Η ΑΥΞΗΣΗ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΕΠΙΦΕΡΕΙ ΤΗΝ ΑΥΞΗΣΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ;

Γιώργος Δ. Κόσυβας, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ3 Α΄ Αθήνας
gkosyvas@yahoo.com

Περίληψη

Το εμβαδόν και η περίμετρος αποτελούν δύο αλληλένδετα γεωμετρικά μεγέθη. Όμως κατά τις συνήθεις προσεγγίσεις προεξάρχει η μηχανιστική εφαρμογή υπολογιστικών τύπων και η μονομερής μέτρηση μηκών ή επιφανειών. Στην παρούσα εργασία μελετούμε το είδος του συλλογισμού των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου σε ένα πρόβλημα που επικεντρώνεται στη μεταβολή που επέρχεται στην περίμετρο ενός πλέγματος τετραγώνων, καθώς αυξάνεται το εμβαδόν με την προσθήκη μετακινήσιμων τετραγωνικών μονάδων. Οι μαθητές βασιζόμενοι στις πρότερες γνώσεις τους, διερευνούν τους τρόπους μεταβολής της περιμέτρου σε σχέση με το εμβαδόν και ανακαλύπτουν ότι ανάλογα με την εκάστοτε θέση που καταλαμβάνουν τα τετράγωνα που προστίθενται στο πλέγμα προκύπτει αύξηση, ελάττωση ή διατήρηση της περιμέτρου.

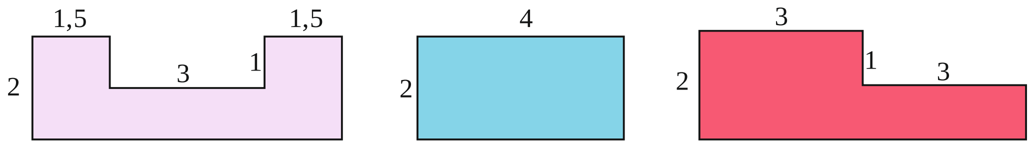
Θεωρητικό πλαίσιο

Το εμβαδόν και η περίμετρος αποτελούν δύο γεωμετρικά μεγέθη που κατέχουν σημαντική θέση στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Από την εμπειρία της διδασκαλίας γνωρίζουμε ότι οι περισσότεροι μαθητές του Γυμνασίου είναι σε θέση να υπολογίζουν την περίμετρο απλών ευθύγραμμων σχημάτων, ενώ δυσκολεύονται να διακρίνουν το ευθύγραμμο τμήμα από το μήκος του και την προσεγγιστική φύση της διαδικασίας μέτρησης. Συχνά η εύρεση της περιμέτρου περιορίζεται στη χρήση αλγεβρικών τύπων, χωρίς γεωμετρικό νόημα. Επιπλέον, ακόμα και μαθητές του Λυκείου δεν κατανοούν ότι το εμβαδόν είναι ο θετικός αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση μιας επιφάνειας με βάση μια επιλεγμένη μονάδα μέτρησης (αυθαίρετη ή συμβατική). Από την έρευνα προκύπτει ότι πολλοί μαθητές συγχέουν τις μονάδες μέτρησης μηκών και επιφανειών, τις μετρήσεις και δεν μπορούν να τις ορίσουν με ακρίβεια τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού (Stone, 1994 – Reinke, 1997 – Moyer, 2001). Για τους μαθητές το εμβαδόν είναι κάτι που βρίσκεται «μέσα», ενώ η περίμετρος είναι το «γύρω-γύρω» (Κολέζα, 2009 – Van De Walle, 2005). Για ορισμένους από αυτούς οι λέξεις εμβαδόν και επιφάνεια είναι συνώνυμες, ενώ για άλλους το εμβαδόν είναι αριθμός. Όμως για τους μαθητές η διάκριση ανάμεσα στο γεωμετρικό μέγεθος (επιφάνεια) και στη μέτρησή του (εμβαδόν) είναι ασαφής και οι συσχετίσεις εμβαδόν-επιφάνεια και εμβαδόν-αριθμός είναι ασύνδετες και ανεξάρτητες. Συνήθως η έννοια της επιφάνειας, καμπύλης ή επίπεδης, θεωρείται ως αυτονόητη και αγνοείται κατά τη διδασκαλία του εμβαδού. Η παράλειψή της αποτελεί σημαντική πηγή σύγχυσης για τους μαθητές (Menon, 1998 – Chappell & Thompson, 1999).

Οι μαθητές απομνημονεύουν τους αλγεβρικούς τύπους για τα εμβαδά και τις περιμέτρους διαφόρων επιπέδων σχημάτων χωρίς εννοιολογικές συνδέσεις μεταξύ τους με αποτέλεσμα να δυσκολεύονται στη χρήση τους. Ορισμένοι μαθητές για να βρουν το εμβαδόν ενός ορθογωνίου προσθέτουν τα μήκη των πλευρών ή για να διπλασιάσουν το εμβαδόν ενός τετραγώνου διπλασιάζουν το μήκος της πλευράς του (De Bock, 1998 – Kidman, 1999 – Kosyvas & Baralis, 2010). Οι μαθητές αυτοί ακολουθούν μια ανερμάτιστη προσθετική αντίληψη που υποδεικνύεται από τη διαίσθησή τους. Ο υπολογισμός του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου συνήθως δεν γίνεται με τη μέτρηση ή την εκτίμηση των τετραγωνικών μονάδων που το επικαλύπτουν. Ο πολλαπλασιασμός μήκος×πλάτος είναι αυθαίρετος και αναιτιολόγητος, ενώ η διαδικασία της μέτρησης παραμένει στην αφάνεια και ελάχιστα χρησιμοποιείται στη διδακτική πρακτική. Οι μαθητές μαθαίνουν να βρίσκουν εμβαδά πολλαπλασιάζοντας διαστάσεις και περιμέτρους προσθέτοντας μήκη. Όμως αυτές οι τεχνικές βρίσκονται σε απόσταση από την έννοιες που εκφράζουν το εμβαδόν και η περίμετρος (Lehrer et al., 1998 – Kidman & Nason, 2003).

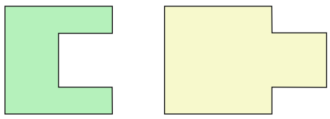
Επιπλέον, οι Stavy και Tirosh (2000) διαπίστωσαν ότι για ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών η αύξηση ή η ελάττωση του εμβαδού συνδέεται με την αντίστοιχη αύξηση ή ελάττωση της περιμέτρου. Επίσης παρατήρησαν την αντίληψη ορισμένων μαθητών ότι σχήματα με το ίδιο εμβαδόν έχουν και την ίδια περίμετρο και αντίστροφα (Stavy & Tirosh, 2000). Αυτές οι διαπιστώσεις οδήγησαν τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών στους διαισθητικούς κανόνες: *περισσότερο Α – περισσότερο Β* και *ίδιο Α – ίδιο Β* (Tsamir & Mandel, 2000). Οι κανόνες αυτοί επιβεβαιώνονται από

παρατηρήσεις των μαθητών κατά τη διδασκαλία. Στη συνέχεια θα εστιάσουμε σε επιλεγμένα παραδείγματα.
Ορισμένοι μαθητές έχουν την τάση να πιστεύουν ότι αν ελαττώσουμε την επιφάνεια ενός επίπεδου γεωμετρικού σχήματος τότε ελαττώνεται και η περίμετρος. Αυτό όμως δεν ισχύει πάντοτε.

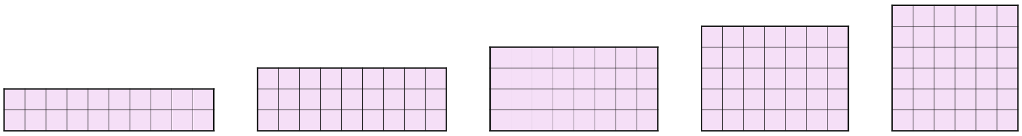


Ε=9, Π=18 Ε=8, Π=12 Ε=9, Π=16

Όπως φαίνεται από τα προηγούμενα σχήματα η μείωση του εμβαδού ενός ορθογωνίου διαστάσεων 6×2, με Ε=12 και Π=16, μπορεί να επιφέρει αύξηση, ελάττωση, ακόμα και διατήρηση της περιμέτρου.
Οι μαθητές εμπιστεύονται συχνά την οπτική αντίληψη για τη σύγκριση εμβαδών και περιμέτρων. Τα ακόλουθα ευθύγραμμα σχήματα είναι ισοπεριμετρικά. Όμως οι περισσότεροι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, όπως έχουμε διαπιστώσει, πιστεύουν ότι το δεξιό σχήμα έχει μεγαλύτερη περίμετρο από το αριστερό.



Το πρώτο σχήμα γίνεται αντιληπτό ως ένα μεγάλο τετράγωνο από το οποίο έχει αποσπαστεί ένα μικρό τετράγωνο και το δεύτερο ως ένα μεγάλο τετράγωνο αυξημένο κατά ένα μικρό. Έτσι οι μαθητές για να βρουν την περίμετρο του πρώτου σχήματος αφαιρούν από την περίμετρο του μεγάλου τετραγώνου την περίμετρο του μικρού, ενώ στο δεύτερο σχήμα προσθέτουν τις περιμέτρους των δύο τετραγώνων. Οι μαθητές αυτοί μεταφέροντας την πρόσθεση και την αφαίρεση εμβαδών στις περιμέτρους, απαντούν λανθασμένα. Παρότι η αντιληπτική πρόσθεση δύο μη αλληλεπικαλυπτόμενων σχημάτων αντιστοιχεί στην πρόσθεση των εμβαδών τους, δεν ισχύει το ίδιο για τις περιμέτρους τους.
Πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι αν διατηρήσουμε σταθερή την περίμετρο ενός ορθογωνίου, τότε το εμβαδόν δεν μεταβάλλεται. Η διερεύνηση αυτού του ισοπεριμετρικού προβλήματος με την προσκόμιση αντιπαραδειγμάτων οδηγεί εύκολα στη διάψευση του ισχυρισμού και παρέχει ενδείξεις ότι μέγιστο εμβαδόν έχει το τετράγωνο (Κόσυβας, 1996).



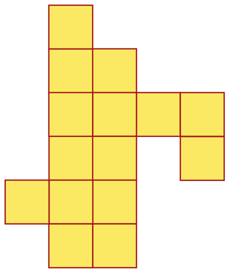
Π=24, Ε=20 Π=24, Ε=27 Π=24, Ε=32 Π=24, Ε=35 Π=24, Ε=36

Οι περισσότεροι από τους μαθητές που αρχίζουν τη φοίτησή τους στο Γυμνάσιο έχουν αποκτήσει αποσπασματικές εμπειρίες για τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου από το Δημοτικό σχολείο. Η εκμάθηση ορισμένων αλγεβρικών τύπων και η εργαλειακή εφαρμογή τους σε πρωτοτυπικές καταστάσεις συντελείται χωρίς εννοιολογική κατανόηση. Παρότι πολλοί μαθητές του Γυμνασίου, μπορούν να λύνουν προβλήματα με εμβαδά και περιμέτρους, δεν έχουν πλήρως εμβαθύνει στους τρόπους με τους οποίους συνυφαίνονται οι δύο έννοιες. Συγχέουν τους τύπους και αντί για περιμέτρους βρίσκουν εμβαδά και αντίστροφα (Kouba et al., 1988 –Binswanger, 1988 – Moyer, 2001). Η σύγχυση αυτή έχει ριζώσει με τη δύναμη της συνήθειας και οφείλεται κατά βάση στις λανθασμένες αναπαραστάσεις των μαθητών και στις πρότερες διαισθητικές αντιλήψεις για τα γεωμετρικά σχήματα και τις ιδιότητές τους (Allerton & Nunes, 1994 – Baturo & Nason,1996).

Η παρούσα εργασία

Σ' αυτή την εργασία μελετούμε τα επίπεδα συλλογισμού των μαθητών καθώς αυτοί διερευνούν τη σχέση εμβαδού-περιμέτρου. Ειδικότερα, αναθέσαμε ένα πρόβλημα που εστιάζει στη μεταβολή που επέρχεται στην περίμετρο ενός επίπεδου γεωμετρικού σχήματος καθώς αυξάνουμε το εμβαδόν του προσθέτοντας τετραγωνικές μονάδες με τη μορφή μετακινήσιμου χειραπτικού υλικού. Το αρχικό σχήμα είναι μέρος ενός τετραγωνικού πλέγματος που οι μονάδες του δεν σχηματίζουν ένα πλήρες ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Οι μαθητές βασιζόμενοι στις πρότερες γνώσεις τους αναπτύσσουν τις δικές τους ιδέες για τον τρόπο συμμεταβολής της περιμέτρου σε συνάρτηση με το εμβαδόν. Στην έρευνα έλαβαν μέρος οι μαθητές ενός τμήματος της Β΄ Γυμνασίου. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Οκτώβριο του 2011 στο Βαρβάκειο Γυμνάσιο Αθηνών. Παρατηρήθηκαν και καταγράφηκαν οι συλλογισμοί των μαθητών κατά τη φάση της ομαδικής διερεύνησης του προβλήματος και οι μαθηματικές αλληλεπιδράσεις τους κατά τη συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη. Η επεξεργασία των δεδομένων είναι ποιοτική και περιλαμβάνει την ανάλυση περιεχομένου της κατάστασης επικοινωνίας καθώς και τη συνεξέταση των γραπτών εργασιών κατά τη διάρκεια της λύσης του προβλήματος (Kosyvas, 2010 – Κόσυβας, 2011α – Κόσυβας, 2011β).

Το πρόβλημα: *Η πλευρά των τετραγώνων του διπλανού σχήματος είναι 1cm. Σ' αυτό το σχήμα προσθέτουμε χάρτινα τετράγωνα τα οποία αγγίζουν μία τουλάχιστον πλευρά του σχήματος. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός τετραγώνων που πρέπει να προσθέσουμε ώστε η περίμετρος να γίνει 28 cm;*

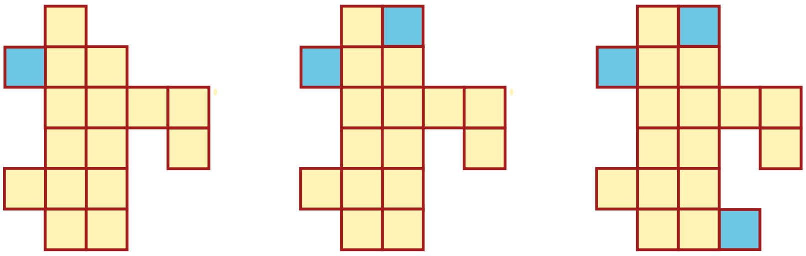


Κάθε ομάδα μαθητών διαθέτει χάρτινα τετραγωνάκια για τη διερεύνηση. Με τη χρήση του χειραπτικού υλικού και του τετραγωνικού πλέγματος οι μαθητές καλούνται να εξετάσουν τις σχέσεις εμβαδού-περιμέτρου και να καταλήξουν σε συμπεράσματα. Κατά τη συζήτηση για την κατανόηση του προβλήματος διευκρινίζεται από τον ερευνητή ότι τα προστιθέμενα τετράγωνα εφάπτονται σε μια τουλάχιστον πλευρά του αρχικού ή του μεταβαλλόμενου σχήματος.

Παρουσίαση και συζήτηση των αποτελεσμάτων

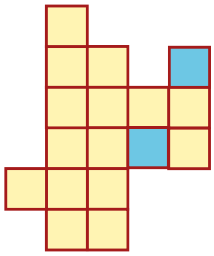
Η διάρκεια του πειραματισμού ήταν μια διδακτική ώρα. Οι μαθητές αφού έλυσαν το πρόβλημα σε τετραμελείς ομάδες, παρήγαγαν διαφορετικές λύσεις τις οποίες υποστήριξαν στην τάξη. Αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους και προόδευσαν στο επίπεδο της γεωμετρικής τους σκέψης. Παρακάτω παρουσιάζουμε μια σύνοψη των αποτελεσμάτων από τρεις ομάδες που διαπιστώσαμε διαφορετικό είδος συλλογισμού.

Στην **πρώτη τετραμελή ομάδα** ξεκίνησαν προσθέτοντας διαδοχικά 3 χάρτινα τετράγωνα. Όταν μέτρησαν την περίμετρο του τρίτου σχήματος που δημιούργησαν διαπίστωσαν ότι ήταν 28 μονάδες μήκους. Οι εν λόγω μαθητές παρήγαγαν μια εικονιστική λύση στο πρόβλημα εστιάζοντας στο σχήμα ως οπτικό αντικείμενο.



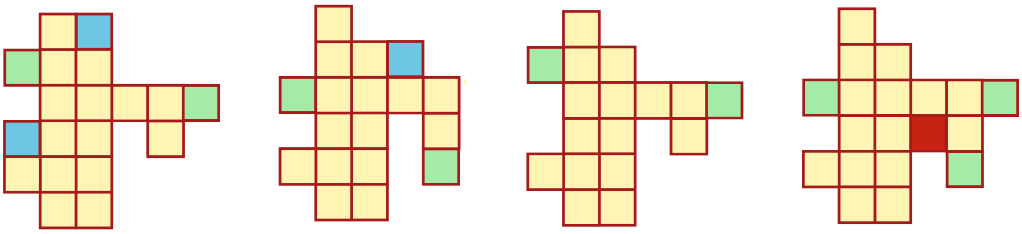
Εργάστηκαν με τα συγκεκριμένα υλικά (χάρτινα τετράγωνα) χρησιμοποιώντας δοκιμή και πλάνη. Έτσι «έπεσαν» πάνω στη σωστή λύση που είναι 28 μονάδες μήκους. Δεν παρατήρησαν ότι η προσθήκη του άνω δεξιού γωνιακού τετραγώνου είναι περιττή, αφού δεν επιφέρει μεταβολή στην περίμετρο. Θα αρκούσε δηλαδή να είχαν προσθέσει δύο μη γειτονικά τετράγωνα που να εφάπτονται σε μία μόνο πλευρά του αρχικού σχήματος.

Στη **δεύτερη ομάδα** οι μαθητές επιχείρησαν να περιγράψουν τις αλλαγές στην περίμετρο με νοερούς υπολογισμούς πάνω στα μήκη των πλευρών. Ισχυρίστηκαν ότι προσθέτοντας ένα τετράγωνο στην εσοχή, η περίμετρος αυξάνεται κατά μία μονάδα μήκους και προσθέτοντας ένα τετράγωνο που αγγίζει μία πλευρά, η περίμετρος αυξάνεται κατά 3 μονάδες. Συμπτωματικά βρήκαν το σωστό αποτέλεσμα ακολουθώντας όμως λανθασμένους ισχυρισμούς.



Μάντεψαν το αποτέλεσμα χωρίς να αγγίξουν καθόλου τα χάρτινα τετράγωνα. Αν απαριθμούσαν την περίμετρο του νέου σχήματος θα διαπίστωναν ότι είναι 24. Χρησιμοποίησαν ως οπτικό στήριγμα το αρχικό σχήμα χωρίς να αισθανθούν την ανάγκη να τοποθετήσουν τετράγωνα και να επαληθεύσουν το αποτέλεσμα. Δεν συνυπολόγισαν τα τετράγωνα που καλύπτουν τις επαφές με τον ορθό τρόπο. Η εν λόγω ομάδα, με νοητικούς χειρισμούς στα μήκη των πλευρών προσπαθούσε να μαντέψει τη μεταβολή στην περίμετρο. Παρότι δεν έδωσε σωστή λύση συσχέτισε γεωμετρικές και αριθμητικές όψεις.

Η **τρίτη ομάδα** τοποθέτησε μπλε τετράγωνα στις γωνίες και πράσινα σε θέσεις που εφάπτονται μόνο στη μια πλευρά. Οι μαθητές τοποθέτησαν δύο μπλε τετράγωνα στις γωνίες και μέτρησαν την εξωτερική κλειστή τεθλασμένη γραμμή για να βρουν την περίμετρο. Τότε παρατήρησαν ότι κατά την τοποθέτηση ενός τετραγώνου σε μια γωνία καλύπτονται δύο πλευρές του αρχικού τετραγώνου με δύο πλευρές του νέου τετραγώνου. Στη συνέχεια αποφάσισαν να τοποθετήσουν πράσινα τετράγωνα που εφάπτονται σε μια πλευρά του σχήματος και βρήκαν ότι κάθε τετράγωνο προσθέτει δύο μονάδες στην περίμετρο. Χρησιμοποιώντας το σχήμα οι μαθητές ανακάλυψαν ότι το πρόβλημα έχει πολλές λύσεις. Τοποθέτησαν δύο πράσινα μη γειτονικά τετραγωνάκια που εφάπτονται σε μια πλευρά γύρω από το σχήμα διατηρώντας ένα ή δύο μπλε τετράγωνα στις γωνίες.



Αξιοσημείωτη είναι η ανακάλυψη των μαθητών στην περίπτωση που καλύπτεται η εσοχή του σχήματος. Βρήκαν ότι το κόκκινο τετράγωνο στην εσοχή μειώνει την περίμετρο κατά δύο και από 24 γίνεται 22. Στην περίπτωση αυτή για να προκύψει περίμετρος 28 χρειάζεται η προσθήκη τριών μη γειτονικών τετραγώνων αρκεί να εφάπτεται μόνο μια πλευρά τους στο αρχικό σχήμα.

Οι μαθητές σκέφτονταν με βάση ιδιότητες και σχέσεις. Συνδύασαν με άριστο τρόπο τη σκέψη πάνω στο γεωμετρικό σχήμα με τον αριθμητικό υπολογισμό των πλευρών. Η κατανόηση του σχήματος δεν ήταν απλώς αντιληπτική, αλλά εννοιολογική. Έδωσαν πολλές λύσεις στο πρόβλημα και βρήκαν ότι ο μικρότερος αριθμός τετραγώνων που θα πρέπει να προστεθεί για να γίνει η περίμετρος 28 είναι 2 τετράγωνα. Επιπλέον κατέληξαν στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν ένα νέο τετράγωνο αγγίζει το σχήμα μόνο σε μία πλευρά, η περίμετρος αυξάνεται κατά 2.
- Αν το αγγίζει σε δύο πλευρές δεν υπάρχει καμία αύξηση.
- Αν χωράει σε μια εσοχή και αγγίζει τρεις πλευρές, η περίμετρος μειώνεται κατά 2.

Η συζήτηση πάνω στο σχήμα βοήθησε τους μαθητές της ομάδας να διακρίνουν σχέσεις ανάμεσα στο εμβαδόν και την περίμετρο, να ξεπεράσουν τις δυσκολίες τους και να προοδεύσουν. Εργάστηκαν από κοινού και διαπίστωσαν ότι στο πρόβλημα υπάρχουν πολλαπλές λύσεις. Βρήκαν ότι ο μικρότερος αριθμός τετραγώνων τα οποία θα μπορούσαν να προσθέσουν στο τετραγωνικό πλέγμα για να φτάσουν την περίμετρο των 28 τετραγώνων ήταν δύο.

Συμπεράσματα

Το διδακτικό πείραμα βοήθησε τους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου να αποσαφηνίσουν τις αλληλένδετες έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου χωρίς να προσφύγουν σε μονομερείς και ασύνδετες ενασχολήσεις μηκών και επιφανειών. Οι εν λόγω μαθητές χρησιμοποίησαν χειραπτικά μέσα, ανέπτυξαν πλούσιες μαθηματικές αλληλεπιδράσεις, διερεύνησαν σχέσεις και συνεξέτασαν σε αντιδιαστολή τον τρόπο μεταβολής της περιμέτρου σε συνάρτηση με το εμβαδόν, αρθρώνοντας άτυπα παραγωγικά επιχειρήματα με εύκαμπτους αρμούς. Έτσι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ανάλογα με την εκάστοτε θέση που καταλαμβάνουν τα προστιθέμενα τετράγωνα στο τετραγωνικό πλέγμα προκύπτει αύξηση, ελάττωση ή διατήρηση της περιμέτρου.

Η ανάθεση του γεωμετρικού προβλήματος και το διερευνητικό περιβάλλον που δημιουργήσαμε συνέβαλαν στην ενεργητική εμπλοκή των μαθητών για τη λύση. Η κατάσταση προβληματισμού διευκόλυνε την ανακάλυψη αριθμητικών σχέσεων ανάμεσα στο εμβαδόν και την περίμετρο και παρείχε στους μαθητές ευκαιρίες να διατυπώνουν εικασίες και να αιτιολογούν τις παρατηρήσεις τους. Ήταν μια κατάλληλη δραστηριότητα για την ανάπτυξη της πολυαισθητήριας και πολυλειτουργικής μάθησης και την ανάδειξη πολυεπίπεδων ικανοτήτων σε διαφορετικά στρώματα γεωμετρικής σκέψης. Ειδικότερα, η χρήση εποπτικού και χειραπτικού υλικού ενίσχυσε την κατανόηση των μαθητών και ευνόησε την μεταξύ τους επικοινωνία προσφέροντας πλούσιες ευκαιρίες για εποικοδομητικές συζητήσεις σε ολόκληρη την τάξη. Τα χειραπτικά υλικά ωφέλησαν την προσέγγιση της γνώσης από τους μαθητές τα οποία βοήθησαν στις διερευνήσεις και αιτιολογήσεις τους. Οι μαθητές αναστοχάστηκαν το περιεχόμενο των διαλόγων, εμβάθυναν στις έννοιες και προόδευσαν. Έτσι, προτού εισαχθούν στους τύπους της περιμέτρου και του εμβαδού, κατανόησαν ότι οι έννοιες αυτές είναι συνυφασμένες μεταξύ τους και απέκτησαν πλούσιες αναπαραστάσεις.

Βιβλιογραφία

Allerton, M. & Nunes, T. (1994). A New Way to Measure Area: Another Brick in the Wall. *Junior Education*. Available at: http://teacher.scholastic.com/lessonrepro/lessonplans/anewtmar.htm

Baturo, A. & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 235-268.

Binswanger, R. (1988). Discovering Perimeter and Area with Logo, *Arithmetic Teacher*, 36, 18-24.

Chappell, M. F & Thompson, D.R. (1999). Take Time for Action: Perimeter or area? Which measure it is? *Mathematics Teaching in the Middle School*. 5(1), p. 20-23.

De Bock, D., Verschaffel, L. & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 65-83.

Kidman, G. & Nason, R. (2003). Construction of knowledge about measurement of area within Integrated Learning System (ILS) environments. Available at: http://math.unipa.it/~grim/AKidman.PDF

Kidman, G. C. (1999). Grade 4, 6 and 8 Students' Strategies in Area Measurement. In J. M. Truran & K. M. Truran (Eds), Making the Difference (*Proceedings of the 22nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, pp. 298–305). MERGA, Adelaide.

Kosyvas, G. & Baralis, G. (2010). Les stratégies des élèves d'aujourd'hui sur le problème de la duplication du carré. *Repères-IREM*, 78, pp. 13-36.

Kosyvas, G. (2010). Problèmes ouvertes: notion, catégories et difficultés, Annales de Didactique et des Sciences cognitives, 15, IREM de Strasbourg, 43-71.

Kouba, V.L., Brown, C.A., Carpenter, T.P., Lindquist, M.M., Silver, E.A., & Swafford, J.O. (1988). Results of the 4th NAEP Assessment of Mathematics: Measurement, geometry, data interpretation, attitudes and other topics. *Arithmetic Teacher*, 35(9), 10-16.

Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer and D. Chazan (Eds.). *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137-167). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Menon, R. (1998). Preservice teachers' understanding of perimeter and area. *School Science and Mathematics,* 98(7), 361-368.

Moyer, P. S. (2001). Using representations to explore perimeter and area. *Teaching Children Mathematics*, 8, 52-59.

Reinke, K. S. (1997). Area and perimeter: Prospective teachers‟ confusion. *School Science and Mathematics,* 97, 75-77.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). How students (mis)understand science and mathematics: Intuitive rules. New York: Teachers College Press.

Stone, M. E. (1994). Teaching relationships between area and perimeter with the geometer's sketchpad. *The Mathematics Teacher,* 87, 590-594.

Tsamir, P. & Mandel, N. (2000). The intuitive rule same A-same B: The case of area and perimeter. In T. Takahara, & M. Koyama (Eds.), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol 4, pp. 225-232). Hiroshima: Japan.

Van De Walle, J. A. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία*. Επιμ. Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης, μτφρ. Α. Αλεξανροπούλου & Β. Κομπορόζος. Αθήνα: Τυπωθήτω – Γ. Δαρδανός.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.

Κόσυβας, Γ. (1996). *Η πρακτική του ανοιχτού προβλήματος στο δημοτικό σχολείο, γόνιμος χαρακτήρας και ανατροπή των παγιωμένων αντιλήψεων*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Κόσυβας, Γ. (2011α). Είδη συλλογισμού κατά την ομαδοσυνεργατική λύση του προβλήματος του κουμπαρά στην Α΄ Γυμνασίου, *Ευκλείδης Γ΄*, **74**, 56-82, Αθήνα: ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (2011β). Η άτυπη μοντελοποίηση του προβλήματος των χειραψιών, *Πρακτικά 28ου συνεδρίου της ΕΜΕ*, 281-306, ΕΜΕ.