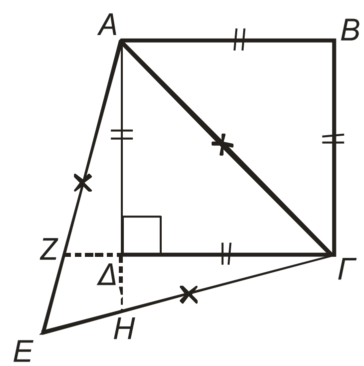
ΕΛΕΥΘΕΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Κόσυβας Γιώργος, Μαθηματικός Δ.Ε
e-mail: gkosyvas@yahoo.com

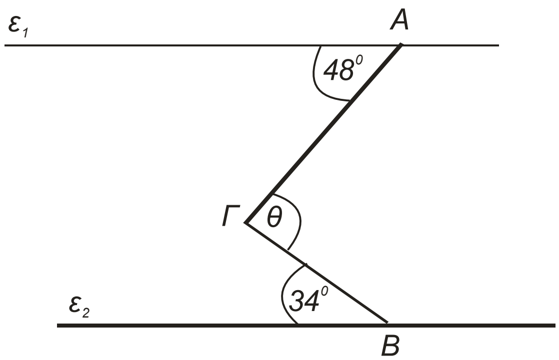
Αποδεικτικός συλλογισμός με γωνίες

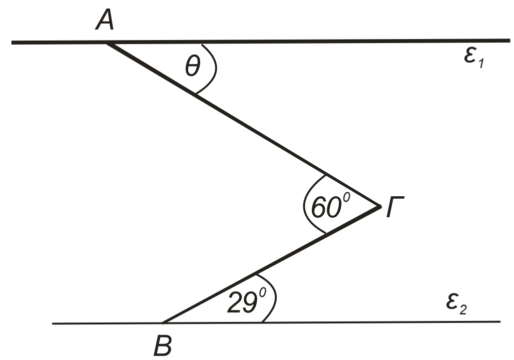
(κατακορυφήν γωνίες, παραλληλία, άθροισμα γωνιών τριγώνου κλπ.)

1. *Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΕ το οποίο περιέχει το σημείο Δ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Ζ και η προέκταση της ΑΔ τέμνει την ΓΕ στο Η. Να υπολογίσετε τις γωνίες* $E\hat{A}\Delta$, $A\hat{Z}\Delta$ *και* $A\hat{H}E$.

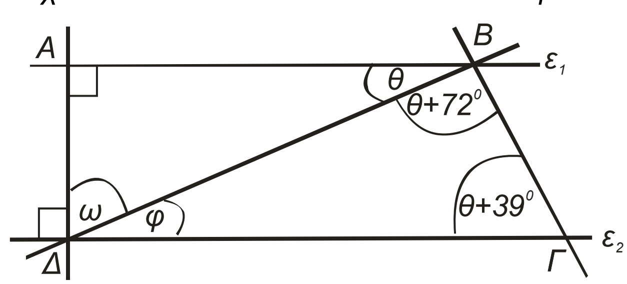


2. *Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τη γωνία* $\hat{\theta}$. *(δίνεται* $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ *)*

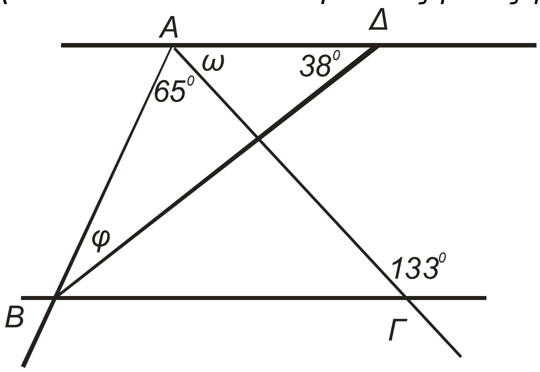




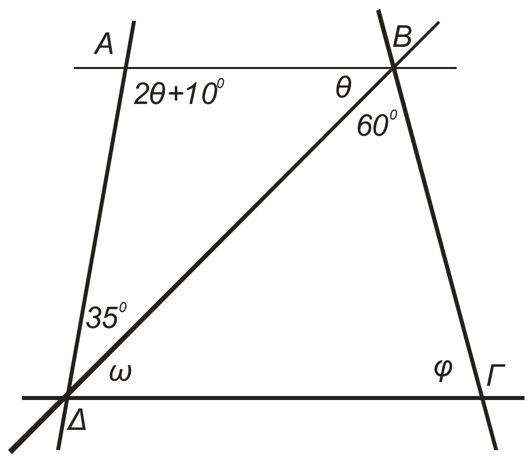
3. *Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν: ΑΒ//ΓΔ και* $A\Delta \perp AB$. *Να υπολογίσετε τις γωνίες θ, φ και ω.*



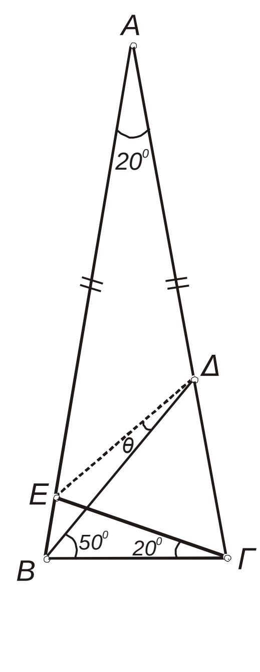
4. *Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν: ΑΔ//ΒΓ. Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω.*



5. *Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν: ΑΒ//ΓΔ. Να υπολογίσετε τις γωνίες θ, φ και ω.*



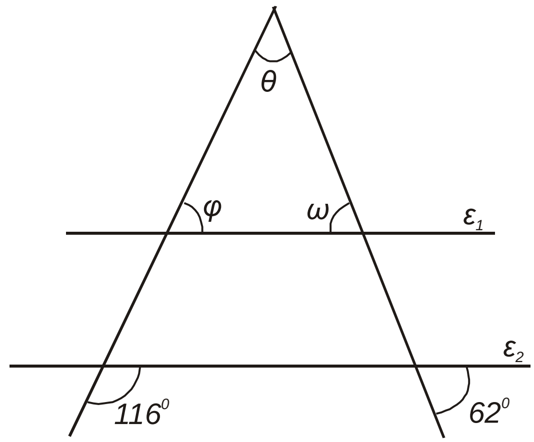
6. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{A} = 20^0$. Από τις κορυφές Β και Γ φέρνουμε εσωτερικές ημιευθείες έτσι ώστε $\Gamma\hat{B}\Delta = 50^0$ και $E\hat{\Gamma}B = 20^0$. Να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}B = \theta$.* ***(Απ. Αποδείξτε πρώτα ότι τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ είναι ισοσκελή. $\theta = 10^0$)***



7. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}-\hat{\Gamma}=90^0$. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ σχηματίζει γωνία 45^0 με την πλευρά ΒΓ.*

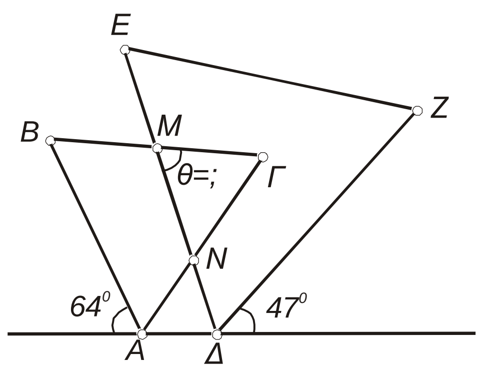
8. *Στο παρακάτω σχήμα έχουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και σημειώνονται δύο γνωστές γωνίες.*

- ***α)*** *Να υπολογίσετε τη γωνία **φ** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.*
- ***β)*** *Να υπολογίσετε τη γωνία **ω** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.*
- ***γ)*** *Να υπολογίσετε τη γωνία **θ** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.*

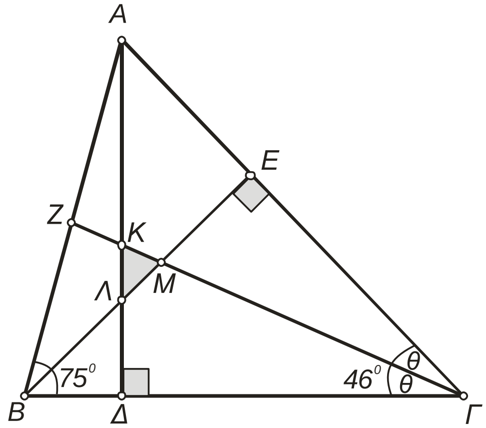


9. *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) η γωνία κορυφής είναι $\theta=36^0$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.*

22. *Στο ακόλουθο σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισόπλευρα. Πόσες μοίρες είναι η γωνία θ;*

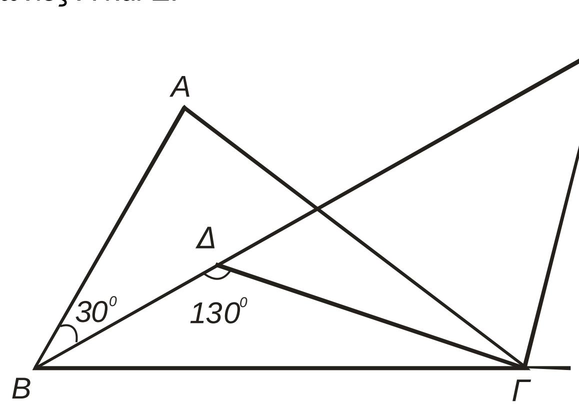


23. *Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ και τη διχοτόμο ΓΖ. Να υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ.*



(Απ. $\hat{K} = \hat{M} = 44^0$ ***και*** $\hat{\Lambda} = 15^0$ ***)***

24. *Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ του ακόλουθου σχήματος η ΒΔ είναι διχοτόμος της εσωτερικής γωνίας Β, η ΓΔ διχοτόμος της εσωτερικής γωνίας Γ και η ΓΕ διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Γ, να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Ε.*

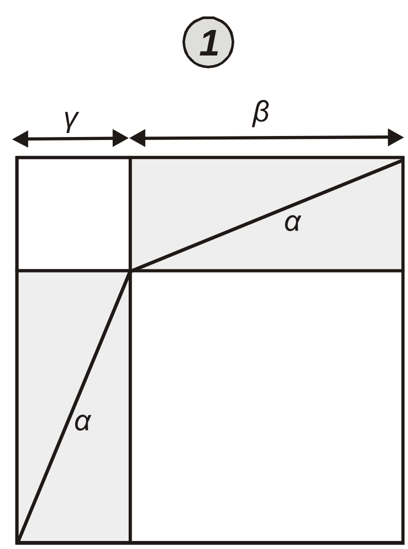


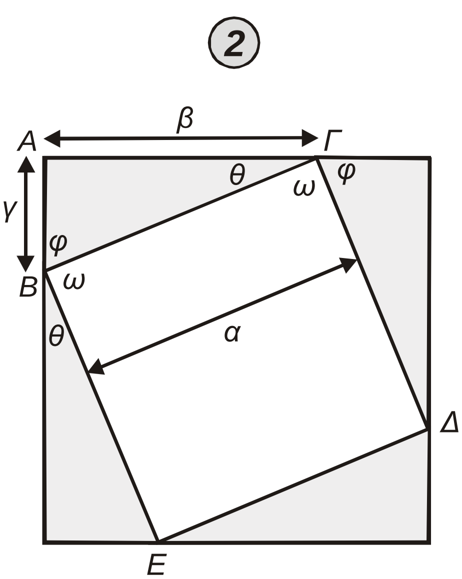
(Απ. $\hat{A} = 80^0$ ***,*** $\hat{E} = 40^0$ ***)***

Αποδεικτικός συλλογισμός με μήκη και εμβαδά

(Πυθαγόρειο θεώρημα, αντίστροφο και πορίσματα του Π. Θ., κατασκευές)

1. ***Πρώτη απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος: διαμέριση και απόδειξη της ισότητας με αφαίρεση****: Το πρώτο τετράγωνο, με μήκος πλευράς β+γ, διαμερίζεται σε 4 ορθογώνια τρίγωνα ίσα με το δεδομένο και 2 τετράγωνα με πλευρές τις καθέτους. Το δεύτερο τετράγωνο, πάλι με μήκος πλευράς β+γ, χωρίζεται σε ένα τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα και 4 τρίγωνα ίσα με το δεδομένο. Αν από ίσα αφαιρέσουμε ίσα προκύπτει ότι το τετράγωνο που έχει πλευρά την υποτείνουσα έχει εμβαδό ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων που σχηματίζονται πάνω στις κάθετες πλευρές.*





Σύντομα η απόδειξη έχει ως εξής:

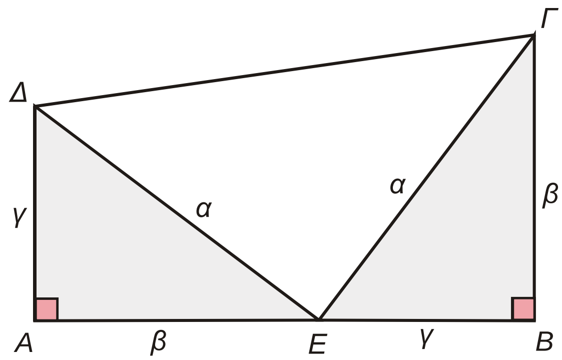
- *Τα τέσσερα τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν, οπότε στα δύο σχήματα τα γραμμοσκιασμένα εμβαδά είναι το ίσα.*
- *Επομένως και τα μη γραμμοσκιασμένα εμβαδά είναι επίσης ίσα.*

Στο σχήμα 1 αυτό το εμβαδό είναι $\beta^2+\gamma^2$.

Στο σχήμα 2 αυτό το εμβαδό είναι α^2 *εφόσον το ΒΓΔΕ είναι τετράγωνο (γιατί;).*

- *Άρα:* $\boldsymbol{\alpha^2=\beta^2+\gamma^2}$.

2. ***Δεύτερη απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος***: *Το ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές α, β, γ είναι σχεδιασμένο δύο φορές. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΕΒΓ έχουν τοποθετηθεί όπως δείχνει το ακόλουθο σχήμα (Α, Ε, Β συνευθειακά).*

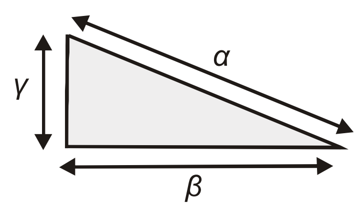


Για την απόδειξη να ακολουθήσετε τα ακόλουθα βήματα:

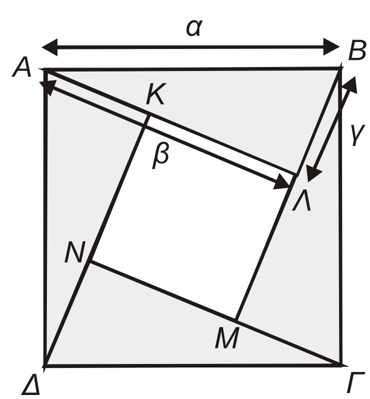
- *Τι είδους είναι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ποιο είναι το εμβαδόν του;*
- *Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ αποτελείται από τρία τρίγωνα: Τι είδους είναι καθένα από αυτά τα τρίγωνα και γιατί; Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, θεωρώντας το ως άθροισμα των τριών τριγώνων.*
- *Να συγκρίνετε τα προηγούμενα αποτελέσματα και να συμπεράνετε το πυθαγόρειο θεώρημα.*

3. ***Τρίτη απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος (του Ινδού Μπασκάρα)***: *Το σχήμα* ***1*** *δείχνει τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. Το σχήμα* ***2*** *αποτελείται από τέσσερα ορθογώνια, καθένα από τα οποία είναι ίσα με το δεδομένο ορθογώνιο τρίγωνο και ένα τετράγωνο πλευράς β-γ.*

1



2

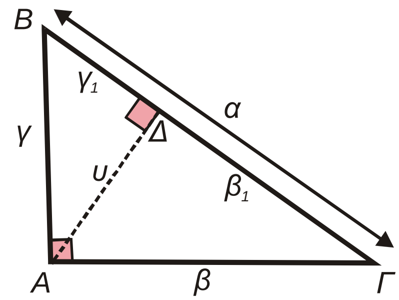


Για την απόδειξη να ακολουθήσετε τα ακόλουθα βήματα:

- *Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.*
- *Το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.*
- *Το τετράγωνο ΑΒΓΔ αποτελείται από τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα και το τετράγωνο ΚΛΜΝ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, θεωρώντας το ως άθροισμα των προηγούμενων σχημάτων.*

- *Άρα:* $\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$. *Γιατί;*

4. Τέταρτη απόδειξη του Π. Θ. με όμοια τρίγωνα

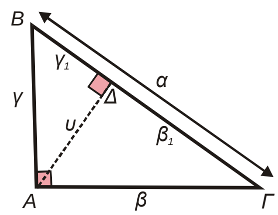


$$\left.\begin{cases} ΑΓΔ \sim ΑΒΓ \Rightarrow \dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \beta^2 = \alpha\beta_1 \\ ΑΒΔ \sim ΑΒΓ \Rightarrow \dfrac{\gamma}{\gamma_1} = \dfrac{\alpha}{\gamma} \Rightarrow \gamma^2 = \alpha\gamma_1 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta_1 + \alpha\gamma_1 = \alpha(\beta_1 + \gamma_1) = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2$$

Άρα: $\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$

5. Πορίσματα Πυθαγορείου θεωρήματος:



Πόρισμα 1: *Το γινόμενο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτήν, είναι ίσο με το γινόμενο των δύο καθέτων πλευρών του:* $\boldsymbol{\alpha \cdot \upsilon = \beta \cdot \gamma}$ *(**Υπόδειξη**: να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ με δύο διαφορετικούς τρόπους).*

Πόρισμα 2: *Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα:* $\boldsymbol{\upsilon^2 = \beta_1 \cdot \gamma_1}$.

***Απόδειξη**:*

$$\begin{cases} Π.Θ.\ \text{στο τριγ. } ΑΒΔ \Rightarrow \gamma^2 = \upsilon^2 + \gamma_1^2 \\ Π.Θ.\ \text{στο τριγ. } ΑΓΔ \Rightarrow \beta^2 = \upsilon^2 + \beta_1^2 \end{cases} \Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\upsilon^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 .$$

Από το Π. Θ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Οπότε έχουμε: $\alpha^2 = 2\upsilon^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2$. *Όμως:* $\alpha = \beta_1 + \gamma_1$. *Επομένως:*

$$(\beta_1 + \gamma_1)^2 = 2\upsilon^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon^2 = \beta_1 \cdot \gamma_1}.$$

Πόρισμα 3: *Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή αυτής της κάθετης προς την υποτείνουσα, δηλαδή :* $\boldsymbol{\beta^2 = \alpha \cdot \beta_1}$ *και* $\boldsymbol{\gamma^2 = \alpha \cdot \gamma_1}$.

Απόδειξη του $\boldsymbol{\beta^2 = \alpha \cdot \beta_1}$ **:**

$$\begin{cases} \text{Π.Θ. στο τριγ. } ΑΓΔ \Rightarrow \beta^2 = \upsilon^2 + \beta_1^2 \\ \text{Τριγ. } ΑΒΓ \Rightarrow \upsilon^2 = \beta_1 \cdot \gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \beta^2 = \beta_1 \cdot \gamma_1 + \beta_1^2 \Rightarrow \beta^2 = \beta_1 \cdot (\gamma_1 + \beta_1) \Rightarrow \boldsymbol{\beta^2 = \beta_1 \cdot \alpha}.$$

6. ***Πυθαγόρειες τριάδες:*** *Αν τρεις φυσικοί αριθμοί α, β, γ ικανοποιούν την εξίσωση* $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ *, τότε σχηματίζουν μια «Πυθαγόρεια τριάδα».*

Εύρεση όλων των πρωτογενών πυθαγόρειων τριάδων (Ευκλείδης)*: Αν τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου είναι* $\kappa^2 + \lambda^2$, $\kappa^2 - \lambda^2$ *και 2κλ, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο. (κ,λ θετικοί ακέραιοι με τον έναν άρτιο και τον άλλο περιττό και κ>λ).*

α) *Να επαληθεύσετε ότι οι τριάδες 8, 15, 17 και 5, 12, 13 είναι πυθαγόρειες.*

β) *Να σχηματίσεις πυθαγόρειες τριάδες και να επαληθεύσεις το Πυθαγόρειο θεώρημα για τις ακόλουθες περιπτώσεις.*

i) κ=2, λ=1 ii) κ=5, λ=3 iii) κ=8, λ=5

γ) *Δίνονται δύο αριθμοί. Να προσδιορίσεις τον τρίτο έτσι ώστε να σχηματίσεις πυθαγόρειες τριάδες.*

i) 119 και 120 ii) 240 και 289 iii) 65 και 97 iv) 13.500 και 12.709

δ) *Να επαληθεύσετε ότι οι ακόλουθες τριάδες είναι πυθαγόρειες:*

35	65	33	77	119	39	45	55	7
12	72	56	36	120	80	28	48	24
37	97	65	85	169	89	53	73	25

Γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι τις Πυθαγόρειες τριάδες; *(αμφισβητούμενο θέμα)*

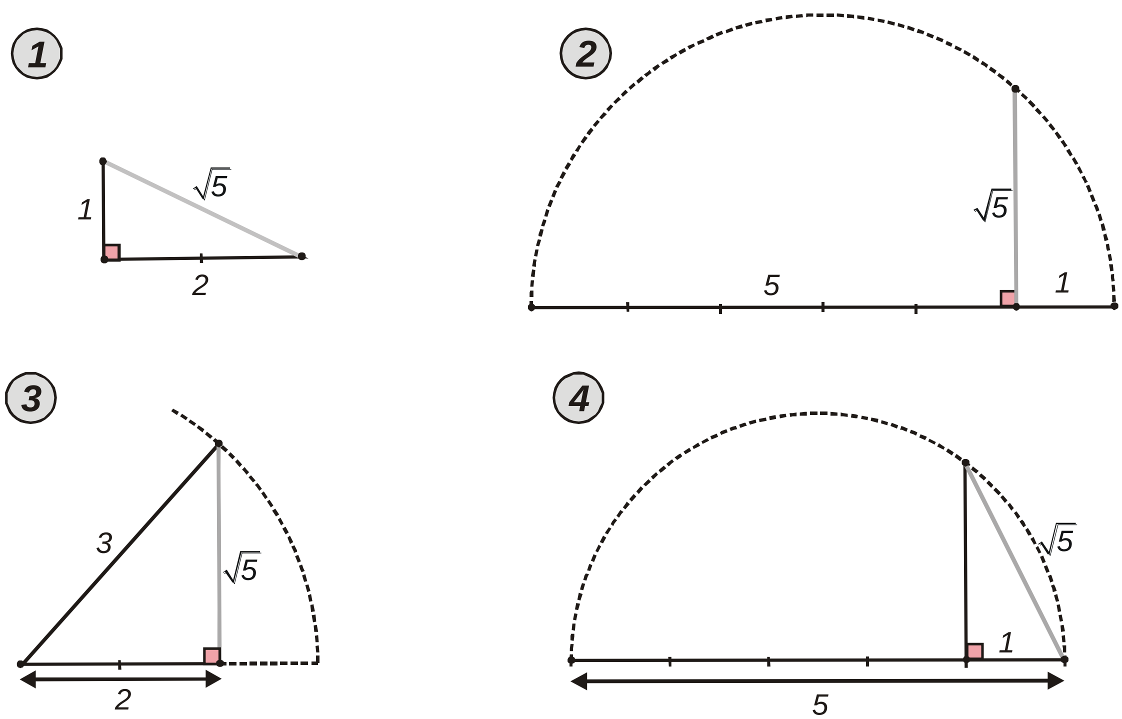
Να επαληθεύσετε αν οι τριάδες του ακόλουθου πίνακα είναι πυθαγόρειες.

Πλάκα Plimton 322 (διορθωμένη)

Α/Α	κ	λ	β	γ	α
1	12	5	120	119	169
2	64	27	3456	3367	4825
3	75	32	1800	4601	6649
4	125	54	13500	12709	18541
5	9	4	72	65	97
6	20	9	360	319	481

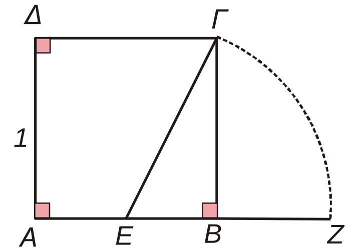
7	*54*	*25*	*2700*	*2291*	*3541*
8	*32*	*15*	*960*	*799*	*1249*
9	*25*	*12*	*600*	*481*	*769*
10	*81*	*40*	*6480*	*4961*	*8161*
11	*2*	*1*	*60*	*45*	*75*
12	*48*	*25*	*2400*	*1679*	*2929*
13	*15*	*8*	*240*	*161*	*289*
14	*50*	*27*	*2700*	*1771*	*3229*
14	*9*	*5*	*90*	*56*	*106*

7. ***Ποικιλία κατασκευών του*** $\sqrt{5}$. *Παρακάτω παρουσιάζονται τέσσερις διαφορετικές τεχνικές κατασκευής ενός ευθυγράμμου τμήματος μήκους* $\sqrt{5}$. *Μπορείτε να τις εξηγήσετε και να τις αιτιολογήσετε;*



Να κατασκευάσετε με πολλούς διαφορετικούς τρόπους ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\sqrt{8}$.

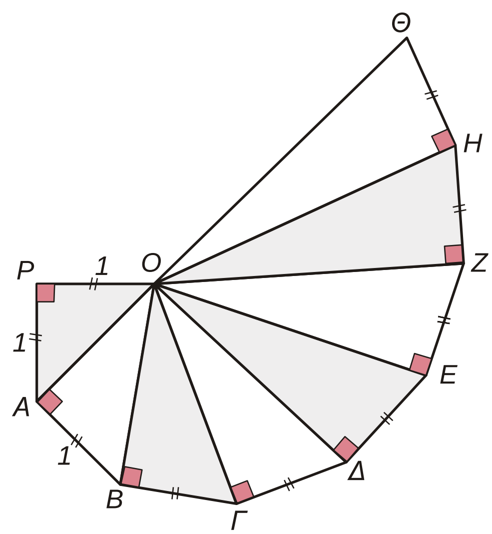
8. ***Ο χρυσός αριθμός (χρυσή τομή).*** *Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς 1. Παίρνουμε το μέσο Ε του ΑΒ. Κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο το σημείο Ε και ακτίνα ΕΓ ο οποίος τέμνει την ΑΒ στο Ζ.*



α) Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΒ, ΕΓ και ΑΖ. ***β)*** *Αν* $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *ή (φ=1,618033...) να αποδείξετε ότι:* $\frac{AZ}{AB}=\frac{AB}{BZ}=\varphi$ *(χρυσή τομή).* ***γ)*** *Να υπολογίσετε το* φ^2.

δ) *Να επαληθεύσετε ότι:* $\varphi^2=\varphi+1$, $\frac{1}{\varphi}=\varphi-1$, $\frac{1}{\varphi}=\frac{\varphi}{1+\varphi}$, ***ε)*** *Αν από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που οι πλευρές του έχουν λόγο φ (π.χ. είναι φ και 1), αφαιρέσουμε ένα τετράγωνο, τότε το ορθογώνιο που απομένει είναι όμοιο του αρχικού (οι διαστάσεις του έχουν πάλι λόγο φ).*

9. Ο σαλίγκαρος του Πυθαγόρα. (κατασκευάσιμες ρίζες με κανόνα και διαβήτη)



α) Να παρατηρήσετε προσεκτικά το παραπάνω σχήμα και να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ και ΟΕ. Είναι ΟΘ=3;

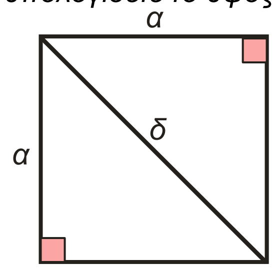
β) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει ο τύπος: $\left(\sqrt{\nu}\right)^2+1^2=\left(\sqrt{\nu+1}\right)^2$

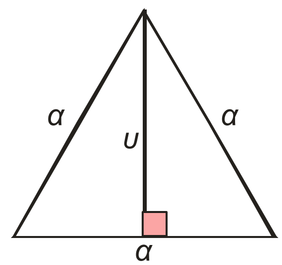
γ) Αν συνεχίσουμε την κατασκευή φτιάχνοντας συνολικά 17 ορθογώνια τρίγωνα, τότε το τελευταίο ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος $3\sqrt{2}$ *;*

Ασκήσεις και προβλήματα

1. *Να υπολογίσετε το μήκος της διαγώνιου ενός τετραγώνου του οποίου η πλευρά έχει μήκος:* ***α)*** *2.* ***β)*** *7. Όμοια να υπολογίσετε το ύψος ενός ισοπλεύρου τριγώνου.*

2. *Να υπολογίσετε το μήκος της διαγώνιου δ ενός τετραγώνου του οποίου η πλευρά έχει μήκος α. Όμοια να υπολογίσετε το ύψος υ ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α.*





Αν η πλευρά είναι λα να βρείτε τη δ και το υ. Τα μήκη των δ και υ είναι ανάλογα προς το α;

3. *Να υπολογίσετε το μήκος της διαγώνιου ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου του οποίου τα μήκη των πλευρών είναι:* ***α)*** *15 και 8,* ***β)*** *2 και 5,* ***γ)*** *15α και 8α, α>0 και δ) 2α και 5α, α>0.*

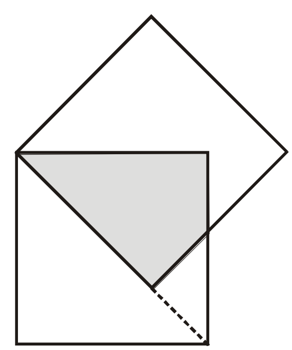
4. *Αν α είναι δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευάσετε τα ευθύγραμμα τμήματα* $\alpha\sqrt{2}$, $\alpha\sqrt{3}$ *και* $\alpha\sqrt{5}$

5. *Να κατασκευάσετε τετράγωνο του οποίου η διαγώνιος είναι ίση με ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα δ.*

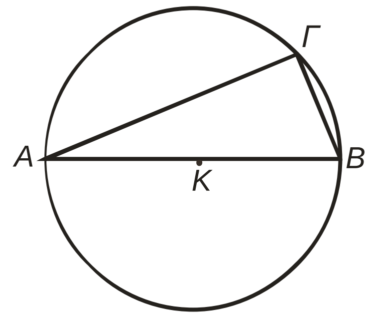
6. *Αν η πλευρά ενός τετραγώνου είναι δεδομένη και ίση με α να κατασκευάσετε ένα άλλο τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν.*

7. *Δύο τετράγωνα πλευράς 1 έχουν κοινή κορυφή, και η πλευρά του ενός βρίσκεται πάνω στη διαγώνιο του άλλου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το κοινό εμβαδόν των δύο τετραγώνων.*

(Απ. $\sqrt{2}-1$ **)**

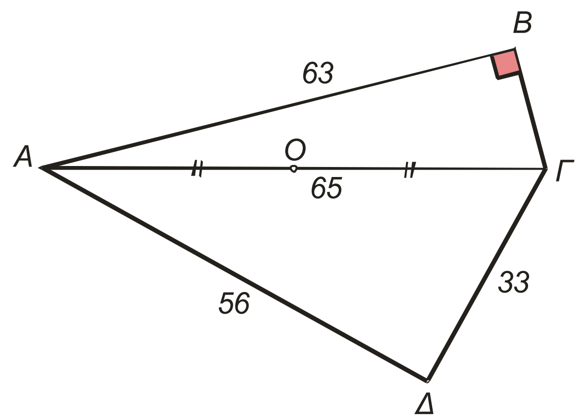


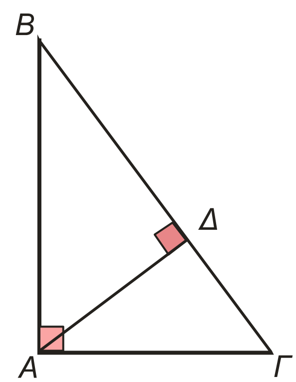
8. *Το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι* $36\sqrt{3}$*. Να βρείτε την πλευρά και την ακριβή τιμή του ύψους του τριγώνου.* ***(Απ. 12, υ=6***$\sqrt{3}$ ***)***



9. ***Ορθογώνιο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο:*** *Στο διπλανό σχήμα ΑΒ είναι η διάμετρος του κύκλου. Αν ΑΓ=16 και ΒΓ=12, να βρείτε την ΑΒ.*

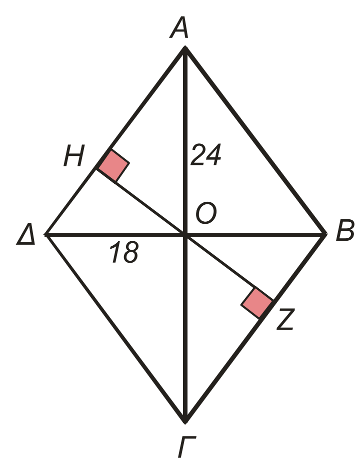
10. ***α)*** *Στο ακόλουθο σχήμα να υπολογίσετε το ΒΓ.* ***β)*** *Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.* ***γ)*** *Αν Ο είναι το μέσο της ΑΓ να αποδείξετε ότι ΟΒ=ΟΔ.*





11. ***Οι δύο τύποι του εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου:*** *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες ΑΒ=60 και ΑΓ=80. Να υπολογίσετε:* ***α)*** *την υποτείνουσα ΒΓ,* ***β)*** *Το εμβαδόν του τριγώνου,* ***γ)*** *το ύψος ΑΔ και* ***δ)*** *τα τμήματα στα οποία του ύψος ΑΔ χωρίζει την υποτείνουσα ΒΓ.*

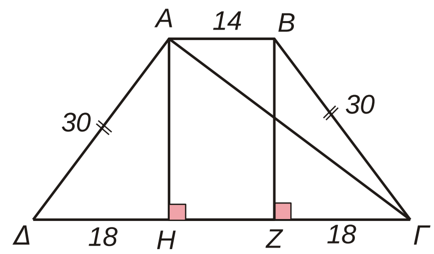
(Απ. α) ΒΓ=100, β) Ε= 2400 , γ) ΑΔ=48, δ) ΒΔ=64, ΓΔ=36)



12. ***Οι δύο τύποι του εμβαδού ρόμβου:*** *Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου είναι 48 και 36. Να υπολογίσετε:* ***α)*** *την πλευρά ΑΔ,* ***β)*** *Το εμβαδόν του ρόμβου και* ***γ)*** *το ύψος ΗΖ.*

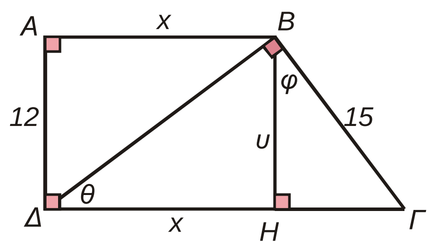
(Απ. α) ΑΔ=30, β) Ε= 864 , γ) ΗΖ=28,8)

13. ***Το ισοσκελές τραπέζιο:*** *Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=14, ΒΓ=ΑΔ=30 και ΓΔ=50. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΗ, τη διαγώνιο ΒΔ και να αποδείξετε ότι* $ΑΔ \perp ΑΓ$ *.*



(Απ. ΑΗ=24, ΒΔ=40 και ισχύει $Γ Δ^2 = Α Δ^2 + Α Γ^2$)

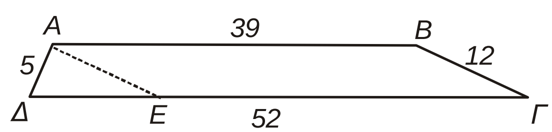
14. *Ανοιχτό πρόβλημα:* *Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^0$ με ΑΔ=12 και ΒΓ=15. Επίσης ισχύει $ΒΔ \perp ΒΓ$. Να υπολογίσετε το ύψος ΒΗ, τη διαγώνιο ΒΔ και το εμβαδόν του τραπεζίου.*



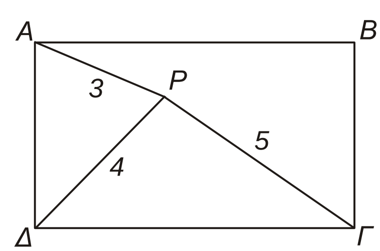
(Απ. ΒΗ=12, ΒΔ=20, Ε=246)

15. *Το τραπέζιο:* *Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=39, ΒΓ=12, ΑΔ=5 και ΓΔ=52. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου.*

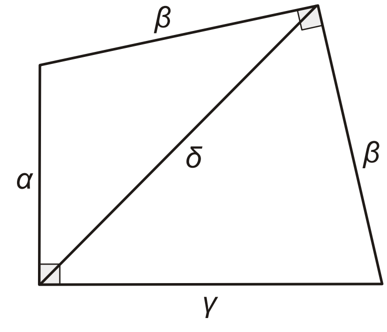
(Υποδ. Να φέρετε ΑΕ//ΒΓ)



16. *Ανοιχτό πρόβλημα:* *Δίνεται σημείο Ρ στο εσωτερικό ορθογωνίου ΑΒΓΔ, έτσι ώστε ΡΑ=3, ΡΔ=4 και ΡΓ=5. Να υπολογίσετε το μήκος του*



17. *Ανοιχτό πρόβλημα:* *Αν το διπλανό τετράπλευρο έχει δύο ορθές γωνίες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, υπολογίσετε το εμβαδόν του.* ***(α<β<γ, δ=4) (Απ. 8)***



Αποδείξεις με χρήση της αντίστροφης ιδιότητας της μεσοκαθέτου

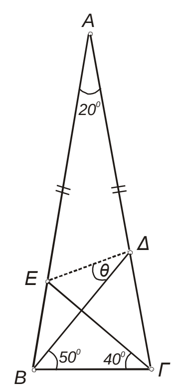
1. *Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν την ίδια βάση ΒΓ, νΝα αποδείξετε:* ***α)*** *η ευθεία ΓΔ που συνδέει τις κορυφές τους είναι μεσοκάθετος στη βάση ΒΓ.* ***β)*** *το τυχον σημείο της ευθείας ΓΔ ισαπέχει από Β και Γ.*

2. *Από δύο σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρνουμε τις αποστάσεις ΓΑ, ΓΒ και ΔΑ, ΔΒ. Να αποδείξετε ότι γωνία ΓΑΔ= γωνία ΓΒΔ.*

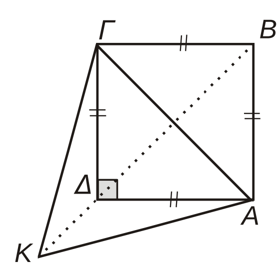
3. *Δίνεται χορδή ΑΒ κύκλου κέντρου Ο. Αν Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΟΜ είναι μεσοκάθετη του ΑΒ.*

4. *Να αποδείξετε ότι η διάκεντρος δύο άνισων τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος στην κοινή χορδή. Πότε η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος στην διάκεντρο;*

5. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με* $\hat{A} = 20^0$*. Από τις κορυφές Β και Γ φέρνουμε εσωτερικές ημιευθείες έτσι ώστε* $\Gamma\hat{B}\Delta = 50^0$ *και* $E\hat{\Gamma}B = 40^0$*. Να υπολογίσετε τη γωνία* $E\hat{\Delta}B = \theta$*. (**Απ.** $\theta = 30^0$)*



6. *Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και το ισόπλευρο τρίγωνο ΚΑΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Δ, Β είναι συνευθειακά.*



Προβλήματα πρωτοβάθμιων εξισώσεων (Αριθμητική)

Α. Τεχνητά προβλήματα αριθμών

1. *Η Υπατία έχει εντυπωσιάσει τις φίλες της με το εξής* ***«μαγικό» μαθηματικό παιγνίδι****:*

- *Σκέψου έναν αριθμό.*

- *Διπλασίασέ τον.*
- *Πρόσθεσε 15.*
- *Διπλασίασε το αποτέλεσμα.*
- *Αφαίρεσε 10.*
- *Διαίρεσε το αποτέλεσμα με 4.*
- *Αφαίρεσε τον αριθμό που σκέφτηκες.*
- *Βρήκες 5.*

Μπορείτε να εξηγήσετε πως η Υπατία ξέρει το αποτέλεσμα;

(Υποδ.** $\frac{(2x+15)\times 2-10}{4}-x=5$ **, απ. 0x=0, αόριστη)

2. *Να βρείτε τρεις διαδοχικούς φασικούς αριθμούς με άθροισμα 87.*

(Απ. 28, 29, 30)

3. *Να βρεθεί ο αριθμός που πρέπει να προσθέσουμε και στους δύο όρους του κλάσματος* $\frac{6}{13}$ *ώστε το νέο κλάσμα να ισούται με* $\frac{3}{5}$.

(Απ. 4,5)

4. *Υπάρχει φυσικός αριθμός που αν προστεθεί και στους δύο όρους του κλάσματος* $\frac{1789}{1994}$ *το νέο κλάσμα ισούται με 2;*

(Απ. x=-2199 , αδύνατο)

5. *Σκέφτομαι έναν αριθμό. Αν αφαιρέσουμε το* $\frac{1}{5}$ *από το* $\frac{1}{4}$ *του αριθμού βρίσκουμε το* $\frac{1}{20}$ *του αριθμού. Να βρείτε τον αριθμό.*

(Απ. αόριστο)

6. *Δύο ακέραιοι θετικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 188. Αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο δια του μικρότερου βρίσκουμε πηλίκο 3 και υπόλοιπο 8. Ποιοι είναι οι αριθμοί;*

(Απ. 143, 45)

7. *Να βρεθεί ένας διψήφιος αριθμός του οποίου το ψηφίο των μονάδων είναι διπλάσιο από το ψηφίο των δεκάδων και όταν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του προκύπτει αριθμός μεγαλύτερος κατά 36.*

(Απ. 48)

Β. Προβλήματα ηλικιών

8. *Πατέρας και γιος έχουν αντίστοιχα ηλικίες 41 και 18 έτη. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι διπλάσια από την ηλικία του γιου του;*

(Απ. 5)

9. *Μητέρα και κόρη έχουν αντίστοιχα ηλικίες 40 και 8 έτη. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία της κόρης θα είναι τα $\frac{4}{5}$ της ηλικίας της μητέρας;*

(Απ. αδύνατο)

10. *Ένας πατέρας 42 ετών έχει δύο παιδιά ηλικίας 13 και 11 ετών αντίστοιχα. Μετά από πόσα χρόνια ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς το άθροισμα των ηλικιών των δύο παιδιών του θα είναι ίσος με $\frac{5}{4}$;*

*(**Υποδ.** $\frac{42+x}{24+2x}=\frac{5}{4}$, απ. x=8)*

11. *Ένας άνθρωπος ηλικίας 42 ετών έχει δύο ανίψια ηλικίας 2 και 4 ετών. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια το άθροισμα των ηλικιών των παιδιών είναι ίσο με την ηλικία του θείου;*

(Απ. 36)

Γ. Πραγματικά προβλήματα αριθμών

12. *Σε 11 θρανία μιας τάξης κάθονται 27 παιδιά. Τα αγόρια κάθονται ανά 3 σε κάθε θρανίο και τα κορίτσια ανά 2. Αν καλύπτονται όλες οι θέσεις των θρανίων, πόσα είναι τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια;*

(Υποδ.** $\frac{x}{3}+\frac{27-x}{2}=11$ **, απ. 15 αγόρια και 12 κορίτσια)

13. *Σε ένα αγρόκτημα υπάρχουν κότες και κουνέλια που έχουν όλα μαζί 42 κεφάλια και 120 πόδια. Να βρείτε πόσες είναι οι κότες και πόσα τα κουνέλια;*

(Απ. 18 κουνέλια και 24 κότες)

14. *Σε έναν αγώνα μπάσκετ ένας παίκτης στις 24 εύστοχες βολές έβαλε 61 πόντους από δίποντα και τρίποντα. Πόσα ήταν τα δίποντα και πόσα τα τρίποντα καλάθια;*

(Απ. 11 δίποντα και 13 τρίποντα)

15. ***Ένα πρόβλημα του Euler**: Ένας πατέρας άφησε στους τρεις γιούς του 1600 λίρες. Σύμφωνα με τη διαθήκη ο πρωτότοκος πήρε 200 λίρες περισσότερες από το δεύτερο και ο δεύτερος 100 λίρες περισσότερες από τον τρίτο. Ποιο ήταν το ποσό που πήρε ο καθένας;*

(Απ. Α=700, Β=500, Γ=400)

16. *Τρία άτομα Α, Β και Γ μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο Α και ο Β παίρνουν μαζί 5.000 €, ο Β και Γ παίρνουν 10.000 € και ο Α και ο Γ παίρνουν 9.000 €. Ποιο χρηματικό ποσό μοιράστηκαν και πόσα χρήματα πήρε ο καθένας;*

(Απ. 12.000 και Α=2.000, Β=3.000, Γ=7.000)

17. *Να μοιράσετε 180 € μεταξύ τριών αδερφών, έτσι ώστε ο πρώτος να πάρει 20 € περισσότερα από δεύτερο και ο δεύτερος 20 € περισσότερα από τον τρίτο.*

(Απ. 80, 60, 40)

18. *Ένα ζευγάρι αθλητικά παπούτσια κοστίζει x € και μια μπάλα ποδοσφαίρου κοστίζει 3 € λιγότερο. Ένα ζευγάρι αθλητικά παπούτσια και δύο μπάλες ποδοσφαίρου κοστίζουν 144 €. Πόσο κοστίζουν τα αθλητικά παπούτσια;*

(Απ. 50€)

19. *Ο ταμίας μιας σχολικής τάξης διέθεσε για μια θεατρική παράσταση 33 εισιτήρια των 2 €, 3 € και 5 € και εισέπραξε 177 €. Αν τα εισιτήρια των δύο ευρώ είναι διπλάσια από τα εισιτήρια των τριών ευρώ, να βρείτε πόσα εισιτήρια από κάθε είδος διατέθηκαν;*

(Υποδ. $3x+2(2x)+5(33-3x)=117$ ***, απ. 6. 12 και 15 αντίστοιχα)***

20. *Τα μισά μουσικά CD του Δημήτρη και μισό ακόμα έχουν μουσική ροκ. Τα μισά από τα υπόλοιπα και μισός δίσκος έχουν ποπ μουσική και τα υπόλοιπα 3 CD έντεχνη λαϊκή μουσική. Πόσα μουσικά CD έχει ο Δημήτρης;*

(Υποδ. $\frac{x+1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2}+3=x$ ***, απ. 15 CD)***

21. *Τρία παιδιά μοιράστηκαν 122 μπίλιες. Ο Α πήρε τα* $\frac{4}{5}$ *από τις μπίλιες που πήρε ο Β τα οποία είναι τα* $\frac{4}{5}$ *όσων πήρε ο Γ. Πόσες μπίλιες πήρε ο καθένας;*

(Απ. 32, 40, 50)

22. *Ένα ποσό χρημάτων μοιράζεται μεταξύ τεσσάρων αδερφών με τον ακόλουθο τρόπο: Ο Α πήρε το* $\frac{1}{5}$ *του ποσού, ο Β τα* $\frac{4}{9}$ *του υπολοίπου, ο Γ τα* $\frac{2}{5}$ *του νέου υπολοίπου και ο Δ πήρε 720 € . Ποιο ποσό μοιράστηκαν και ποιο ήταν το μερίδιο του καθενός;*

(Απ. 2700, Α=540, Β=960, Γ=480, Δ=720)

23. ***Ένα άλλο πρόβλημα του Euler****: Ένας πατέρας πέθανε και οι τέσσερις γιοι του σύμφωνα με την επιθυμία του μοιράστηκαν τα αγαθά του με τον ακόλουθο τρόπο:*

- *Ο Α πήρε 3000 λίβρες λιγότερες από το μισό της περιουσίας.*

- *Ο Β πήρε 1000 λίβρες λιγότερες από το ένα τρίτο της περιουσίας.*
- *Ο Γ πήρε ακριβώς το ένα τέταρτο της περιουσίας.*
- *Ο Δ πήρε 600 λίβρες περισσότερες από το ένα πέμπτο της περιουσίας.*

Ποια ήταν η περιουσία του πατέρα και ποιο ήταν το ποσό που πήρε ο καθένας;

(Υποδ. $\frac{x}{2}-3000+\frac{x}{3}-1000+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+600=x$, απ. 12000, Α=Β=Γ=Δ=3000)

Προβλήματα εξισώσεων πρώτου βαθμού (Γεωμετρία)

24. *Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 72 cm^2. Αν ένα τετράγωνο που έχει το μισό εμβαδόν του ορθογωνίου έχει πλευρά ίση με τα $\frac{3}{8}$ της βάσης του ορθογωνίου να βρείτε την περίμετρο του ορθογωνίου.*

(Απ. 41)

25. *Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι 1980 cm^2. Επίσης δίνεται ΑΒ=88 cm. Αν το ύψος που άγεται από την κορυφή Γ διαιρεί την ΑΒ σε δύο τμήματα που έχουν λόγο $\frac{15}{7}$ να βρείτε τις ΑΒ και ΒΓ.*

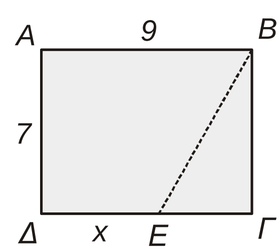
(Απ. ΑΓ=75 και ΒΓ=53)

26. *Η διαγώνιος ενός ορθογωνίου είναι κατά δύο μονάδες μεγαλύτερη από το μήκος του, ενώ το πλάτος του είναι κατά δύο μονάδες μικρότερο από το μήκος του. Να βρεθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου αυτού;*

(Απ. Ε=48 τ. μ.)

27. *Να βρείτε το x ώστε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΕΔ να είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΒΓΕ.*

(Απ. x=3)

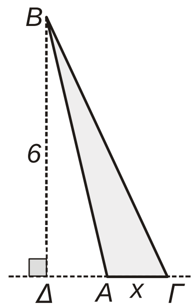


28. *Δίνονται τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ=6 cm.*

α) *Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του x.*

β) *Να υπολογίσετε το μήκος x έτσι ώστε το εμβαδόν του ΑΒΓ να είναι 12 cm^2.*

(Απ. x=4)



29. *Το πλάτος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι x cm. Το μήκος του είναι 4 cm μεγαλύτερο από το πλάτος του. Η περίμετρός του είναι 48 cm. Πόσο είναι το πλάτος του;*

30. *Η μία πλευρά ενός τριγώνου είναι το* $\frac{1}{3}$ *της περιμέτρου του, η άλλη είναι τα* $\frac{4}{9}$ *της περιμέτρου του και η τρίτη 10 m. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου.*

(Απ. 9 m, 8 m και 10 m)

31. *Ένα τετράγωνο ελαττώθηκε σε μέγεθος, περισσότερο στη μια διάσταση από την άλλη και έδωσε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου το μήκος είναι τα* $\frac{5}{8}$ *της πλευράς του τετραγώνου και το πλάτος τα* $\frac{3}{5}$ *της πλευράς του τετραγώνου. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 245 m . Να βρείτε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.*

(Απ. 10 m)

32. *Να υπολογίσετε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει περίμετρο 96m και η μια διάστασή του είναι ίση με τα* $\frac{5}{11}$ *της άλλης.*

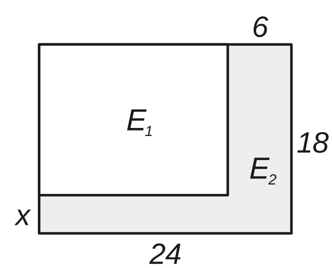
(Απ. 33 m, 15 m)

33. *Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου το μήκος είναι διπλάσιο από το πλάτος έχει εμβαδόν 162* m^2*. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;*

(Απ. 9 m, 18 m)

34. *Αν* E_2 *είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος και* E_1 *το υπόλοιπο να εκφράσετε τα* E_1 *και* E_2 *συναρτήσει του x. Επιπλέον αν* $E_2 = \frac{5}{7}E_1$ *να βρείτε το x.*

(Απ. x=4)



35. *Να βρεθεί η γωνία της οποίας η διαφορά των $\frac{2}{3}$ της συμπληρωματικής της από τα $\frac{4}{5}$ της παραπληρωματικής της είναι 80^0.*

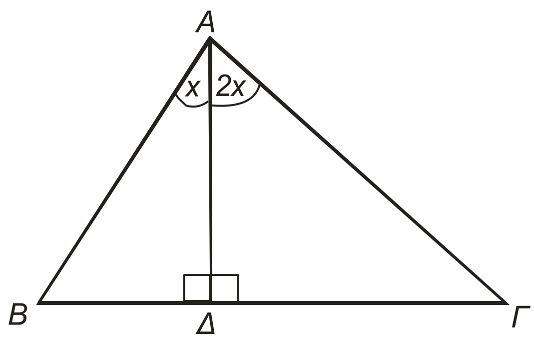
(Υποδ.** $\frac{4}{5}(180^0 - x) - \frac{2}{3}(90^0 - x) = 80^0$, **απ.** $x = 30^0$ **)

36. *Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^0\right)$ η διαφορά των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι 12^0. Πόσες μοίρες είναι το μέτρο κάθε γωνίας;*

(Απ.** 39^0, 51^0 **)

37. *Να υπολογιστούν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου αν γνωρίζουμε ότι η μία είναι μεγαλύτερη της άλλης κατά 16 cm και η περίμετρός του είναι 136 cm.*

38. *Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, η κάθετη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει τη ΒΓ στο Δ και η γωνία $\Gamma\hat{A}\Delta$ είναι διπλάσια από τη γωνία $B\hat{A}\Delta = x$.*



α) *Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$ συναρτήσει του x.*
β) *Να υπολογίσετε το x ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο.* ***(Απ. x=30)***
γ) *Να υπολογίσετε το x ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές. Στην περίπτωση αυτή να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.* ***(Απ. x=22,5, x=18)***

Ανοιχτά προβλήματα

1. *Μπροστά σε ένα ποτιστήρι, που είναι γεμάτο και περιέχει ακριβώς 11 λίτρα νερό, υπάρχουν επτά άδεια δοχεία: του 1 λίτρου, των 2 λίτρων, των 3 λίτρων, των 4 λίτρων, των 5 λίτρων, των 6 λίτρων και των 7 λίτρων.*

Ο Λευτέρης πρέπει να διαλέξει μερικά δοχεία στα οποία θα μεταγγίσει όλο το νερό του ποτιστηριού του. Τα δοχεία που θα διαλέξει πρέπει να τα γεμίσει εξολοκλήρου, αλλά δεν πρέπει να ξεχειλίζουν!

Πόσα δοχεία μπορεί να διαλέξει ο Λευτέρης;

Για παράδειγμα, αν ο Λευτέρης διαλέξει τα δοχεία των 3, 4 και 6 λίτρων, δεν θα υπάρχει αρκετό νερό για να τα γεμίσει όλα. Αν διαλέξει τα δοχεία των 6 και 2 λίτρων, δεν θα καταφέρει να αδειάσει εξολοκλήρου το ποτιστήρι του. Αν διαλέξει τα δοχεία των 2, 3 και 6 λίτρων, τότε θα μπορέσει να αδειάσει το ποτιστήρι και να γεμίσει εξολοκλήρου τα δοχεία του.

Ωστόσο υπάρχουν και άλλοι τρόποι. Να βρείτε <u>όλους τους τρόπους</u> και να εξηγήσετε πώς τους βρήκατε.

2. *Αν χρησιμοποιήσουμε τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, και 6 μόνο μια φορά το καθένα μπορούμε να γράψουμε δύο τριψήφιους αριθμούς με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα μπορούμε να διαλέξουμε τους αριθμούς 123 και 456 ή ακόμα 531 και 264.*

α) *Διαλέξτε τους δύο αριθμούς κατά τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμά τους να είναι το μικρότερο δυνατό. Ποιό είναι αυτό το άθροισμα;*

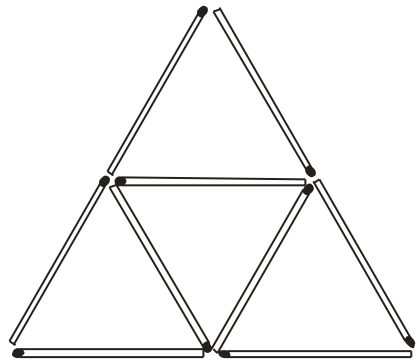
β) *Διαλέξτε τους δύο αριθμούς κατά τέτοιο τρόπο ώστε η διαφορά τους να είναι η μικρότερη δυνατή. Ποια είναι αυτή η διαφορά;*

3. *Η Μελίνα γιορτάζει τα γενέθλιά της και θέλει να κατασκευάσει χάρτινες προσκλήσεις που θα μοιράσει στους καλεσμένους της. Κάθε κάρτα έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 15 εκ. μήκος και 10 εκ. πλάτος. Υποθέτουμε ότι διαθέτει ένα μεγάλο χαρτόνι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου διαστάσεων 45 εκ μήκος και 35 εκ. πλάτος. Πόσες προσκλήσεις θα μπορέσει να κατασκευάσει απ’ αυτό το χαρτόνι; Μπορείτε να τις χαράξετε πάνω σε χαρτόνι; Προσοχή δεν επιτρέπεται να ενώσετε δύο κομμάτια για να φτιάξετε μια πρόσκληση.*

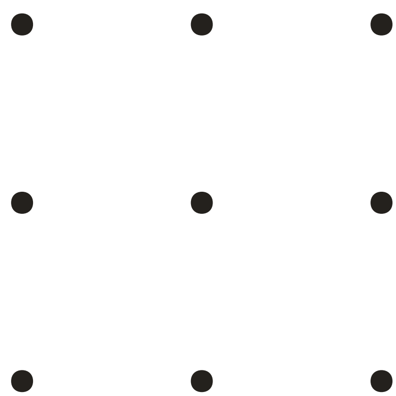
4. *Ρώτησαν έναν βοσκό για τον αριθμό των προβάτων του κοπαδιού του και ο βοσκός απάντησε: «Έχω περισσότερα από 700 και λιγότερα από 800 πρόβατα και αν τα μετρήσω ανά 8, ανά 12 και ανά 15 μένει υπόλοιπο 7». Πόσα πρόβατα έχει ο βοσκός;*

Σπαζοκεφαλιές και γρίφοι

1. *Τοποθετήστε εννέα σπίρτα έτσι ώστε να σχηματίζουν τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα, όπως δείχνει το σχήμα. Βρείτε τώρα έναν τρόπο να σχηματίσετε τέσσερα τρίγωνα ίδιου σχήματος και ίσου μεγέθους με αυτό που έχετε, χρησιμοποιώντας μόνο έξι σπίρτα.*



2. *Χαράξτε τέσσερις ευθείες γραμμές που να περνούν και από τα εννέα σημεία, χωρίς να σηκώσετε το μολύβι σας από το χαρτί.*



3. *Υπάρχουν 2 κόκκινα και 3 μαύρα καπέλα. Υπάρχουν επίσης τρεις φίλοι από τους οποίους ο ένας είναι τυφλός. Αφού κλείσουμε τα μάτια σε αυτούς που βλέπουν φοράμε από ένα καπέλο και στους τρεις. Τα υπόλοιπα καπέλα τα κρύβουμε και απελευθερώνουμε την όραση των δύο. Στη συνέχεια ρωτούμε τον πρώτο τι χρώμα καπέλο φοράει και απαντά «δεν ξέρω». Ρωτάμε το δεύτερο και μετά από σκέψη λέει κι αυτός «δεν ξέρω». Ρωτάμε τότε και τον τυφλό, και μετά από λίγο εκείνος απαντάει με βεβαιότητα «φοράω μαύρο καπέλο». Και είχε δίκιο. Πώς άραγε το βρήκε;*