# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
## Προκριματικός διαγωνισμός 2012
## 7 Απριλίου 2012

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες $(p,m,n)$, όπου $p$ πρώτος και $m,n$ μη αρνητικοί ακέραιοι, που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$p^m - n^3 = 8.$$

**Λύση**

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$p^m = (n+2)(n^2-2n+4).$$

Επειδή $p$ πρώτος, έπεται ότι

$$p^x = n+2 \text{ και } p^y = n^2-2n+4,$$

όπου $x,y$ θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $x+y=m$. Επειδή επιπλέον ισχύει

$$(n^2-2n+4)-(n+2) = n^2-3n+2 = (n-1)(n-2) \geq 0,$$

για κάθε μη αρνητικό ακέραιο $n$, έπεται ότι: $x \leq y$. Τότε όμως $p^x \mid p^y$, δηλαδή

$$(n+2) \mid (n^2-2n+4).$$

Επειδή ισχύει η ισότητα

$$n^2-2n+4 = (n+2)^2-6n = (n+2)^2-6(n+2)+12,$$

έπεται ότι $(n+2) \mid 12$, οπότε θα είναι $n+2 \in \{2,3,4,6,12\}$, δηλαδή $n \in \{0,1,2,4,10\}$.

- Για $n=0$, λαμβάνουμε $p^m = 8 \Rightarrow p=2,\ m=3$, οπότε $(p,m,n)=(2,3,0)$.
- Για $n=1$, λαμβάνουμε $p^m = 9 \Rightarrow p=3,\ m=2$, οπότε $(p,m,n)=(3,2,1)$.
- Για $n=2$, λαμβάνουμε $p^m = 16 \Rightarrow p=2,\ m=4$, οπότε $(p,m,n)=(2,4,2)$.
- Για $n=4$, λαμβάνουμε $p^m = 72 = 2^3\cdot 3^2$ (αδύνατη).
- Για $n=10$, λαμβάνουμε $p^m = 1008 = 2^3\cdot 126 = 2^4\cdot 3^2\cdot 7$ (αδύνατη).

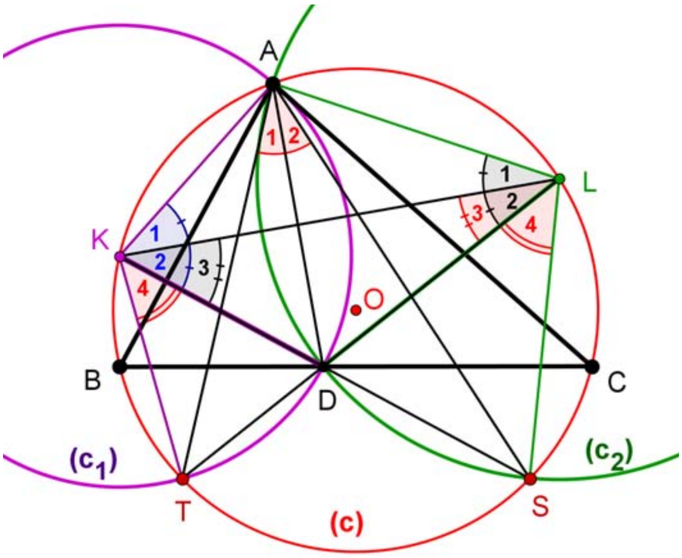
### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{ABC}$ (με $\mathrm{AB}<\mathrm{AC}<\mathrm{BC}$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c}(\mathrm{O},R)$ (με κέντρο το σημείο $\mathrm{O}$ και ακτίνα $R$). Η μεσοκάθετη της διχοτόμου $\mathrm{AD}$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $\mathrm{c}(\mathrm{O},R)$ στα σημεία $\mathrm{K},\mathrm{L}$ (το σημείο $\mathrm{K}$ ανήκει στο μικρό τόξο $\mathrm{AB}$). Ο κύκλος $\mathrm{c}_1(\mathrm{K},\mathrm{KA})$ (που έχει κέντρο $\mathrm{K}$ και ακτίνα $\mathrm{KA}$), τέμνει το κύκλο $\mathrm{c}(\mathrm{O},R)$ στο σημείο $\mathrm{T}$ και ο κύκλος $\mathrm{c}_2(\mathrm{L},\mathrm{LA})$ (που έχει κέντρο $\mathrm{L}$ και ακτίνα $\mathrm{LA}$), τέμνει το κύκλο $\mathrm{c}(\mathrm{O},R)$ στο σημείο $\mathrm{S}$. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{T} = \mathrm{C}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{S}$.

**Λύση**

Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $\mathrm{L},\mathrm{D},\mathrm{T}$ και $\mathrm{K},\mathrm{D},\mathrm{S}$ είναι συνευθειακά και στη συνέχεια ότι η $\mathrm{AD}$ είναι διχοτόμος και της γωνίας $\mathrm{T}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{S}$.

Επειδή το σημείο $K$ ανήκει στη μεσοκάθετη της $AD$, ο κύκλος $c_1(K,KA)$ θα περνάει από το $D$. Επειδή το σημείο $L$ ανήκει στη μεσοκάθετη της $AD$, ο κύκλος $c_2(L,LA)$ θα περνάει από το $D$. Τα τρίγωνα $KAL$ και $KDL$ είναι ίσα, γιατί έχουν:




Σχήμα 1

(i) $KA = KD$, ως ακτίνες του κύκλου $(c_1)$.

(ii) $LA = LD$, ως ακτίνες του κύκλου $(c_2)$.

(iii) $KL$, κοινή πλευρά των δύο τριγώνων.

Άρα έχουμε και τις ισότητες: $\hat{L}_1 = \hat{L}_2 = K\hat{L}D$ και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = L\hat{K}D$.

Τα τόξα $KA, KT$ του κύκλου $(c)$ είναι ίσα διότι οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες ($KA = KT$, ως ακτίνες του κύκλου $(c_1)$). Άρα και οι αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες θα είναι ίσες , δηλαδή $\hat{L}_1 = \hat{L}_3$.

Από την ισότητα $\hat{L}_1 = \hat{L}_2 = K\hat{L}D$, έχουμε $\hat{L}_2 = \hat{L}_3$ και κατά συνέπεια τα σημεία $L, D, T$ είναι συνευθειακά.

Τα τόξα $LA$, $LS$ του κύκλου $(c)$ είναι ίσα διότι οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες ($LA = LS$ ως ακτίνες του κύκλου $(c_2)$). Άρα και οι αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες θα είναι ίσες , δηλαδή $\hat{K}_1 = \hat{K}_3$.

Από την ισότητα $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = L\hat{K}D$, έχουμε $\hat{K}_2 = \hat{K}_3$ και κατά συνέπεια τα σημεία $K, D, S$ είναι συνευθειακά.

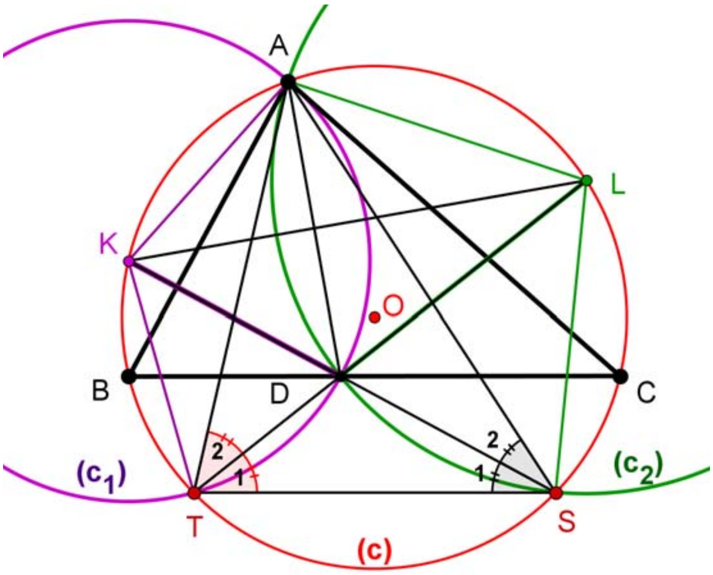
Τα τρίγωνα $KDT$ και $LDS$ είναι ισοσκελή με τις παρά τη βάση γωνίες ίσες (διότι $K\hat{D}T = L\hat{D}T$, ως κατά κορυφή. Άρα είναι:

$$\hat{K}_4 = \hat{L}_4 \Rightarrow \frac{\hat{K}_4}{2} = \frac{\hat{L}_4}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2.$$

(η γωνία $\hat{A}_1$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο $(c_1)$ με αντίστοιχη επίκεντρη την $\hat{K}_4$, οπότε $\hat{K}_4 = 2\hat{A}_1$, ενώ η γωνία $\hat{A}_2$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο $(c_2)$ με αντίστοιχη επίκεντρη την $\hat{L}_4$, οπότε $\hat{L}_4 = 2\hat{A}_2$).

**2$^{ος}$ Τρόπος**

Όπως και στην προηγούμενη λύση, αποδεικνύουμε ότι τα σημεία $L, D, T$ και $K, D, S$ είναι συνευθειακά.




Σχήμα 2

Τα τόξα $KA, KT$ του κύκλου $(c)$ είναι ίσα διότι οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες ($KA = KT$ ως ακτίνες του κύκλου $(c_1)$). Άρα και οι αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες θα είναι ίσες ($\hat{S}_1 = \hat{S}_2$).

Τα τόξα $LA, LS$ του κύκλου $(c)$ είναι ίσα, γιατί οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες ($LA = LS$ ως ακτίνες του κύκλου $(c_2)$). Άρα και οι αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες θα είναι ίσες , δηλαδή $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$.

Από τις παραπάνω ισότητες γωνιών προκύπτει ότι οι $TD$, $SD$ είναι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου $ATS$ και κατά συνέπεια η $AD$ είναι διχοτόμος της γωνίας $T\hat{A}S$.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3**

Αν $a, b, c$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε $a+b+c=3$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

**Λύση (1$^{ος}$ τρόπος)**

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση $a+b+c=3$, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$2(a+b+c)\left[\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3}\right]\geq\frac{3\cdot 6}{8}$$

$$\Leftrightarrow\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left[\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3}\right]\geq\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left[\frac{1}{b+c}\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{1}{c+a}\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\frac{1}{a+b}\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]\geq\frac{9}{4}.$$

Επειδή από την ανισότητα Cauchy – Schwarz έχουμε

$$\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left[\frac{1}{b+c}\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{1}{c+a}\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\frac{1}{a+b}\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]\geq$$

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2,$$

αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},$$

η οποία είναι η ανισότητα του Nesbitt. Μία απόδειξη της ανισότητας του Nesbitt, μέσω της ανισότητας των Cauchy – Schwarz είναι η ακόλουθη:

Αν προσθέσουμε το 3 και στα δύο μέλη της ανισότητας, αυτή γίνεται:

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq\frac{3}{2}+3$$

ή ισοδύναμα

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq\frac{9}{2}$$

Με πολλαπλασιασμό επί 2 και των δύο μελών, καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9,$$

η οποία είναι αληθής, λόγω της ανισότητας Cauchy – Schwarz.

Η ισότητα στην ανισότητα Cauchy – Schwarz ισχύει όταν

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{b+c}=\frac{b+c+a}{c+a}=\frac{c+a+b}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{b+c}=\frac{3}{c+a}=\frac{3}{a+b}\Leftrightarrow b+c=c+a=a+b\Leftrightarrow a=b=c.$$

Επίσης, η ισότητα στην ανισότητα του Nesbitt ισχύει όταν $a=b=c$. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση $a+b+c=3$, για τη δεδομένη ανισότητα, η ισότητα ισχύει όταν $a=b=c=1$.

**2ος τρόπος**

Έστω $\mathrm{A}(a,b,c)=\dfrac{a^2}{(b+c)^3}+\dfrac{b^2}{(c+a)^3}+\dfrac{c^2}{(a+b)^3}$. Λόγω της υπόθεσης $a+b+c=3$, έχουμε

$$3\mathrm{A}(a,b,c)=\frac{a^2(a+b+c)}{(b+c)^3}+\frac{b^2(a+b+c)}{(c+a)^3}+\frac{c^2(a+b+c)}{(a+b)^3}$$

$$=\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3+\left(\frac{c}{a+b}\right)^3+\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή ανισότητα του Nesbitt, σύμφωνα με την οποία για $a,b,c$ θετικούς πραγματικούς αριθμούς, ισχύει ότι:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Η ισότητα ισχύει, όταν $a=b=c.$ Η απόδειξη της ανισότητας του Nesbitt έχει δοθεί στην προηγούμενη λύση ($1^{ος}$ τρόπος)

Έτσι, από την ανισότητα

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}(x+y+z)^2, \text{ για } x=\frac{a}{b+c}, y=\frac{b}{c+a}, z=\frac{c}{a+b},$$

λαμβάνουμε

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2,$$

οπότε από την ανισότητα του Nesbitt λαμβάνουμε

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\geq\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}. \qquad (2)$$

Επιπλέον, για $0<x\leq y\leq z$, έπεται ότι $0<x^2\leq y^2\leq z^2$, οπότε από την ανισότητα του Chebyshev, λαμβάνουμε

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)\leq 3\left(x^3+y^3+z^3\right),$$

όπου η ισότητα ισχύει όταν $x=y=z$.

Επειδή η δεδομένη ανισότητα είναι **συμμετρική** ως προς τις μεταβλητές της $a,b,c$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0<a\leq b\leq c$, οπότε θα είναι και

$$0<\frac{1}{b+c}\leq\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{a+b},\ 0<\frac{a}{b+c}\leq\frac{b}{c+a}\leq\frac{c}{a+b} \text{ και}$$

$$0<\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\leq\left(\frac{b}{c+a}\right)^2\leq\left(\frac{c}{a+b}\right)^2.$$

Επομένως, θεωρώντας $x=\frac{a}{b+c}, y=\frac{b}{c+a}, z=\frac{c}{a+b}$, από την ανισότητα του Chebyshev, λαμβάνουμε

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3+\left(\frac{c}{a+b}\right)^3\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left[\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right],$$

οπότε, λόγω των (1) και (2) έχουμε

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3+\left(\frac{c}{a+b}\right)^3\geq\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}. \qquad (3)$$

Η ισότητα ισχύει όταν

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{b+c}=\frac{b+c+a}{c+a}=\frac{c+a+b}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{b+c}=\frac{3}{c+a}=\frac{3}{a+b}\Leftrightarrow b+c=c+a=a+b\Leftrightarrow a=b=c.$$

Λόγω των (2) και (3), έχουμε

$$3\mathrm{A}(a,b,c)\geq\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=\frac{9}{8}\Rightarrow\mathrm{A}(a,b,c)=\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3}\geq\frac{3}{8}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ισότητα ισχύει όταν $a=b=c$, οπότε δεδομένου ότι $a+b+c=3$, έπεται ότι η ισότητα ισχύει όταν $a=b=c=1$.

**3$^{ος}$ τρόπος**

Γράφουμε τη δεδομένη ανισότητα στη μορφή

$$\frac{a^2}{(3-a)^3}+\frac{b^2}{(3-b)^3}+\frac{c^2}{(3-c)^3}\geq\frac{3}{8}$$

και παρατηρούμε ότι, λόγω της υπόθεσης $a,b,c>0$ και $a+b+c=3$, ισχύει ότι $a,b,c\in(0,3)$. Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2}{(3-x)^3},\,x\in(0,3),$$

η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,3)$ και ισχύει ότι

$$f'(x)=\frac{2x(3-x)^3-x^2\cdot 3(3-x)^2(3-x)'}{(3-x)^6}=\frac{6x-2x^2+3x^2}{(3-x)^4}=\frac{6x+x^2}{(3-x)^4},\ x\in(0,3)$$

$$f''(x)=\frac{(6+2x)(3-x)^4+4\left(6x+x^2\right)(3-x)^3}{(3-x)^8}=$$

$$\frac{2(3+x)(3-x)+4\left(6x+x^2\right)}{(3-x)^5}=\frac{2\left(x^2+12x+9\right)}{(3-x)^5}\geq 0,$$

για κάθε $x\in(0,3)$. Επομένως η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα $(0,3)$, οπότε από την ανισότητα του Jensen λαμβάνουμε

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=f(1)=\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left[\frac{a^2}{(3-a)^3}+\frac{b^2}{(3-b)^3}+\frac{c^2}{(3-c)^3}\right]\geq\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{a^2}{(b+c)^3}+\frac{b^2}{(c+a)^3}+\frac{c^2}{(a+b)^3}\geq\frac{3}{8}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $a=b=c=1$.

**4$^{ος}$ τρόπος (Α. Συγκελάκης)**

Παρατηρούμε πάλι, όπως και στη προηγούμενη λύση, ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{(3-x)^3},x\in(0,3)$ είναι κυρτή στο διάστημα $(0,3)$, οπότε η γραφική παράσταση της βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της σε σημείο της μορφής $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$, $0<x_0<3$. Θεωρώντας την εφαπτομένη της στο σημείο $(1,f(1))$ που έχει εξίσωση $y=\frac{7}{16}(x-1)+\frac{1}{8}$, λαμβάνουμε ότι :

$$\frac{x^2}{(3-x)^3} \geq \frac{7}{16}(x-1)+\frac{1}{8}, \text{ για κάθε } x \in (0,3) \qquad (1)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι, αν κάποιος θεωρήσει την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $\left(1, f(1)\right)$, μπορεί να αποδείξει την (1), ανεξαρτήτως της κυρτότητας της συνάρτησης $f$. Πράγματι, η (1) είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $(x-1)^2\left(7x^2-54x+135\right) \geq 0$ (2), που ισχύει, γιατί το τριώνυμο $7x^2-54x+135$ έχει διακρίνουσα αρνητική.

Εφαρμόζουμε την (1) διαδοχικά, θέτοντας στο $x$ τα $a,b,c$, αντίστοιχα, και έχουμε:

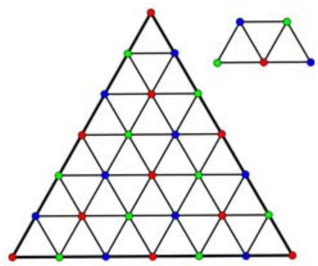
$$\frac{a^2}{(3-a)^3} \geq \frac{7}{16}(a-1)+\frac{1}{8}$$
$$\frac{b^2}{(3-b)^3} \geq \frac{7}{16}(b-1)+\frac{1}{8}$$
$$\frac{c^2}{(3-c)^3} \geq \frac{7}{16}(c-1)+\frac{1}{8}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας ότι $a+b+c=3$ παίρνουμε τη ζητούμενη ανισότητα.

Η (1) ισχύει ως ισότητα, όταν $x=1$ (φαίνεται από την ισοδύναμή της που είναι η (2)). Συνεπώς η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $a=b=c=1$.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4**

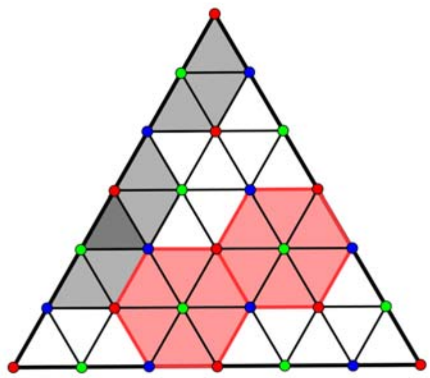
Έστω $n$ ακέραιος με $n=3k$, ($k$ ακέραιος με $k \geq 2$). Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ διαιρείται σε $n^2$ ίσα μικρά ισόπλευρα τρίγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Στο σχήμα φαίνεται η περίπτωση για $n=6$ ($k=2$) καθώς και ένα "πλακίδιο" (τραπέζιο) που δημιουργείται από τρία μικρά ισόπλευρα τρίγωνα. Χρωματίζουμε τα σημεία του πλέγματος με τρία χρώματα (Κόκκινο, Μπλε και Πράσινο), με τέτοιο τρόπο ώστε δύο γειτονικά σημεία να έχουν διαφορετικό χρώμα. Τέλος, ένα "πλακίδιο" θα το λέμε: "Κόκκινο, Μπλε ή Πράσινο", όταν το μέσο της μεγάλης βάσης του, έχει "Κόκκινο, Μπλε ή Πράσινο" χρώμα αντίστοιχα. Να βρεθεί το πλήθος όλων των "πλακιδίων" που δημιουργούνται, καθώς και πόσα από αυτά είναι "Κόκκινα, Μπλε, Πράσινα". Μέρος ενός πλακιδίου μπορεί να καλύπτεται από άλλο δημιουργούμενο πλακίδιο.



**Λύση**

Το μέσο της μεγάλης βάσης του πλακιδίου θα το ονομάζουμε (για συντομία) "κέντρο" του πλακιδίου.

Κάθε σημείο που βρίσκεται στις πλευρές του τριγώνου (εκτός από τις κορυφές του) είναι το κέντρο ενός και μόνο πλακιδίου. Σε κάθε πλευρά υπάρχουν $n-1$ σημεία που μπορούν να είναι κέντρα πλακιδίων. Έτσι υπάρχουν $3(n-1)$ πλακίδια που τα κέντρα τους βρίσκονται στις πλευρές του τριγώνου (στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη περίπτωση για $n=6$ ).



Σχήμα 3

Κάθε άλλο σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου είναι το κέντρο έξι πλακιδίων. Στο εσωτερικό του τριγώνου υπάρχουν

$$1+2+3+\cdots+(n-2)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

σημεία και

$$6\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2}=3(n-1)(n-2)$$

πλακίδια. Προσθέτοντας βρίσκουμε ότι υπάρχουν συνολικά $3(n-1)^2=3(3k-1)^2$ πλακίδια.

Για να υπολογίσουμε τώρα το πλήθος των κόκκινων-μπλε-πράσινων πλακιδίων, αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος των κόκκινων-μπλε-πράσινων σημείων που βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του μεγάλου τριγώνου.

Το χρώμα με το οποίο ξεκινάμε και χρωματίζουμε την κορυφή $A$ του μεγάλου ισόπλευρου τριγώνου, το ονομάζουμε "πρωτεύον χρώμα" και τα άλλα δύο "δευτερεύοντα χρώματα".

Αν υποθέσουμε ότι $n=3\,(k=1)$, τότε δημιουργείται ένα "βασικό ισόπλευρο τρίγωνο", το οποίο συμβολίζουμε με $T_3$.

Αν χρωματίσουμε με το πρωτεύον χρώμα μία κορυφή του τριγώνου $T_3$, τότε και οι δύο άλλες κορυφές του (καθώς και το περίκεντρό του) θα έχουν το ίδιο χρώμα.

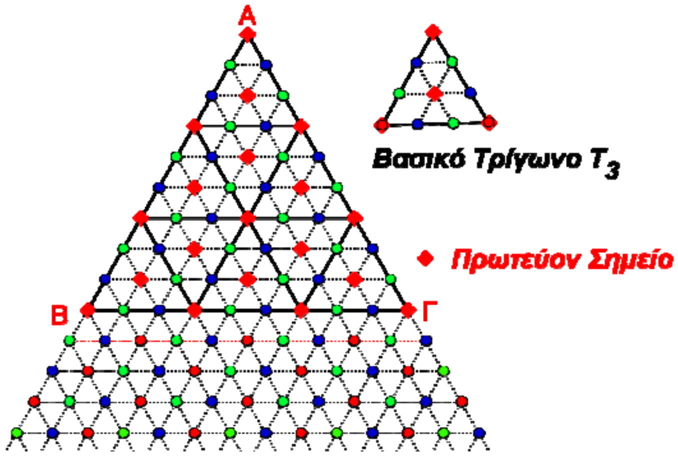
Κάθε μεγάλο ισόπλευρο τρίγωνο αποτελείται από $1+3+\cdots+(2k-1)=k^2$ βασικά ισόπλευρα τρίγωνα $T_3$ των οποίων οι κορυφές και τα περίκεντρα έχουν το "πρωτεύον χρώμα".

Από τον τρόπο χρωματισμού των σημείων (τα γειτονικά σημεία έχουν διαφορετικό χρώμα) προκύπτει ότι τα σημεία $B$ και $\Gamma$ έχουν το "πρωτεύον χρώμα". Στο εσωτερικό κάθε πλευράς του τριγώνου $AB\Gamma$, υπάρχουν $k-1$ σημεία που έχουν το "πρωτεύον χρώμα" και $2k$ σημεία που έχουν τα "δευτερεύοντα χρώματα".

Στη συνέχεια της λύσης θεωρούμε ότι το κόκκινο είναι το πρωτεύον χρώμα ( οι απαντήσεις είναι ανάλογες, αν το πρωτεύον χρώμα είναι το πράσινο ή το μπλε). Άρα δημιουργούνται $3(k-1)$ κόκκινα πλακίδια που τα κέντρα τους βρίσκονται στις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.

Το πλήθος των μπλε σημείων ισούται με το πλήθος των πράσινων σημείων, οπότε δημιουργούνται $3k$ μπλε και $3k$ πράσινα πλακίδια που τα κέντρα τους βρίσκονται στις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.

Στο εσωτερικό του τριγώνου υπάρχουν $k^2$ σημεία που είναι τα περίκεντρα των βασικών τριγώνων $T_3$ και κατά συνέπεια έχουν το "πρωτεύον χρώμα".




Σχήμα 4

Υπάρχουν επίσης $1+2+\cdots+(k-2)=\dfrac{(k-2)(k-1)}{2}$ σημεία, που δεν είναι τα περίκεντρα βασικών τριγώνων, αλλά έχουν το “πρωτεύον χρώμα”.

Άρα έχουμε τελικά

$$6k^2+6\frac{(k-2)(k-1)}{2}+3(k-1)=3(3k^2-2k+1)$$

κόκκινα πλακίδια.

Στο εσωτερικό του τριγώνου, υπάρχουν συνολικά

$$1+2+\cdots+(3k-2)=\frac{(3k-2)(3k-1)}{2}$$

σημεία.

Αν από αυτά αφαιρέσουμε τα $k^2+\dfrac{(k-2)(k-1)}{2}=\dfrac{3k^2-3k+2}{2}$ που έχουν το “πρωτεύον χρώμα”, μένουν $3k(k-1)$ σημεία που έχουν τα “δευτερεύοντα χρώματα”.

Έτσι θα έχουμε $\dfrac{3k(k-1)}{2}$ μπλε και $\dfrac{3k(k-1)}{2}$ πράσινα σημεία στο εσωτερικό του τριγώνου.

Τελικά έχουμε: $3(3k^2-2k+1)=n^2-2n+3$ κόκκινα πλακίδια, $3k(3k-2)=n(n-1)$ μπλε και $3k(3k-2)=n(n-1)$ πράσινα πλακίδια.