την ισότητα διανυσμάτων, οδηγούμαστε στις ακόλουθες αποδείξεις, οι οποίες απαιτούν εξάσκηση στη χρήση συντεταγμένων:

Τρίτη απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι: $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{\Delta'\Gamma'}$. Για να μετακινηθούμε από το Α΄ στο Β΄ ακολουθούμε πρώτα μια οριζόντια μετατόπιση κατά +5 και στη συνέχεια μια κάθετη μετατόπιση κατά -2. Επομένως βρίσκουμε: $\overrightarrow{A'B'}=(5,-2)$. Ανάλογα βρίσκουμε $\overrightarrow{\Delta'\Gamma'}=(5,-2)$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι παραλληλόγραμμο.

Τέταρτη απόδειξη

Από το γεωμετρικό διάνυσμα περνάμε στο αλγεβρικό διάνυσμα. Έτσι μπορούμε στο καρτεσιανό επίπεδο να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες των μέσων των ευθύγραμμων τμημάτων $A'\Gamma'$ και $B'\Delta'$ (βλ. στο βιβλίο της Θετικής κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου: Συντεταγμένες Μέσων Τμήματος, σελ. 33 και εφαρμογή 1, σελ. 35).

$$\begin{cases} x_B=\dfrac{x_A+x_{A'}}{2} \\ x_\Delta=\dfrac{x_\Gamma+x_{\Gamma'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'}=-x_A+2x_B \\ x_{\Gamma'}=-x_\Gamma+2x_\Delta \end{cases} \Rightarrow \frac{x_{A'}+x_{\Gamma'}}{2}=-\frac{x_A+x_\Gamma}{2}+x_B+x_\Delta=\frac{x_B+x_\Delta}{2}$$

Επίσης

$$\frac{x_{B'}+x_{\Delta'}}{2}=-\frac{x_B+x_\Delta}{2}+x_A+x_\Gamma=\frac{x_B+x_\Delta}{2}.$$

Οπότε:

$$\frac{x_{A'}+x_{\Gamma'}}{2}=\frac{x_{B'}+x_{\Delta'}}{2}.$$

Ανάλογα εργαζόμαστε για τις τεταγμένες. Η προηγούμενη αλγεβρική απόδειξη δεν οπτικοποιείται και απαιτεί καλή κατανόηση των υποθέσεων και των συμπερασμάτων.

Γεωμετρικά διανύσματα (πρόσθεση διανυσμάτων)

Για να αποδείξουμε ότι το $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι παραλληλόγραμμο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γεωμετρία των διανυσμάτων χωρίς συντεταγμένες.

Πέμπτη απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{\Delta'\Gamma'}$. Έχουμε:

- $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B'}$
- $\overrightarrow{\Delta'\Gamma'}=\overrightarrow{\Delta'\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma'}=\overrightarrow{\Delta'A}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma'}$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι $\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Gamma'}$ ενώ $\overrightarrow{\Gamma B'}=\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Delta'A}$.

Άρα $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{\Delta'\Gamma'}$ και το $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι παραλληλόγραμμο.

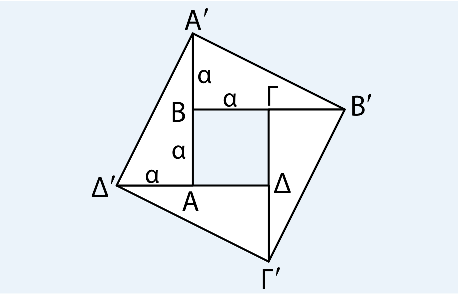
Η προηγούμενη απόδειξη μπορεί να γίνει ακόμα και στη Β΄ Γυμνασίου. Μπορεί εύκολα να οπτικοποιηθεί στον πίνακα με κατάλληλο χρωματισμό των ίσων διανυσμάτων.

Επέκταση της δραστηριότητας: από το τετράγωνο στο τετράγωνο

Πρόβλημα 2

4

Θεωρούμε την ίδια κατασκευή όπως στο πρόβλημα 1, αλλά το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου $A'B'\Gamma'\Delta'$;



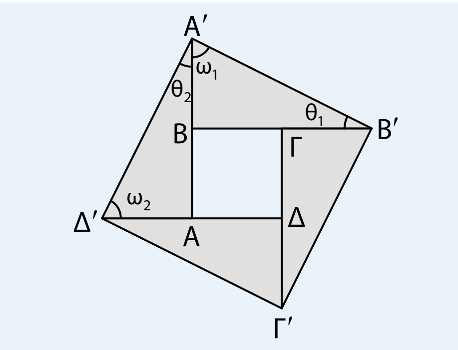
Απόδειξη 1: Ισότητα τριγώνων και ιδιότητες παραλληλογράμμων

Είναι ήδη γνωστό ότι το $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι παραλληλόγραμμο (πρόβλημα 1).
Η ολοκλήρωση της απόδειξης μπορεί να γίνει με χρήση της ισότητας των τριγώνων Α΄ΑΔ΄ και Α΄ΒΒ΄.
Προκύπτουν:

$$A'B'=A'\Delta'$$

και

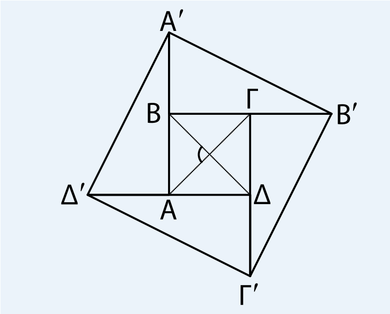
$$\Delta'\hat{A}'B'=\theta_2+\omega_1=\theta_1+\omega_1=90^\circ.$$



Εφόσον το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο και ρόμβος, θα είναι τελικά τετράγωνο.

Απόδειξη 2: Μετασχηματισμός (στροφή κατά 90°)

Διαπιστώνουμε ότι η στροφή γύρω από το Ο κατά γωνία 90^0 που μετασχηματίζει το Α στο Β, μετασχηματίζει επίσης το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ στο Β΄Γ΄Δ΄ Α΄.



Απόδειξη 3: Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Στη Β΄ Λυκείου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εσωτερικό γινόμενο, για να επαληθεύσουμε ότι η γωνία $Δ΄\hat{Α}΄Β΄$ είναι 90°.

$$\overrightarrow{Δ΄Α΄}\cdot\overrightarrow{Α΄Β΄}=\left(\overrightarrow{Δ΄Α}+\overrightarrow{ΑΑ΄}\right)\cdot\left(\overrightarrow{Α΄Β}+\overrightarrow{ΒΒ΄}\right)$$
$$=\overrightarrow{Δ΄Α}\cdot\overrightarrow{ΒΒ΄}+\overrightarrow{ΑΑ΄}\cdot\overrightarrow{Α΄Β}=2\left|\overrightarrow{Δ΄Α}\right|^2-2\left|\overrightarrow{Α΄Β}\right|^2$$
$$=2α^2-2α^2=0.$$

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι ήδη παραλληλόγραμμο (πρόβλημα 1) και ότι Α΄Β΄=Α΄Δ΄ (με χρήση ισότητας τριγώνων).

Απόδειξη 4: Μετρικές σχέσεις (Πυθαγόρειο θεώρημα)

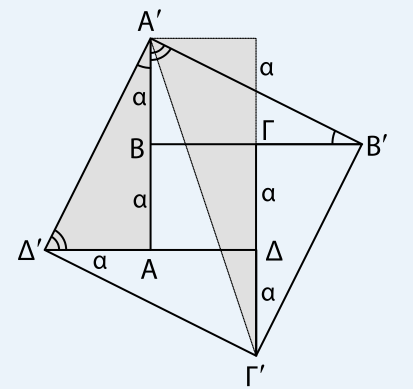
Το τρίγωνο Α′ΕΓ′ είναι ορθογώνιο στο Ε. Αν $ΑΒ=α$ βρίσκουμε:

$$Α΄Γ΄=\sqrt{α^2+9α^2}=α\sqrt{10}\,.$$

Ομοίως

$$Β΄Δ΄=α\sqrt{10}\,.$$

Επειδή το Α′Β′Γ′Δ′ είναι παραλληλόγραμμο (πρόβλημα 1), το οποίο έχει ίσες διαγώνιους, θα είναι ορθογώνιο. Επιπλέον, σύμφωνα με το θεώρημα του Πυθαγόρα στο ορθογώνιο τρίγωνο Α΄ΑΔ΄ βρίσκουμε:



$$A'\Delta' = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \alpha\sqrt{5}\,.$$

Ομοίως

$$A'B' = \alpha\sqrt{5}\,.$$

Έτσι το $A'B'\Gamma'\Delta'$ ως ορθογώνιο και ρόμβος θα είναι τελικά τετράγωνο.

Επέκταση της δραστηριότητας: από το ρόμβο στο τετράγωνο (τριγωνομετρία)

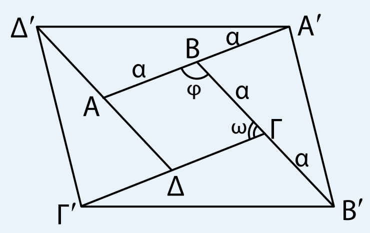
Πρόβλημα 3

Αν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι το $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι επίσης ρόμβος;

Ένα σχήμα επιτρέπει να διαπιστώσουμε ότι η προηγούμενη εικασία είναι ψευδής. Μπορούμε όμως να επεκταθούμε περισσότερο, θέτοντας το ακόλουθο πρόβλημα:

Πρόβλημα 4

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ (θεωρούμε την κατασκευή του προβλήματος 1). Με ποιες προϋποθέσεις το τετράπλευρο $A'B'\Gamma'\Delta'$ θα είναι επίσης ρόμβος;



Απόδειξη

Από το νόμο των συνημίτονων στο τρίγωνο $A'BB'$ έχουμε:

$$(A'B')^2 = (BA')^2 + (BB')^2 - 2(BA')\times(BB')\times\text{συν}\,(180^0 - \varphi)\,.$$

$$(A'B')^2 = 5\alpha^2 + 4\alpha^2 \cdot \text{συν}\,\varphi\,.$$

Ομοίως

$$(B'\Gamma')^2 = 5\alpha^2 + 4\alpha^2 \cdot \text{συν}\,\omega\,.$$

Επομένως το $A'B'\Gamma'\Delta'$ θα είναι ρόμβος, αν και μόνο αν $A'B' = B'\Gamma'$, δηλαδή αν ισχύει:

$$\text{συν}\,\varphi = \text{συν}\,\omega.$$

Επειδή $\varphi + \omega = 180°$ και $0 < \omega < 180°$, η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με $\varphi = \omega = 90°$, δηλαδή θα πρέπει το ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο.

Επέκταση της δραστηριότητας: από το παραλληλόγραμμο στον ρόμβο

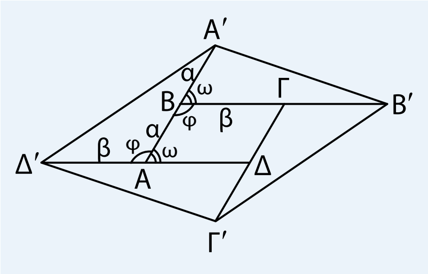
Με βάση τα προηγούμενα φυσική συνέπεια είναι το ακόλουθο πρόβλημα:

Πρόβλημα 5

Αν στο προηγούμενο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, είναι δυνατό το τετράπλευρο $Α'Β'Γ'Δ'$ να είναι ρόμβος;

Απόδειξη

Το $Α'Β'Γ'Δ'$ θα είναι ρόμβος, αν και μόνο αν $Α'Β'=Α'Δ'$.



$$\begin{cases}(Α'Β')^2=α^2+(2β)^2-2α\cdot(2β)\cdot συν\,ω\\(Α'Δ')^2=β^2+(2α)^2-2β\cdot(2α)\cdot συν\,φ\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix}(Α'Β')^2=α^2+4β^2-4αβ\cdot συν\,ω\\(Α'Δ')^2=β^2+4α^2+4αβ\cdot συν\,ω\end{matrix}$$

Έχουμε:

$$(Α'Β')^2=(Α'Δ')^2$$

$$\Leftrightarrow α^2+4β^2-4αβσυν\,ω=β^2+4α^2+4αβσυν\,ω$$

$$\Leftrightarrow 3β^2-3α^2-8αβσυν\,ω=0.$$

Η τελευταία σχέση παραπέμπει στη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$3\left(\frac{β}{α}\right)^2-8συν\,ω\cdot\frac{β}{α}-3=0 \quad ή \quad 3x^2-8συν\,ω\cdot x-3=0.$$

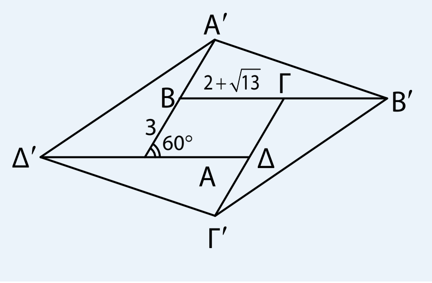
Έτσι, η ζητούμενη αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι:

$$x=\frac{β}{α}=\frac{4συνω+\sqrt{16συν^2\,ω+9}}{3}.$$

Για κάθε τιμή της γωνίας ω ορίζεται ένας λόγος ομοιότητας παραλληλογράμμων. Για παράδειγμα για $α=3$ και $ω=60°$, βρίσκουμε

$$β=2+\sqrt{13}\approx 5{,}6.$$

Η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα:



Και τέλος μια γεύση από τη χρήση των μιγαδικών

Παριστάνουμε με α, β, γ, δ, α_1 , β_1 , γ_1, δ_1 τις εικόνες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Α′Β′Γ′Δ′ στο μιγαδικό επίπεδο (αρχικό σχήμα). Θεωρούμε την απεικόνιση f του C^4 στο C^4 που απεικονίζει το $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ στο $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1)$. Έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\delta+\delta_1}{2} \\ \beta = \dfrac{\alpha+\alpha_1}{2} \\ \gamma = \dfrac{\beta+\beta_1}{2} \\ \delta = \dfrac{\gamma+\gamma_1}{2} \end{cases} \text{ που ισοδυναμεί: } \begin{cases} \alpha_1 = 2\beta - \alpha \\ \beta_1 = 2\gamma - \beta \\ \gamma_1 = 2\delta - \gamma \\ \delta_1 = 2\alpha - \delta \end{cases} \quad \textbf{(Σ)}$$

Ο πίνακας της f στην κανονική βάση του C^4 είναι αντιστρέψιμος, επομένως η f θα είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού η απεικόνιση F συνδέει σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′. Αν το Α′Β′Γ′Δ′ είναι δεδομένο, τότε βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\beta - \alpha_1 = 2(2\gamma-\beta_1)-\alpha_1 = 4\gamma - 2\beta_1 - \alpha_1 = 4(2\delta-\gamma_1)-2\beta_1-\alpha_1 \\ &= 8\delta - 4\gamma_1 - 2\beta_1 - \alpha_1 = 8(2\alpha-\delta_1)-4\gamma_1-2\beta_1-\alpha_1 \\ &= 16\alpha - 8\delta_1 - 4\gamma_1 - 2\beta_1 - \alpha_1 \\ &\Rightarrow \alpha = 16\alpha - 8\delta_1 - 4\gamma_1 - 2\beta_1 - \alpha_1 \\ &\Rightarrow 15\alpha = 8\delta_1 + 4\gamma_1 + 2\beta_1 + \alpha_1 \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{8\delta_1+4\gamma_1+2\beta_1+\alpha_1}{15} \ (\text{Β΄ μέσο Α′Α}),\ \text{κ.λπ.} \end{aligned}$$

Οι μιγαδικοί αριθμοί μάς παρέχουν μια ακόμη απόδειξη του προβλήματος 1. Έχουμε:

$$\text{ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο} \Leftrightarrow \frac{\beta+\delta}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2} \quad \textbf{(1)}$$

$$\text{Α′Β′Γ′Δ′ παραλληλόγραμμο} \Leftrightarrow \frac{\beta_1+\delta_1}{2} = \frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} \quad \textbf{(2)}$$

Με βάση το σύστημα **(Σ)**, οι **(1)** και **(2)** είναι ισοδύναμες και η F είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου των παραλληλογράμμων στον εαυτό του.