Διακριτά Μαθηματικά
Συνδυαστική

Γεώργιος Χρ. Μακρής
http://users.sch.gr/gmakris

7 Αυγούστου 2012

Συνδυαστική

Η **Συνδυαστική** είναι ένα κομμάτι των Μαθηματικών που επικεντρώνεται στη "μέτρηση" του πλήθους των αντικειμένων ενός συνόλου. Η Συνδυαστική ασχολείται τόσο με την εξεύρεση χρήσιμων τρόπων μέτρησης, όσο και με την πραγματοποίηση των μετρήσεων καθαυτών.

Αρχή της Απαρίθμησης

Ο απλούστερος τρόπος είναι απλώς να απαριθμήσουμε ένα προς ένα τα στοιχεία του συνόλου. Δείχνουμε δηλαδή κάθε ένα στοιχείο διαδοχικά και αυξάνουμε κατά ένα το πλήθος των μετρημένων ως εκείνη τη στιγμή στοιχείων, έως ότου δείξουμε (και μετρήσουμε) όλα τα στοιχεία του συνόλου ακριβώς από μια φορά το καθένα τους. Αυτή η μέθοδος είναι η απλούστερη δυνατή, αλλά και η βασικότερη όλων. Κάθε άλλη μέθοδος μέτρησης εξαρτάται από αυτή άμεσα ή έμμεσα.

Πληθικότητα - Διαμέριση

- S : Σύνολο
- |S| : **πληθικότητα** ή **πληθικός αριθμός** του S (φυσικός αριθμός) εκφράζει το πλήθος των στοιχείων του S.
- ∅ : κενό σύνολο (|S| = |∅| = 0).

- Το S μπορεί να **διαμερίζεται** σε πεπερασμένο πλήθος άλλων συνόλων S_1, S_2, . . . , S_n., ανά δύο τα σύνολα S_1, S_2, . . . , S_n δε έχουν κοινά στοιχεία (θα είναι δηλαδή **ξένα μεταξύ τους** όπως λέμε αλλιώς) και ταυτόχρονα η ένωσή όλων τους θα είναι το S.

Προσθετική Αρχή

- Αν ένα πεπερασμένο σύνολο αντικειμένων S διαμερίζεται σε (θυμηθείτε : ξένα μεταξύ τους) υποσύνολα $S_1, S_2, \ldots, S_n$, τότε το πλήθος των αντικειμένων του S ισούται με το άθροισμα των πληθών των αντικειμένων στα $S_1, S_2, \ldots, S_n$, δηλαδή

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_n|$$

Προσθετική Αρχή (δεύτερη διατύπωση)

Αν $S_1, S_2, \ldots, S_n$ είναι κάποια πεπερασμένα σύνολα αντικειμένων ξένα μεταξύ τους ανά δύο, τότε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους επιλέγουμε ένα αντικείμενο από *κάποιο* σύνολο από τα S_i ισούται με

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_n|$$

Πολλαπλασιαστική Αρχή

Αν $S_1, S_2, \ldots, S_n$ είναι κάποια πεπερασμένα σύνολα αντικειμένων ξένα μεταξύ τους ανά δύο, τότε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους επιλέγουμε ένα αντικείμενο από *κάθε ένα* σύνολο από τα S_i ισούται με

$$|S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n|.$$

(Για δύο σύνολα) : Αν μια επιλογή μπορεί να γίνει κατά m τρόπους και μια επόμενη επιλογή κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $n \cdot m$ τρόποι με τους οποίους οι επιλογές αυτές μπορούν να γίνουν διαδοχικά.

Προσθετική - Πολλαπλασιαστική Αρχή

Την Πολλαπλασιαστική αρχή τη χρησιμοποιούμε όταν επιλέγουμε ένα αντικείμενο από κάθε ένα σύνολο από τα Si δηλαδή ένα από το S_1 και ένα από το S_2 κ.ο.κ. και ένα από το Sn.

Την Προσθετική Αρχή τη χρησιμοποιούμε όταν επιλέγουμε ένα αντικείμενο από κάποιο σύνολο από τα Si δηλαδή ένα από το S1 ή ένα από το S2 κ.ο.κ. ή ένα από το Sn.

Όταν χωρίζουμε το πρόβλημά μας σε ξεχωριστές περιπτώσεις, τις αναλύουμε ανεξάρτητα και ΑΘΡΟΙΖΟΥΜΕ τα επιμέρους αποτελέσματα.

Όταν μας ενδιαφέρουν οι τρόποι με τους οποίους συνδυάζονται τα αποτελέσματα των περιπτώσεων, ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΖΟΥΜΕ τα επιμέρους αποτελέσματα

Παραγοντικό (n!)

Το παραγοντικό ορίζεται ως εξής $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$

Δηλαδή 3!= , 4!=24, 1!=1.

0!=1

$$\frac{7!}{5!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 6\cdot 7$$

$$n! = (n-1)!\cdot n$$

ΓΕΝΙΚΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

να διαλέξουμε k αντικείμενα από ένα σύνολο n αντικειμένων

Αν ενδιαφερόμαστε για τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα επιλεγμένα αντικείμενα μιλάμε για **ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ.**

Αν δεν ενδιαφερόμαστε για τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα επιλεγμένα αντικείμενα μιλάμε για **ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥΣ**.

Συνδυασμοί : k αντικειμένων από n (ή πιο σωστά n ανά k) χωρίς επανάληψη

Μεταξύ n αντικειμένων μπορούμε να επιλέξουμε k από αυτά κατά

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

τρόπους. (Η σειρά με την οποία επιλέγουμε τα αντικείμενα δε μας ενδιαφέρει).

Έχουμε n αντικείμενα. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να επιλέξουμε μια ομάδα k αντικειμένων από αυτά; Η απάντηση

συμβολίζεται C(n,k) ή $\binom{n}{k}$ και διαβάζεται «n ανά k»

το οποίο όπως είδαμε ισούται με

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ιδιότητες

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Τυπολόγιο

	ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ	ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ
ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$
ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ	$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$	n^k

	Συνδυασμοί (Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά)	Διατάξεις (Μας ενδιαφέρει η σειρά)
Χωρίς επαναλήψεις	$\binom{n}{k}$	$n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$
Με επαναλήψεις	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

ΔΙΑΝΟΜΕΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΣΕ ΥΠΟΔΟΧΕΣ

Πρόβλημα: Έχουμε m κουτιά και θέλουμε να κατανείμουμε n αντικείμενα μέσα σ΄ αυτά.

Τυπολόγιο:

Διακεκριμένα αντικείμενα όπου δεν παίζει ρόλο η σειρά	m^n
Διακεκριμένα αντικείμενα όπου παίζει ρόλο η σειρά	$\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$
Μη διακεκριμένα αντικείμενα	$\binom{m+n-1}{n}$

Ασκήσεις

1. Αν κάποιος διαθέτει 3 σακάκια, 4 παντελόνια, 5 πουκάμισα, 10 ζευγάρια κάλτσες και 2 ζευγάρια παπούτσια, α) με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας από όλα τα είδη; β) με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας τουλάχιστον ένα από όλα τα είδη; γ) με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας από όλα τα είδη αλλά ένα συγκεκριμένο σακάκι ;

2. Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούμε να κατασκευάσουμε που να περιέχουν στη σειρά τρία κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο αριθμό; Πόσες είναι οι πινακίδες που αρχίζουν με φωνήεν και τελειώνουν σε άρτιο ψηφίο;

Ασκήσεις

3. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 4 άτομα σε 6 θέσεις μιας σειράς Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν εάν η τελευταία θέση να μείνει κενή;

4. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά 4 αγόρια και 3 κορίτσια; Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;

5. Σε έναν κύκλο δίνονται 8 σημεία $A1$, $A2$,..., $A8$. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία αυτά; Πόσα από αυτά δεν διέρχεται από το σημείο $A1$;

Ασκήσεις

6. Με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 φτιάχνουμε τετραψήφιους αριθμούς στους οποίους το κάθε ψηφίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερο από μια φορά. Πόσους αριθμούς μπορούμε να δημιουργήσουμε; Πόσους αριθμούς με όλα τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά;

7. Δέκα φίλοι, μεταξύ των οποίων ο Κώστας και ο Νίκος, θα καθίσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλον. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν όλοι μαζί ο ένας δίπλα στον άλλο; Με πόσους τρόπους ο Κώστας και ο Νίκος μπορεί να καθίσουν σε διπλανές θέσεις;

Ασκήσεις

8. Πιο είναι το πλήθος των περιπτώσεων τέσσερα άτομα να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του έτους;

9. Από ένα σύλλογο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαίως 4 άτομα. Να βρείτε το πλήθος των περιπτώσεων : i) τα άτομα να είναι γυναίκες ii) ένας τουλάχιστον να είναι άνδρας iii) να υπάρχει μία μόνο γυναίκα.

10. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon 1$ και $\varepsilon 2$. Στην $\varepsilon 1$ ορίζουμε 10 σημεία και στην $\varepsilon 2$ ορίζουμε 20 σημεία. Πόσα τρίγωνα ορίζουν τα σημεία αυτά; Πόσα τρίγωνα έχουν την μία πλευρά στην ε1;

Ασκήσεις

11. Ο υπάλληλος ενός χώρου στάθμευσης δίνει τυχαία τα τρία κλειδιά αυτοκινήτων στους τρεις κατόχους των αυτοκινήτων αυτών. Να βρείτε το πλήθος των περιπτώσεων :

Α: “Κάθε οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί”

Β: “Μόνο ένας οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί”

Γ: “Κανένας οδηγός να μην πάρει το δικό του κλειδί”.

Παράδειγμα

Παράδειγμα: Σε πόσα ευθύγραμμα τμήματα χωρίζονται οι διαγώνιοι ενός 10γώνου, αν δεν υπάρχουν τρεις διαγώνιοι που να περνούν από το ίδιο σημείο;

Απάντηση: Υπάρχουν $C(10,2) - 10 = 45 - 10 = 35$ διαγώνιοι.

Για κάθε τετράδα κορυφών υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής. Αρα υπάρχουν $C(10,4) = 210$ σημεία τομής.

Μία διαγώνιος με k_i σημεία τομής χωρίζεται σε $k_i + 1$ τμήματα.

$$\sum (k_i + 1) = 35 + \sum k_i = 35 + 2 \cdot 210 = 455$$

(κάθε σημείο τομής ανήκει σε δύο διαγωνίους)

Διωνυμικό Θεώρημα

Ο συντελεστής της δύναμης x^k *στο ανάπτυγμα του διωνύμου* $(x+1)^n$ *είναι ο* $\binom{n}{k}$, *δηλαδή*

$$(x+1)^n = \sum_{n=0}^{k} \binom{n}{k} x^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n \qquad (1.1)$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n} x^n$$

Όπου $0 \le k \le n$ *και* $n, k \in \mathbb{N}$. $\square$