ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
Προκριματικός διαγωνισμός Νέων
7 Απριλίου 2012

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (a,b,c), που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$a(a-b-c)+\left(b^2+c^2-bc\right)=4a^2\left(abc-\frac{a^2}{4}-b^2c^2\right).$$

Λύση

Μετά από πράξεις στα δύο μέλη, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=a^2\left(4abc-a^2-4b^2c^2\right) \qquad (1)$$

Το πρώτο μέλος της εξίσωσης (1) γράφεται στη μορφή

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0, \qquad (2)$$

όπου η ισότητα ισχύει όταν $a=b=c$.

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1) γράφεται στη μορφή

$$a^2\left(4abc-a^2-4b^2c^2\right)=-a^2\left(a^2-4abc+4b^2c^2\right)=-a^2\left(a-2bc\right)^2\leq 0, \quad (3)$$

όπου η ισότητα ισχύει όταν $a=0$ ή $a-2bc=0$.

Επομένως, σύμφωνα με τις (2) και (3) η εξίσωση αληθεύει, αν, και μόνον αν, τα δύο μέλη της είναι ίσα με 0, δηλαδή όταν

$$a=b=c \text{ και } (a=0 \text{ ή } a-2bc=0)$$

$$\Leftrightarrow a=b=c=0 \text{ ή } a=b=c \text{ και } a-2a^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=b=c=0 \text{ ή } a=b=c=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a,b,c)=(0,0,0) \text{ ή } (a,b,c)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη των θετικών ακέραιων p,q που είναι πρώτοι μεταξύ τους και ικανοποιούν την εξίσωση

$$p^2+2q^2+334=\left[p^2,q^2\right],$$

όπου $\left[p^2,q^2\right]$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των p^2, q^2.

Λύση

Επειδή οι θετικοί ακέραιοι p,q είναι πρώτοι μεταξύ τους, θα έχουμε $(p,q)=1$, οπότε θα ισχύει και ότι $\left(p^2,q^2\right)=1$ και $\left[p^2,q^2\right]=\dfrac{p^2q^2}{\left(p^2,q^2\right)}=p^2q^2$. Έτσι η δεδομένη εξίσωση γίνεται

$$p^2+2q^2+334=p^2q^2 \Leftrightarrow p^2q^2-2q^2=p^2+334 \Leftrightarrow q^2=\frac{p^2+334}{p^2-2},$$

αφού $p^2-2\neq 0$. Από την τελευταία ισότητα έπεται ότι

$$\left(p^2-2\right)\middle|\, p^2+334=\left(p^2-2\right)+336 \Rightarrow \left(p^2-2\right)\middle|\,336=2^4\cdot 3\cdot 7.$$

Σημειώνουμε ότι οι διαιρέτες του $336=2^4\cdot 3\cdot 7$ από το γνωστό τύπο που μας δίνει το πλήθος των θετικών διαιρετών ενός ακεραίου, είναι συνολικά $(4+1)(1+1)(1+1)=20$ και έχουμε ότι:

$$\left(p^2-2\right)\in \Delta(336)=\{1,2,4,8,16,3,6,12,24,46,7,14,28,56,112,21,42,84,168,336\}$$

$$\Leftrightarrow p^2\in\{3,4,6,10,18,5,8,14,26,48,9,16,30,58,114,23,44,86,170,338\}.$$

Οι μόνες αποδεκτές τιμές για το p^2 είναι οι 4, 9 και 16, από τις οποίες προκύπτει ότι: $p=2$ ή $p=3$ ή $p=4$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Για $p=2$, λαμβάνουμε $q^2=\dfrac{p^2+334}{p^2-2}=1+\dfrac{336}{p^2-2}=169 \Rightarrow q=13$, οπότε προκύπτει το ζευγάρι $(p,q)=(2,13)$ που είναι δεκτό.
- Για $p=3$, λαμβάνουμε $q^2=1+\dfrac{336}{3^2-2}=49 \Rightarrow q=7$, οπότε προκύπτει το ζευγάρι $(p,q)=(3,7)$ που είναι δεκτό.
- Για $p=4$, λαμβάνουμε $q^2=1+\dfrac{336}{4^2-2}=25 \Rightarrow q=5$, οπότε προκύπτει το ζευγάρι $(p,q)=(4,5)$ που είναι δεκτό.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c}(\mathrm{O},R)$, (με κέντρο O και ακτίνα R). Έστω O_1 το συμμετρικό του O ως προς την $\mathrm{A\Gamma}$. Ο κύκλος $\mathrm{c}_1(\mathrm{O}_1,R)$ (με κέντρο το O_1 ακτίνα R), τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο Z. Αν το ύψος $\mathrm{A\Delta}$ προεκτεινόμενο τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $\mathrm{c}(\mathrm{O},R)$ στο σημείο E, να αποδείξετε ότι η ευθεία $\mathrm{E\Gamma}$ είναι κάθετη στην ευθεία AZ.

Λύση (1$^{\text{ος}}$ τρόπος)

Επειδή O_1 είναι το συμμετρικό του O ως προς την $\mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{OA}=\mathrm{O\Gamma}=R$, το τετράπλευρο $\mathrm{AO\Gamma O}_1$ είναι ρόμβος πλευράς R και ο κύκλος $\mathrm{c}_1(\mathrm{O}_1,R)$ θα περνάει από τα σημεία A και Γ.

Έστω ότι η ευθεία AZ τέμνει την $\mathrm{E\Gamma}$ στο σημείο K. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{AK}\perp\mathrm{E\Gamma}$.

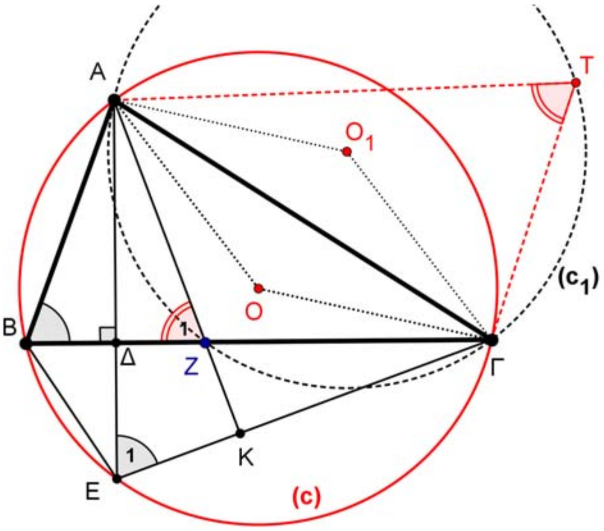
Επειδή $\mathrm{A\Delta}$ ύψος, η γωνία $\hat{\Delta}$ είναι ορθή. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $\mathrm{\Delta EKZ}$ είναι εγγράψιμο (τότε θα ισχύει $\hat{\Delta}=\hat{\mathrm{K}}=90^{\circ}$).

Το τετράπλευρο $\mathrm{ABE\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο (c), οπότε θα είναι:

$$\hat{\mathrm{E}}_1=\hat{\mathrm{B}}. \tag{1}$$

Θεωρούμε τυχόν σημείο T του κύκλου (c_1) (στο τόξο $\mathrm{A\Gamma}$ που δεν ανήκει το σημείο Z). Το τετράπλευρο $\mathrm{AZ\Gamma T}$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (c_1). Άρα είναι

$$\hat{\mathrm{T}}=\hat{\mathrm{Z}}_1.$$



Σχήμα 1

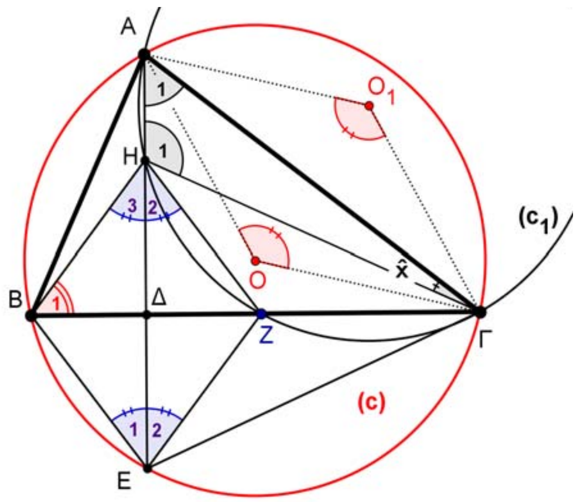
Οι γωνίες $\hat{\mathrm{T}}$ και $\hat{\mathrm{B}}$ είναι ίσες μεταξύ τους, διότι είναι εγγεγραμμένες σε ίσους κύκλους και βαίνουν στην κοινή χορδή $\mathrm{A\Gamma}$, οπότε έχουμε

$$\hat{\mathrm{T}} = \hat{\mathrm{Z}}_1 = \hat{\mathrm{B}}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.

Λύση (2ος τρόπος)

Επειδή O_1 είναι το συμμετρικό του O ως προς την $\mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{OA} = \mathrm{O\Gamma} = R$, το τετράπλευρο $\mathrm{AO\Gamma O}_1$ είναι ρόμβος πλευράς R. Άρα ο κύκλος $\mathrm{c}_1(\mathrm{O}_1, R)$ θα περνάει από τα σημεία A και Γ.



Σχήμα 2

Έστω τώρα ότι ο κύκλος $\mathrm{c}_1(\mathrm{O}_1, R)$ τέμνει την $\mathrm{A\Delta}$ στο σημείο H. Θα αποδείξουμε ότι το σημείο H είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ και στη συνέχεια ότι το σημείο Z είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AE\Gamma}$.

Η γωνία $\mathrm{A\hat{O}\Gamma}$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $\mathrm{c}(\mathrm{O}, R)$ οπότε: $\mathrm{A\hat{O}\Gamma} = 2\hat{\mathrm{B}}$.

Η γωνία $\mathrm{A\hat{O}\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\mathrm{A\hat{O}_1\Gamma}$ (απέναντι γωνίες του ρόμβου $\mathrm{AO\Gamma O_1}$), οπότε

$$\mathrm{A\hat{O}\Gamma} = \mathrm{A\hat{O}_1\Gamma} = 2\hat{\mathrm{B}}.$$

Η γωνία $\hat{\mathrm{H}}_1$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο $c_1(\mathrm{O}_1, R)$, οπότε:

$$\hat{\mathrm{H}}_1 = 180^o - \frac{\mathrm{A\hat{O}_1\Gamma}}{2} = 180^o - \hat{\mathrm{B}}.$$

Από το τρίγωνο $\mathrm{AH\Gamma}$ έχουμε:

$$\hat{x} = 180^o - \hat{\mathrm{A}}_1 - \hat{\mathrm{H}}_1 = 180^o - (90^o - \hat{\Gamma}) - (180^o - \hat{\mathrm{B}}) =$$

$$= \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} - 90^o = 180^o - \hat{\mathrm{A}} - 90^o = 90^o - \hat{\mathrm{A}}.$$

Άρα $\mathrm{\Gamma H} \perp \mathrm{AB}$, οπότε το H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ και κατά συνέπεια $\mathrm{BH} \perp \mathrm{A\Gamma}$.

Ισχύουν τώρα οι παρακάτω ισότητες γωνιών.

$\hat{\mathrm{H}}_2 = \hat{\Gamma}$ (η γωνία $\hat{\mathrm{H}}_2$ είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $\mathrm{AHZ\Gamma}$).

$\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\Gamma}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο AB).

$\hat{\mathrm{H}}_3 = 90^o - \hat{\mathrm{B}}_1 = 90^0 - (90^o - \hat{\Gamma}) = \hat{\Gamma}$.

Από τις παραπάνω ισότητες γωνιών, προκύπτει ότι το τετράπλευρο HBEZ είναι ρόμβος, οπότε από $\mathrm{HB} // \mathrm{ZE}$ και $\mathrm{HB} \perp \mathrm{A\Gamma} \Rightarrow \mathrm{ZE} \perp \mathrm{A\Gamma}$. Άρα το Z είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AE\Gamma}$.

Παρατήρηση.

Για να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο HBEZ είναι ρόμβος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση: “ Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου, ως προς τις πλευρές του, βρίσκονται επάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου”.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι και ικανοποιούν την εξίσωση

$$x + y + z = 2013. \qquad \text{(E)}$$

(α) Να βρείτε το πλήθος των τριάδων (x, y, z) που είναι λύσεις της εξίσωσης (Ε).

(β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης (Ε) για τις οποίες ισχύει $x = y$.

(γ) Να βρείτε τη λύση (x, y, z) της εξίσωσης (Ε) για την οποία το γινόμενο xyz γίνεται μέγιστο.

Λύση

(α) Επειδή οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι και ικανοποιούν την εξίσωση $x + y + z = 2013$, έπεται ότι $1 \le x, y, z \le 2011$. Επομένως, για τον προσδιορισμό μιας τριάδας (x, y, z) που είναι λύση της εξίσωσης (Ε) έχουμε τις ακόλουθες δυνατότητες:

Ο άγνωστος x μπορεί να επιλεγεί με 2011 τρόπους, αφού $1 \le x \le 2011$. Τότε οι άγνωστοι y και z θα ικανοποιούν την εξίσωση

$$y + z = 2013 - x, \qquad (\mathrm{E}_1)$$

οπότε σε κάθε τιμή του y με $1 \le y \le (2013 - x) - 1$, αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του z τέτοια, ώστε να αληθεύει η εξίσωση (E_1).

- Για $x=1$, οι άγνωστοι y και z μπορούν να επιλεγούν με 2011 τρόπους, αφού τότε $1 \le y \le 2011$,
- Για $x=2$, οι άγνωστοι y και z μπορούν να επιλεγούν με 2010 τρόπους, αφού τότε πρέπει $1 \le y \le 2010$,
- Για $x=3$, οι άγνωστοι y και z μπορούν να επιλεγούν με 2009 τρόπους, αφού τότε πρέπει $1 \le y \le 2009$,
- ……………………………………
- Για $x=2010$, οι άγνωστοι y και z μπορούν να επιλεγούν με 2 τρόπους, αφού τότε πρέπει $1 \le y \le 2$,
- Για $x=2011$, οι άγνωστοι y και z μπορούν να επιλεγούν με 1 μόνο τρόπο, αφού τότε πρέπει $y=z=1$.

Έτσι συνολικά προκύπτουν

$$1+2+3+\cdots+2011=\frac{2011\cdot 2012}{2}=2011\cdot 1006=2023066,$$

διαφορετικές τριάδες που είναι λύσεις της εξίσωσης (Ε).

Διαφορετικά, θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει το θεώρημα του De Moivre που αφορά τη διαμέριση του θετικού ακέραιου n σε r θετικά ακέραια μέρη, όπου παίζει ρόλο η διάταξη. Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα η διαμέριση αυτή μπορεί να γίνει με $\binom{n-1}{r-1}$ τρόπους. Έτσι στο ερώτημα μας η απάντηση είναι ότι οι διαφορετικές λύσεις είναι συνολικά $\binom{2013-1}{3-1}=\binom{2012}{2}=\frac{2012\cdot 2011}{2}=1006\cdot 2011$.

(β) Λόγω της ισότητας $x=y$, οι δύο πρώτοι άγνωστοι μπορούν να πάρουν τις τιμές από 1 μέχρι και 1006, ενώ σε κάθε περίπτωση ο z προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από την σχέση $z=2013-(x+y)$. Έτσι, η συμπλήρωση των δύο πρώτων θέσεων της διατεταγμένης τριάδας (x,y,z) μπορεί να γίνει με 1006 τρόπους, ενώ στη συνέχεια η συμπλήρωση της τρίτης θέσης μπορεί να γίνει με έναν ακριβώς τρόπο, οπότε έχουμε συνολικά $1006\cdot 1=1006$ διατεταγμένες τριάδες (x,y,z) με $x=y$ που είναι λύσεις της εξίσωσης (Ε).

(γ) Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, για κάθε τριάδα (x,y,z) που είναι λύση της (Ε), έχουμε ότι:

$$\sqrt[3]{xyz}\le\frac{x+y+z}{3}=\frac{2013}{3}=671 \Leftrightarrow xyz\le 671^3,$$

ενώ η ισότητα ισχύει όταν $x=y=z=671$. Επομένως η ζητούμενη τριάδα είναι η $(x,y,z)=(671,671,671)$.