

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2000  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
(ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Ας υποθέσουμε ότι  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$ , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$ ,  $n \leq \nu$ .

**α)** Τι ονομάζουμε (απόλυτη) συχνότητα  $v_i$  της τιμής  $x_i$ , όπου  $i=1, 2, 3, \dots, n$ ;

*Μονάδες 4*

**β)** Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$  όπου  $i=1, 2, 3, \dots, n$ ;

*Μονάδες 4*

**γ)** Αν  $f_1, f_2, \dots, f_n$  είναι οι σχετικές συχνότητες των τιμών  $x_1, x_2, \dots, x_n$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = 1.$$

*Μονάδες 4,5*

**B.** Εξετάζοντας 50 οικογένειες ως προς τον αριθμό των παιδιών τους, σχηματίσαμε τον επόμενο πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

Αριθμός παιδιών $x_i$	Αριθμός οικογενειών $v_i$
0	7
1	15
2	20
3	5
4	3
Σύνολο:	50

Για τις παρακάτω ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**1)** Η (απόλυτη) συχνότητα της τιμής  $x_3 = 2$  είναι  
**A.** 15    **B.** 0,4    **Γ.** 0,14    **Δ.** 20    **Ε.** 42

*Μονάδες 6*

**2)** Η σχετική συχνότητα της τιμής  $x_4 = 3$  είναι  
**A.** 0,94    **B.** 0,1    **Γ.** 5    **Δ.** 4    **Ε.** 47

*Μονάδες 6,5*

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x-3}$$

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

*Μονάδες 7*

**β)** Να βρείτε την παράγωγο  $f'$  της συνάρτησης  $f$ .

Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε την τιμή  $f'(0)$ .

Μονάδες 9

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 + 5x + 3$$

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της  $f$ .

Μονάδες 12

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 13

**ΘΕΜΑ 4ο**

Για τον έλεγχο της κατανάλωσης καυσίμου (ίδιου τύπου) δυο αυτοκινήτων Α και Β μετρήθηκε η κατανάλωσή τους σε έξι διαδρομές για το Α και σε πέντε διαδρομές για το Β. Η κατανάλωση στις έξι διαδρομές (σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα) για το αυτοκίνητο Α ήταν

9, 6, 7, 9, 9, 8

ενώ η κατανάλωση στις πέντε διαδρομές για το αυτοκίνητο Β ήταν

8, 10, 7, 8, 12.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο Α.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο Β.

Μονάδες 10

γ) Αν ένας πωλητής ήθελε να χρησιμοποιήσει τα πιο πάνω δεδομένα για να πείσει έναν υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο Α και όχι το Β, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε; Αν αντίστροφα ήθελε να πείσει τον υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο Β και όχι το Α, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε;

Μονάδες 5

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1.** Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Μονάδες 8,5

**A.2.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, ( $=$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ) έτσι ώστε να είναι αληθής:

**α.**  $P(A') \dots 1 - P(A)$

Μονάδες 2

**β.** αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(B) \dots P(A)$ .

Μονάδες 2

**B.1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και A' το αντίθετο του ενδεχομένου A.

**α.** Αν  $A' \subseteq B$  τότε  $P(A) + P(B) < 1$ .

**β.** Αν  $P(A) = P(A')$  τότε  $2P(A) = P(\Omega)$ .

Μονάδες 4

**B.2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν  $A \subseteq B$ ,  $P(A) = \frac{1}{4}$  και  $P(B) = \frac{5}{12}$  τότε η  $P(A \cup B)$

είναι ίση με:

**α.**  $\frac{1}{4}$     **β.**  $\frac{5}{12}$     **γ.**  $\frac{2}{3}$     **δ.**  $\frac{1}{6}$ .

Μονάδες 2,5

**B.3.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης A** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης B**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύει ότι  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$  και

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5}.$$

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $P(A-B)$	1. $\frac{1}{20}$
β. $P((B-A)')$	2. $\frac{2}{15}$
γ. $P((A \cap B)')$	3. $\frac{4}{5}$
	4. $\frac{1}{12}$
	5. $\frac{19}{20}$

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ 2ο**Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sin x + \eta \mu x$ .Α. Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f''(x) = 0$ .

Μονάδες 8

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0,1)$ .

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την τιμή  $\lambda \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f' \left( \frac{\pi}{2} \right) - 2f \left( \frac{\pi}{2} \right) = 2.$$

Μονάδες 9

Συγκέντρωση Θεμάτων: Γιώργος Χρ. Μακρής

**ΘΕΜΑ 3ο**

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [ - )	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i$
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

Α. Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.

Μονάδες 8

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.

Μονάδες 9

Γ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

α. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.

Μονάδες 4

**ΘΕΜΑ 4ο**

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

**A.** Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.

Μονάδες 6

**B.** Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

**Γ.** Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά.

Μονάδες 6

**Δ.** Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).

Μονάδες 7

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A. α)** Στη **Στήλη I** του παρακάτω πίνακα δίνονται συναρτήσεις  $f(x)$  και στη **Στήλη II** οι παράγωγοί τους  $f'(x)$ . Να γράψετε τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη I Συνάρτηση $f(x)$	Στήλη II Παράγωγος $f'(x)$
<b>A.</b> $x$	<b>1.</b> $-ημx$
<b>B.</b> $\sqrt{x}$ , $x > 0$	<b>2.</b> $x^{e-1}$
<b>Γ.</b> $x^e$ , $x > 0$ και $e$ ρητός	<b>3.</b> $συνx$
<b>Δ.</b> $ημx$	<b>4.</b> $1$
<b>E.</b> $συνx$	<b>5.</b> $2\sqrt{x}$
	<b>6.</b> $e x^{e-1}$
	<b>7.</b> $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	<b>8.</b> $ημx$

Μονάδες 5

β) Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  στο  $\mathbf{R}$ . Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) + g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ με } g(x) \neq 0, \quad f(g(x)).$$

Μονάδες 7,5

**B.** Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α)  $f_1(x) = x^3 + \eta\mu x + 3 \sigma\upsilon\nu x$

β)  $f_2(x) = (x - 1)^2$

γ)  $f_3(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

δ)  $f_4(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

ε)  $f_5(x) = \sigma\upsilon\nu(2x+3)$

Μονάδες 12,5

**ΘΕΜΑ 2ο**

Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:

11    3    7    5    16    14    11    10    11    12

Να βρείτε:

α) τη διάμεσο,

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

β) τη μέση τιμή,  
 γ) την επικρατούσα τιμή,  
 δ) το εύρος και  
 ε) τη διακύμανση  
 της παραπάνω βαθμολογίας.

Μονάδες 25

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων της μεταβλητής X:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα
[ - )	$x_i$	$n_i$	$f_i$	$F_i\%$
1 - 5				20
5 - 9				50
9 - 13				85
13 - 17				95
17 - 21		2		
<b>Σύνολο</b>			1	

Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένο τον πίνακα.

Μονάδες 25

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 5x + 6$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ακρότατα.

*Μονάδες 10*

β) Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

*Μονάδες 5*

γ) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x + 6}{x + 1}$

*Μονάδες 10*

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

**Μονάδες 12**

**B.1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu x$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{IR}$  και ισχύει

$$f'(x) = \sigma \upsilon \nu x.$$

**Μονάδες 8**

**B.2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $[\alpha, \beta]$  και συνεχής στο  $(\alpha, \beta)$ , τότε η  $f$  παίρνει πάντοτε στο  $[\alpha, \beta]$  μία μέγιστη τιμή.

**Μονάδα 1**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

**Μονάδα 1**

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

**Μονάδα 1**

δ. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , τότε

$$\int f(x) dx = xf(x) - \int xf'(x) dx.$$

**Μονάδα 1**

ε. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$

κονιά στο  $x_0$ .

**Μονάδα 1**

### ΘΕΜΑ 2ο

Έστω  $z$  ένας μιγαδικός αριθμός και  $f(v) = i^v z$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$ .

α. Να δείξετε ότι  $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$ .

**Μονάδες 7**

β. Αν  $|z| = \rho$  και  $\text{Arg}(z) = \theta$ , να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right].$$

Συγκέντρωση Θεμάτων: Γιώργος Χρ. Μακρής

**Μονάδες 8**

γ. Αν  $|z| = 2$  και  $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$ , να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $0$ ,  $z$  και  $f(13)$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης  $f \circ g$  είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η  $g$  είναι 1-1.

**Μονάδες 7**

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

**Μονάδες 18**

### ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις  $h$ ,  $g$  συνεχείς στο  $[\alpha, \beta]$ .

Να αποδείξετε ότι αν  $h(x) > g(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε και

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

**Μονάδες 2**

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$ , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0.$$

ι) Να εκφραστεί η  $f'$  ως συνάρτηση της  $f$ .

**Μονάδες 5**



ιι) Να δείξετε ότι  $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 12**

ιιι) Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$  και τον άξονα  $x'x$ , να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) .$$

**Μονάδες 6**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2002  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x)=x$  είναι  $f'(x)=1$ .

*Μονάδες 9*

β) Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη, θεωρώντας ότι υπάρχουν οι  $f'(x)$  και  $g'(x)$ .

1.  $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$

2.  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

3.  $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x)$

4.  $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ ,  $g(x) \neq 0$

5.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$

6.  $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

7.  $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$

8.  $(x^\rho)' = x^{\rho-1}$ ,  $\rho$  ρητός,  $x > 0$

Μονάδες

16

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x)$ .

Μονάδες 5

**β)** Να βρείτε τα :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Μονάδες

12

**γ)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(2, +\infty)$ .

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 3ο**

Τα αποτελέσματα των εκλογών σε ένα εκλογικό τμήμα δίνονται από τον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα:

Κόμμα	Συχνότητα $\alpha$	Σχετική Συχνότητα
$x_i$	$v_i$	$f_i$
A		0,15
B	150	0,30

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

Γ		0,35
Δ		
<b>Σύνολο</b> ο		

**α)** Να βρείτε πόσοι εκλογείς ψήφισαν στο τμήμα αυτό.

Μονάδες

10

**β)** Να βρείτε πόσες ψήφους πήρε κάθε κόμμα σε αυτό το εκλογικό τμήμα.

Μονάδες

10

**γ)** Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 4ο**

Μια εταιρεία απασχολεί 20 εργαζόμενους εκ των οποίων οι 10 εργάζονται στο τμήμα **A** και οι 10 στο τμήμα **B**.

Η μέση τιμή των μηνιαίων μισθών του τμήματος **A** είναι 720 ευρώ και ο μεγαλύτερος μισθός του τμήματος είναι 900 ευρώ.

Οι μισθοί των εργαζομένων στο τμήμα **B** είναι :

950, 900, 1060, 980, 920, 945, 975, 930, 900, 940.

Να βρείτε :

**α)** Το άθροισμα των μηνιαίων μισθών του τμήματος **A**.

*Μονάδες 6*

**β)** Τη μέση τιμή, το εύρος και την επικρατούσα τιμή των μισθών του τμήματος **B**.

*Μονάδες 9*

**γ)** Τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση.

*Μονάδες*

10

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2003  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = x$  είναι  $f'(x) = 1$ .

**Μονάδες 8**

**B.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;

**Μονάδες 6**

**Γ.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων.

**Μονάδες 6**

**Δ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

**β.** Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

**γ.** Ισχύει  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$  όπου  $f$ ,  $g$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

**δ.** Δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα, όταν  $A \cap B = \emptyset$ .

ε. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ 2ο

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

α. γυναίκα ή φιλόλογος

**Μονάδες 5**

β. γυναίκα και όχι φιλόλογος

**Μονάδες 5**

γ. άνδρας και φιλόλογος

**Μονάδες 7**

δ. άνδρας ή φιλόλογος.

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

α.  $\mathbb{R}$  β.  $(-1,1)$  γ.  $\mathbb{R} - \{-1,1\}$  δ.  $(1, +\infty)$

**Μονάδες 5**

B. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x$  του πεδίου ορισμού της.

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

**Μονάδες 7**

Γ. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$

**Μονάδες 6**

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0, f(0))$  με τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ 4ο

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα A) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα B) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα A	Ομάδα B
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.

**Μονάδες 6**

β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.

**Μονάδες 5**

γ. Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας A γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας B αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;

Μονάδες 8

- δ. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ  
ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## ΘΕΜΑ 1ο

- A. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Μονάδες 9

- B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το :

- α.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ,  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$  και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

- β.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$ ,  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$

- γ.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ,  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$  και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

- δ.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h}$ ,  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ .

Μονάδες 5

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μέτρο θέσης ενός συνόλου δεδομένων είναι :

- α. το εύρος
- β. η διάμεσος
- γ. η διακύμανση
- δ. η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 5

Δ. Να ορίσετε το συντελεστή μεταβολής ενός συνόλου παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

#### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της  $f$ , όταν

$$x=3, \text{ ισούται με } \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Μονάδες 10

γ. Αν  $h(x) = \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2}$  για  $x \neq 2$ , να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ .

Μονάδες 10

#### ΘΕΜΑ 3ο

Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα. Έστω  $A$  το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας

να είναι άρτιος και  $B$  το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5.

Αν  $A'$ ,  $B'$  είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των  $A$  και  $B$  αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες :

α.  $P(A)$ ,  $P(B)$

Μονάδες 6

β.  $P(A \cup B)$

Μονάδες 6

γ.  $P(A \cup B')$

Μονάδες 6

δ.  $P((A' \cap B) \cup (A \cap B'))$

Μονάδες 7

#### ΘΕΜΑ 4ο

Το βάρος ενός δείγματος μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή.

Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος.

Μονάδες 6

β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος, που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg.

Μονάδες 6

δ. Ο αριθμός των μαθητών του δείγματος αυτού που έχουν βάρος από 55 Kg έως 60 Kg, είναι 27. Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος.

Μονάδες 7

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΜΑΪΟΥ 2003  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## ΘΕΜΑ 1ο

A) Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2$ . Να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = 2x.$$

Μονάδες 10

B) Ας υποθέσουμε ότι  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$ , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$  (όπου  $k \leq n$ ),  $n_i$  είναι η συχνότητα και  $f_i$  είναι σχετική συχνότητα της τιμής  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων των τιμών της μεταβλητής  $X$  είναι ίσο με 100.

β) Η μέση τιμή  $\bar{x}$  ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$$

γ) Για τη σχετική συχνότητα  $f_i$  ισχύει ότι  $f_i > 1$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, k$ .

δ) Ο συντελεστής μεταβολής CV ορίζεται (για  $\bar{x} \neq 0$ ) από το λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} .$$

ε) Η διακύμανση (ή διασπορά) της μεταβλητής X ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i .$$

**Μονάδες 15**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά τη διάρκεια ενός μηνός και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας.

Ώρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [ - )	Αθροιστική συχνότητα $N_i$
0 - 2	5
2 - 4	15
4 - 6	20
6 - 8	35
8 - 10	40

Να βρείτε:

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

α) το μέγεθος του δείγματος,

**Μονάδες 5**

β) τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες των κλάσεων και

**Μονάδες 10**

γ) τη μέση τιμή.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2 + 5}$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε:

α) το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x'x,  
**Μονάδες 5**

β) το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,

**Μονάδες 5**

γ) την παράγωγο της συνάρτησης f,

**Μονάδες 5**

δ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και

**Μονάδες 5**

ε) τα ακρότατα της συνάρτησης f.

**Μονάδες 5**



**ΘΕΜΑ 4ο**

Οι χρόνοι σε ώρες (παρατηρήσεις) που έξι από τους επίγειους σταθμούς δεν είχαν επαφή με τον Ελληνοκυπριακό δορυφόρο είναι:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 1, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 4, \quad t_6 = 5.$$

α) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και τη διάμεσο  $\delta$  των παρατηρήσεων.

**Μονάδες 6**

β) Αν  $f(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + (t_3 - x)^2 + (t_4 - x)^2 + (t_5 - x)^2 + (t_6 - x)^2$ ,

τότε:

i) να αποδείξετε ότι  $f'(\bar{x}) = 0$

**Μονάδες 6**

ii) να αποδείξετε ότι  $f(\bar{x}) = 6s^2$ , όπου  $s^2$  είναι η διακύμανση των παρατηρήσεων και

**Μονάδες 5**

iii) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(\bar{x}, f(\bar{x}))$ .

**Μονάδες 8**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 30 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

**ΘΕΜΑ 1ο**

A. Έστω ότι  $t_1, t_2, \dots, t_n$  είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος, μεγέθους  $n$  και  $\bar{x}$  η μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_n - \bar{x})}{n} = 0$$

**Μονάδες 13**

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = x, \quad g(x) = \eta\mu x, \quad h(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

και  $\varphi(x) = c,$

όπου  $c$  σταθερά.

**Μονάδες 12**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Η εξέταση ενός δείγματος 20 υπαλλήλων μιας επιχείρησης, ως προς τον αριθμό των ημερών που αυτοί απουσίασαν κατά το μήνα Δεκέμβριο του 2002, έδωσε τις εξής παρατηρήσεις:

$$0, 1, 1, 3, 0, 0, 2, 4, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 0.$$

α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία που λείπουν.

Ημέρες απουσίας $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i$	Αθροιστική ή Συχνότητα $N_i$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i$
0				
1				
2				
3				
4				
<b>Σύνολο</b>				

**Μονάδες 10**

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{X}$  των παρατηρήσεων.

**Μονάδες 5**

γ) Να βρείτε τη διάμεσο  $\delta$  των παρατηρήσεων.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+19}$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε:

α) το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και το  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,

**Μονάδες 6**

β) την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης  $f$ , και

**Μονάδες 9**

γ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Ένα χελιδόνι πετάει και το ύψος του  $h$  (σε μέτρα), από το έδαφος, δίνεται σε συνάρτηση με το χρόνο  $t$  (sec) από τον τύπο:

$$h(t) = 3t^2 - 6t + 5, \quad 0 \leq t \leq 5$$

Να βρείτε :

α) το ύψος στο οποίο το χελιδόνι βρίσκεται τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ,

**Μονάδες 6**

β) το ρυθμό μεταβολής του ύψους  $h$ , ως προς  $t$ , τη χρονική στιγμή  $t = 2$ ,

**Μονάδες 7**

γ) σε ποια χρονική στιγμή  $t$  το ύψος του χελιδονιού από το έδαφος γίνεται ελάχιστο και ποιο είναι τότε το ύψος αυτό;

**Μονάδες 12**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2004  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x) = c$  είναι ίση με 0.  
**Μονάδες 8**
- B.** Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.  
**Μονάδες 5**
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Η συχνότητα της τιμής  $x_i$  μιας μεταβλητής  $X$  είναι αρνητικός αριθμός.
- β.** Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ , όπου  $\bar{x}$  είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και  $s$  η τυπική τους απόκλιση.
- γ.** Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα  $v_i$  μιας μεταβλητής  $X$  με το μέγεθος  $n$  του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ .  
**Μονάδες 6**

- Δ.** Στον παρακάτω πίνακα τα  $A$  και  $B$  συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη **Στήλη I** αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα  $A$  και  $B$  διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη **Στήλη II** σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	Στήλη I		Στήλη II
<b>α</b>	πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα $A, B$	<b>1</b>	$A \cap B$
<b>β</b>	πραγματοποιείται το $A$ αλλά όχι το $B$	<b>2</b>	$A - B$
<b>γ</b>	πραγματοποιούνται συγχρόνως τα $A$ και $B$	<b>3</b>	$(A \cup B)'$
		<b>4</b>	$A \cup B$

Στη **Στήλη II** περισεύει μία σχέση.

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ .

- A.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**Μονάδες 10**

- B.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

**Μονάδες 15**

## ΘΕΜΑ 3ο

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης $x_i$	Συχνότητα $n_i$ σε χλμ.	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$ σε χλμ.	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i\%$
[5, 15)		60			
[15, 25)					68
[25, 35)				180	
[35, 45)					
Σύνολο		200			

A. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

Μονάδες 10

B. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα  $(x_i, f_i\%)$  και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ .

Μονάδες 5

Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$ .

Οι πιθανότητες  $P(A)$  και  $P(B)$  δύο ενδεχομένων  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι ίσες με τις τιμές του  $x$ , στις οποίες η  $f$  έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

A. Να δείξετε ότι  $P(A) = \frac{1}{2}$  και  $P(B) = \frac{1}{3}$

Μονάδες 9

B. Για τις παραπάνω τιμές των  $P(A)$ ,  $P(B)$  καθώς και για  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ , να βρείτε τις πιθανότητες:

i.  $P(A \cap B)$ ii.  $P(A - B)$ iii.  $P[(A \cap B)']$ iv.  $P[(A - B) \cup (B - A)]$ .

Μονάδες 16

## ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

- Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
- Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
- Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
- Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

**ΘΕΜΑ 1ο**

A. Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $A \subseteq B$ , τότε να αποδείξετε ότι  $P(A) \leq P(B)$ .

**Μονάδες 7**

B. α. Πότε ένα πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης;  
β. Να δώσετε τον ορισμό του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης.

**Μονάδες 6**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ ,

τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 l_2$ .

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_1 \in A$ , όταν  $f(x) \leq f(x_1)$  για κάθε x σε μια περιοχή του  $x_1$ .

γ. Ισχύει  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$ , όπου f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

δ. Ισχύει  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  με  $x > 0$ .

ε. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει  $P(A') = 1 + P(A)$ .

στ. Το μέτρο διασποράς **εύρος** ισούται με τη διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση.

**Μονάδες 12**

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο  $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$ .

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης.

**Μονάδες 9**

β. Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x}$ .

**Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A (0, f(0)).

**Μονάδες 8****ΘΕΜΑ 3ο**

Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου στα Μαθηματικά είναι 14, ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.

α. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπόλοιπων μαθητών.

**Μονάδες 12**

β. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών μαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής (CV).

**Μονάδες 13****ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 4x + 2, \text{ όπου } k \in \Omega.$$

Αν  $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6)$ , τότε να βρείτε:

α. Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων  $P(1)$ ,  $P(2)$ ,  $P(3)$ ,  $P(4)$ ,  $P(5)$ ,  $P(6)$ .

**Μονάδες 8**

β. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A$  και  $B$ , όπου  
 $A$ : «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»  
 $B$ : «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός».

**Μονάδες 8**

γ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου  $\Gamma$ , όπου  
 $\Gamma$ : «Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ ».

**Μονάδες 9**

### ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΜΑΪΟΥ 2004**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

### **ΘΕΜΑ 1ο**

A) Να γράψετε τον ορισμό της διαμέσου  $\delta$  ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά.

**Μονάδες 5**

B) Ας υποθέσουμε ότι  $t_1, t_2, \dots, t_n$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$ , που αφορά τις παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους  $n$ . Να γράψετε τη σχέση που δίνει τη μέση τιμή  $\bar{x}$  των παρατηρήσεων του δείγματος.

**Μονάδες 5**

*Για καθεμιά από τις προτάσεις Γ) και Δ), να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.*

Γ) Αν οι τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_k$  μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  είναι σε αύξουσα διάταξη και οι αντίστοιχες απόλυτες συχνότητές τους είναι  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής  $x_i$  είναι

$$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i, \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, k.$$

**Μονάδες 2**

Δ) Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές εάν ο συντελεστής μεταβολής (CV) ξεπερνά το 10%.

**Μονάδες 3**

Ε) Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν και οι δύο πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$ . Να γράψετε στο τετράδιό σας το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $R = \frac{f}{g}$  με

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} .$$

**Μονάδες 5**

ΣΤ) Υποθέτουμε ότι  $f$  είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε η  $f$  λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο  $x_0 \in A$ ;

**Μονάδες 2**

Ζ) Να μεταφέρετε συμπληρωμένες στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \dots , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \dots ,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon\phi x = \dots \quad (\text{όταν } \sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0) .$$

**Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  και  $g(x) = x - 3$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τα  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  .

**Μονάδες 8**

β) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$  .

**Μονάδες 7**

γ) Αν  $f'(x)$  και  $g'(x)$  είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$  αντίστοιχα, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = 3f'(200) + 819g'(-1) .$$

**Μονάδες 10**

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

**ΘΕΜΑ 3ο**

Οι εισπράξεις (σε χιλιάδες ευρώ) ενός δείγματος δέκα υποκαταστημάτων μιας εμπορικής επιχείρησης, κατά το μήνα Απρίλιο του 2004, ήταν:

50, 15, 15, 20, 15, 30, 15, 20, 50, 50.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  των εισπράξεων.

**Μονάδες 5**

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Εισπράξεις (σε χιλιάδες ευρώ) $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνό- τητα $f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
15					
20					
30					
50					
<b>Σύνολο</b>					

**Μονάδες 15**

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i , \text{ να υπολογίσετε:}$$

γ<sub>1</sub>) τη διακύμανση των εισπράξεων,

**Μονάδες 3**

γ<sub>2</sub>) την τυπική απόκλιση.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$  , όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε:

α) το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,

**Μονάδες 2**

β) το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης  $f$  ως προς  $x$ , όταν  $x = 1$ ,

**Μονάδες 3**

γ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα,

**Μονάδες 10**

δ) τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ ,

**Μονάδες 5**

ε) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.  
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x)=x$ , είναι  $(x)' = 1$ .

**Μονάδες 10**

Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις, να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη ( $\Sigma$ ), αν αυτή είναι σωστή ή την ένδειξη ( $\Lambda$ ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

**B.** Ισχύει ότι:  $(x^v)' = vx^{v-1}$ , όπου  $v$  φυσικός αριθμός.

**Μονάδες 3**

**Γ.** Η σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ , μιας μεταβλητής  $X$ , είναι  $f_i = \frac{v_i}{v}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $v_i$  η συχνότητα της τιμής  $x_i$  και  $v$  το μέγεθος του δείγματος.

**Μονάδες 3**

**Δ.** Αν  $f_1, f_2, \dots, f_k$  είναι οι σχετικές συχνότητες των τιμών  $x_1, x_2, \dots, x_k$  μιας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $v$ , ισχύει:  $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 100$ .

**Μονάδες 3**

**Ε.** Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.

**Μονάδες 3**

**ΣΤ.** Η παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του  $y=f(x)$  ως προς  $x$ , όταν  $x = x_0$ .

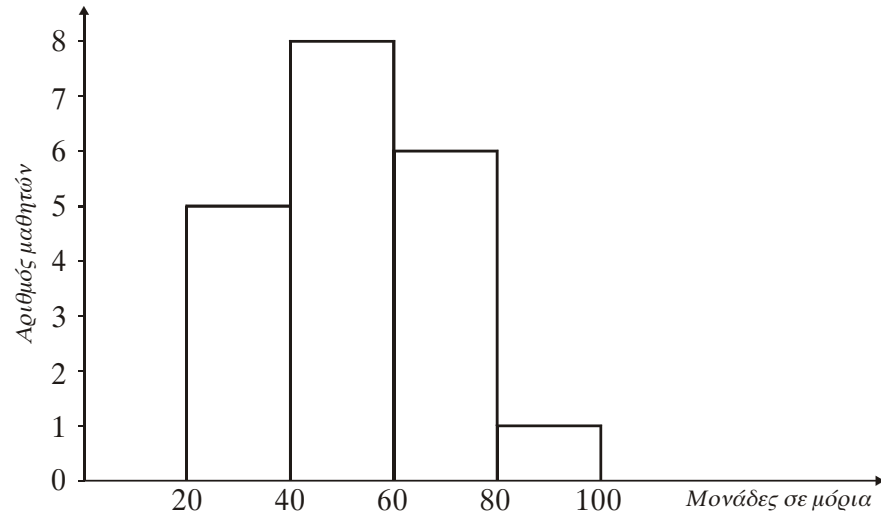
**Μονάδες 3**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ



**ΘΕΜΑ 2ο**

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι βαθμολογίες, στην εκατοντάβαθμη κλίμακα, των μαθητών ενός τμήματος της Δ΄ τάξης, κάποιου Εσπερινού Ενιαίου Λυκείου, στα μαθηματικά γενικής παιδείας.



- α. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος.  
**Μονάδες 7**
- β. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές που έχουν βαθμό από 40 μόρια και πάνω.  
**Μονάδες 7**
- γ. Να κατασκευάσετε τον πίνακα με τις συχνότητες  $v_i$ , τις κεντρικές τιμές  $x_i$  και τα γινόμενα  $x_i v_i$ . Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών των μαθητών του τμήματος.  
**Μονάδες 11**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Τα βάρη μιας ομάδας, πέντε μαθητών, είναι:

62, 77, 65, 72, 69 κιλά

- α. Να αποδείξετε ότι το μέσο βάρος των πέντε μαθητών είναι 69 κιλά.  
**Μονάδες 5**
- β. Να υπολογίσετε τη διάμεσο των τιμών των βαρών.  
**Μονάδες 5**
- γ. Να υπολογίσετε το εύρος των τιμών των βαρών.  
**Μονάδες 5**
- δ. Αν προστεθεί στην ομάδα ένας έκτος μαθητής και το μέσο βάρος των έξι μαθητών γίνει 72 κιλά, να βρείτε το βάρος του έκτου μαθητή που προστέθηκε στην ομάδα.  
**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4(x-2), x \in \mathbb{R}.$$

- α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $f'(x)$ , της  $f(x)$ .  
**Μονάδες 5**
- β. Να αποδείξετε ότι:  $x f''(x) - f'(x) = 4$ .  
**Μονάδες 6**
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 1$ .  
**Μονάδες 7**
- δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τα ακρότατα.  
**Μονάδες 7**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 28 ΜΑΪΟΥ 2005  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

**Μονάδες 10**

**B. α.** Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές;

**Μονάδες 3**

**β.** Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;

**Μονάδες 4**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

**Μονάδες 2**

**β.** Ισχύει  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ ,

όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

**Μονάδες 2**

Συγκέντρωση Θεμάτων: Γιώργος Χρ. Μακρής

**γ.** Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης.

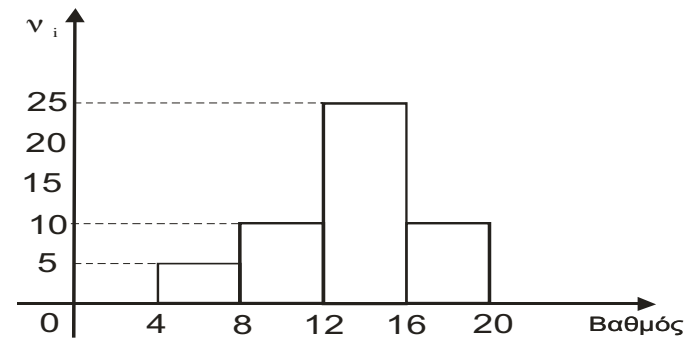
**Μονάδες 2**

**δ.** Αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(A) > P(B)$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων  $\nu_i$ :



**α.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις βαθ/γίας [ )	Κέντρο κλάσης $x_i$	Συχνότητα $\nu_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$	Αθροιστική συχνότητα $N_i$	Αθρ. σχετ. συχνότητα $F_i$
[4, 8)					
[8, 12)					
[12, 16)					
[16, 20)					
Σύνολο					

**Μονάδες 11**

**β.** Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

**Μονάδες 8**

**γ.** Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μέχρι και 10;

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ 3ο

Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , ώστε να ισχύουν:

(i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα  $A, B$  είναι  $\frac{7}{8}$ .

(ii) Οι πιθανότητες  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$  δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο  $X = \left\{ k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}$ , όπου

$$k = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}.$$

α. Να βρεθεί το  $k$ .

Μονάδες 5

β. Να βρεθούν τα  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο  $A$ .

Μονάδες 6

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο  $A$ .

Μονάδες 6

## ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$  στο σημείο  $\Lambda(1, 1)$ .

Μονάδες 7

β. Από τυχαίο σημείο  $M(x, y)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες  $xx'$  και  $yy'$ , οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες  $Ox$ ,  $Oy$  ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου  $M$ , ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

Μονάδες 10

γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (α) έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 5$  και τυπική απόκλιση  $S_x = 2$ .

Να βρεθεί η μέση τιμή  $\bar{y}$  και η τυπική απόκλιση  $S_y$  των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Μονάδες 8

ΟΛΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $F(x)$ ,  $f(x)$  και  $g(x)$  με  $F(x) = f(x) + g(x)$ .

Αν οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι:  $F'(x) = f'(x) + g'(x)$ .

**Μονάδες 9**

**A.2.** Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής  $x$ , αν  $\bar{x} > 0$  και πώς, αν  $\bar{x} < 0$ ;

**Μονάδες 4**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**α.** Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

**Μονάδες 2**

**β.** Αν  $x > 0$ , τότε  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

**Μονάδες 2**

**γ.** Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, εκτός από τις συχνότητες  $f_i$  και  $n_i$ , χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες  $F_i$ ,  $N_i$ .

**Μονάδες 2**

**δ.** Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς μιας μεταβλητής είναι η μέση τιμή και η διάμεσος αυτής.

**Μονάδες 2**

**ε.** Αν για τα ενδεχόμενα  $A$ ,  $B$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει  $P(A) = P(B)$ , τότε είναι πάντοτε  $N(A) = N(B)$ .

**Μονάδες 2**

**στ.** Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a \ln x - \beta x^2$  με  $a, \beta \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**Μονάδες 3**

**β.** Να βρείτε την παράγωγο της  $f$  για κάθε  $x$ , το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 5**

**γ.** Να βρείτε τα  $a$  και  $\beta$ , ώστε η εφαπτομένη στο σημείο  $A(1,1)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  να είναι  $y = 3x - 2$ .

**Μονάδες 10**

**δ.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} (f'(x) \cdot x^3)$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16,22) με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής  $\bar{x} \pm 3s$ ,  $\bar{x} \pm 2s$ ,  $\bar{x} \pm s$ ,  $\bar{x}$ .

α. Να δείξετε ότι  $\bar{x} = 20$  και  $s = 2$ .

**Μονάδες 10**

β. Να βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ , αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα  $(\bar{x} - \alpha \cdot s, \bar{x} + \alpha \cdot s)$  ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων.

**Μονάδες 5**

γ. Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = \frac{R}{2}x^2 - (\bar{x} + 4)x + 9s$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα A, B, Γ του Ω είναι

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A \cap B = \{1, 3, 4\}, \quad A - B = \{2, 6\} \text{ και}$$

$$\Gamma = \left\{ x \in \Omega / \frac{x+1}{x-1} \geq 2 \right\}.$$

α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(\Gamma)$ .

**Μονάδες 9**

β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το B και όχι το Γ.

**Μονάδες 3**

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα B και Γ.

**Μονάδες 3**

δ. Αν  $s^2$  είναι η διακύμανση των τιμών  $\lambda$ ,  $3\lambda$ ,  $5\lambda$ , όπου  $\lambda \in \Omega$ , να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου  $\Delta = \{\lambda \in \Omega / s^2 > 24\}$ .

**Μονάδες 10**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά την **10.30'** πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΔΕΥΤΕΡΑ 23 ΜΑΙΟΥ 2005**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1°**

A) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x) = c$  είναι  $(c)' = 0$ .

**Μονάδες 10**

B) Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

Γ) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή  $R \approx 6s$ .

**Μονάδες 2**

β) Ο συντελεστής μεταβολής ενός δείγματος τιμών μιας οιασδήποτε μεταβλητής  $X$  ορίζεται (για  $s \neq 0$ ) από το λόγο  $CV = \frac{\bar{X}}{s}$ , όπου  $\bar{x}$  η μέση τιμή και  $s$  η τυπική απόκλιση.

**Μονάδες 2**

γ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $(\sin x)' = \eta \mu x$ .

**Μονάδες 2**

δ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση  $x = f(t)$ , θα είναι τη χρονική στιγμή  $t_0$

$$v(t_0) = f'(t_0).$$

**Μονάδες 2**

ε) Σε ένα δείγμα τιμών μιας οιασδήποτε μεταβλητής  $X$  το εύρος  $R$  ορίζεται από τη σχέση:

$R = \text{μεγαλύτερη παρατήρηση} + \text{μικρότερη παρατήρηση.}$

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f(x)$ .

**Μονάδες 5**

β) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ .

**Μονάδες 5**

γ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

**Μονάδες 7**

δ) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $f'(x)$ , της  $f(x)$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Οι ώρες παρακολούθησης τηλεοπτικών προγραμμάτων από 20 άτομα σε διάστημα μιας εβδομάδας αναγράφονται στον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα:

Ώρες παρακολούθησης $x_i$	Συχνότητα $v_i$	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
2			
3	6		
9			
11	2		
<b>Σύνολο</b>	$v = 20$		

Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων του παραπάνω πίνακα δίνεται ότι η γωνία του κυκλικού τομέα, που αντιστοιχεί στην παρατήρηση  $x_1 = 2$  ώρες, είναι  $\alpha_1 = 72^\circ$ .

α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

**Μονάδες 12**

β) Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση  $s$ .

**Μονάδες 5**

γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ώρες πρωινής εργασίας των μαθητών ενός τμήματος Εσπερινού Λυκείου:

Ώρες εργασίας μαθητών $x_i$	Συχνότητα $v_i$
1	$\alpha$
2	5
3	$\beta$
4	2
5	1

Όπου  $\alpha$  και  $\beta$  είναι οι τιμές του τοπικού μεγίστου και του τοπικού ελαχίστου αντίστοιχα της συνάρτησης

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1, x \in \mathbb{R} .$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha = 4 \text{ και } \beta = 3 .$$

**Μονάδες 10**

β) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και τη διάμεσο  $\delta$  των ωρών πρωινής εργασίας των μαθητών.

**Μονάδες 10**

γ) Πόσοι μαθητές εργάστηκαν το πολύ 4 ώρες.

**Μονάδες 5**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 29 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

A. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε να αποδείξετε ότι  $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ , όπου  $c$  σταθερός πραγματικός αριθμός.

**Μονάδες 10**

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη ( $\Sigma$ ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη ( $\Lambda$ ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α)  $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ , όπου  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

**Μονάδες 3**

β)  $(x^v)' = v \cdot x^v$ , όπου  $v$  φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός και  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 3**

γ)  $(\sin x)' = -\eta \mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 3**

δ) Η διάμεσος ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων δεν είναι μέτρο θέσης.

**Μονάδες 3**

ε) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο

διάστημα  $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ , όπου  $\bar{x}$  η μέση τιμή και  $s$  η τυπική απόκλιση.

**Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 5**

β) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $f'(x)$  και να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και -1.

**Μονάδες 10**

γ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $(1, +\infty)$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  με τις αντίστοιχες συχνότητες τους. Το μέγεθος του δείγματος είναι  $n = 80$  και η μέση τιμή είναι  $\bar{x} = 2,6$ .

$x_i$	$v_i$
1	12
2	$\mu$
3	$\lambda$
4	25
Σύνολο	$n = 80$



α) Να αποδείξετε ότι  $\mu = 33$  και  $\lambda = 10$ .

**Μονάδες 10**

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

**Μονάδες 6**

γ) Να υπολογίσετε τη διακύμανση του δείγματος.

**Μονάδες 9**

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης του δείγματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

**ΘΕΜΑ 4ο**

Οι μηνιαίοι μισθοί των υπαλλήλων μιας Αμερικανικής εταιρείας έχουν μέση τιμή  $\bar{x}_A = 1.000$  δολάρια και τυπική απόκλιση  $s_A = 125$  δολάρια. Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας Ευρωπαϊκής εταιρείας έχουν μέση τιμή  $\bar{x}_E = 800$  ευρώ και τυπική απόκλιση  $s_E = 90$  ευρώ.

α) Να βρείτε ποια από τις δύο εταιρείες έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια μισθών.

**Μονάδες 8**

β) Η Αμερικανική εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει το μηνιαίο μισθό κάθε υπαλλήλου κατά 250 δολάρια.

Επίσης η Ευρωπαϊκή εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει το μηνιαίο μισθό κάθε υπαλλήλου κατά 20%.

Να βρείτε τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση των μηνιαίων μισθών και για τις δύο εταιρείες.

**Μονάδες 10**

γ) Ποια από τις δύο εταιρείες έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια των μηνιαίων μισθών μετά τις αυξήσεις;

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα **δεν θα τα αντιγράψετε** στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
 ΠΕΜΠΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2006  
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
 ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $c$  πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), x \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 10**

**B.α.** Πότε δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα;

**Μονάδες 3**

**β.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής;

**Μονάδες 4**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0 \in A$ , όταν  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x$  σε μια περιοχή του  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Αν το ενδεχόμενο  $A'$ , συμπληρωματικό του ενδεχομένου  $A$ , πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το  $A$ .

**Μονάδες 2**

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

**γ.** Για κάθε  $x \neq 0$  ισχύει:  $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ .

**Μονάδες 2**

**δ.** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός Βιβλίων $x_i$	Αριθμός Μαθητών $v_i$
0	$\alpha + 4$
1	$5\alpha + 8$
2	$4\alpha$
3	$\alpha - 1$
4	$2\alpha$
Σύνολο	50

**α.** Να υπολογίσετε την τιμή του  $\alpha$ .

**Μονάδες 3**

Στη συνέχεια να βρείτε:

**β.** Τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

**Μονάδες 7**

**γ.** Τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

**Μονάδες 7**

**δ.** Την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστο 3 βιβλία.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν  $x$  αγόρια και  $(x+4)^2$  κορίτσια.

α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του  $x$  την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.

**Μονάδες 7**

β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με  $\frac{1}{19}$  και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.

**Μονάδες 8**

γ. Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής;

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10$ ,  $x \geq 0$ .

α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο  $A(1, f(1))$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ , να αποδείξετε ότι  $k=2$  και να βρείτε την εξίσωσή της.

**Μονάδες 5**

β. Μία τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\bar{x}=f(1)$  και τυπική απόκλιση

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

$s = -\frac{2f'(4)}{13}$ . Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού

δείγματος μεγέθους  $n$ , είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

(i) Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα  $(10, 16)$ .

**Μονάδες 10**

(ii) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.

Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου  $a > 0$ , που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 10**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
 ΔΕΥΤΕΡΑ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006  
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A).$$

**Μονάδες 9**

- B.1** Πότε μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ ;

**Μονάδες 3**

- B.2** Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;

**Μονάδες 3**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

- α.** Το ενδεχόμενο  $A \cup B$  πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$ .

**Μονάδες 2**

- β.** Ισχύει:  $(\sin x)' = \eta \mu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

- γ.** Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων.

**Μονάδες 2**

- δ.** Η διάμεσος  $\delta$  είναι μέτρο διασποράς.

**Μονάδες 2**

- ε.** Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Τότε ισχύει:  $P(\emptyset) \leq P(A \cup B) \leq P(\Omega)$ .

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x(ax^2 + \beta x + 9)$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(2, e^2)$  είναι  $y = -e^2x + 3e^2$ , τότε:

- α.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = -6$ .

**Μονάδες 12**

- β.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 13****ΘΕΜΑ 3ο**

Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της. Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

- α.** Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι ασυμβίβαστα.

**Μονάδες 15**

β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- i. «έχει πάρει καταναλωτικό».
- ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό».

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ 4ο**

Οι απουσίες των μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Ενιαίου Λυκείου κατά τους μήνες Ιανουάριο - Φεβρουάριο - Μάρτιο - Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Απουσίες μαθητών	Κέντρο κλάσης $x_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$
[ ... - ... )	...	0,1
[ ... - 7 )	...	...
[ ... - ... )	...	0,3
[ ... - ... )	10	...
Σύνολο	////////////////////	1

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της 4<sup>ης</sup> κλάσης  $f_4$  είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 2<sup>ης</sup> κλάσης  $f_2$ , τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το πλάτος  $c$  των κλάσεων ισούται με 2.

Μονάδες 10

β. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα σχετικών συχνοτήτων στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

Μονάδες 5

γ. i. Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ .

Μονάδες 4

ii. Να βρείτε την τυπική απόκλιση  $s$ .

Μονάδες 6

Δίνεται ο τύπος: 
$$s^2 = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{(\sum_{i=1}^k x_i v_i)^2}{v} \right].$$

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2006**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

A) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x) = x$ , είναι  $f'(x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

*Μονάδες 10*

B) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη ( $\Sigma$ ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη ( $\Lambda$ ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Έστω  $f, g$  πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , που είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Τότε ισχύει:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

*Μονάδες 3*

β) Η παράγωγος κάθε σταθερής συνάρτησης είναι μηδέν σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

*Μονάδες 3*

γ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu \nu x$ .

*Μονάδες 3*

δ) Η διάμεσος επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.

*Μονάδες 3*

ε) Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_k$  οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$ , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$ ,  $k \leq n$ . Για τις αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες ισχύει:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = n.$$

*Μονάδες 3***ΘΕΜΑ 2ο**

Για τη μελέτη του αριθμού των τροχαίων ατυχημάτων, που γίνονται σε μια κεντρική διασταύρωση κάποιας επαρχιακής πόλης, πήραμε δείγμα πέντε παρατηρήσεων που αφορούν στον αριθμό των ατυχημάτων σε κάθε έναν από τους πέντε τελευταίους μήνες. Οι παρατηρήσεις είναι αντίστοιχα:

1, 2, 3, 3, 1.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά του δείγματος.

*Μονάδες 10*

β) Να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.

*Μονάδες 5*

γ) Ποια είναι η (απόλυτη) συχνότητα και ποια η σχετική συχνότητα της τιμής 3;

*Μονάδες 5*

δ) Ποιο είναι το εύρος του δείγματος;

*Μονάδες 5***ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω  $a \in \mathbb{R}$ . Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^2 - ax - 8$  με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ .

I. Να βρεθεί το  $a \in \mathbb{R}$  αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο  $A(1, -2)$ .

*Μονάδες 5*

II. Αν  $\alpha = -4$ ,

α) να βρεθεί η παράγωγος  $f'(x)$ .

*Μονάδες 5*

β) να βρεθεί το  $x_0 \in \mathbb{R}$  στο οποίο η συνάρτηση  $f(x)$  παρουσιάζει ακρότατο. Να βρεθεί αν το ακρότατο είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

*Μονάδες 10*

γ) να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)$  στο σημείο  $A(1,-2)$ .

*Μονάδες 5*

**ΘΕΜΑ 4ο**

Ο χρόνος αναμονής των πολιτών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό.

I. Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο

α) από 4 έως 6 λεπτά.

β) από 3 έως 6 λεπτά.

*Μονάδες 10*

II. Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών.

*Μονάδες 10*

III. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.

*Μονάδες 5*

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
 ΤΡΙΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2007  
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
 ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

A. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει  $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ .

*Μονάδες 8*

B.a. Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

*Μονάδες 4*

β. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων, όταν ο  $n$  είναι άρτιος αριθμός.

*Μονάδες 3*

Γ1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες  $F_i$  εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής  $x_i$ .

*Μονάδες 2*

β. Αν  $f, g$  είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

**Μονάδες 2**

γ. Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f'(x_0)=0$  για  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  για  $x=x_0$  ελάχιστο.

**Μονάδες 2**

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f_1(x) = x^v, \quad \text{όπου } v \text{ φυσικός}$$

$$f_2(x) = \ln x, \quad \text{όπου } x > 0$$

$$f_3(x) = \sqrt{x}, \quad \text{όπου } x > 0$$

$$f_4(x) = \sin x, \quad \text{όπου } x \text{ πραγματικός.}$$

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = xe^x + 3$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = f(x) + e^x - 3$

**Μονάδες 10**

β. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$ .

**Μονάδες 15**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  για τον οποίο ισχύει  $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5)$ . Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του  $\Omega$ :

$$A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}, \quad B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\}$$

όπου  $x$  ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του  $\Omega$ , δηλαδή οι  $P(-1), P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5)$ .

**Μονάδες 7**

β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του  $x$  για την οποία ισχύει  $A \cap B = \{-1, 3\}$ .

**Μονάδες 8**

γ. Για  $x = -1$  να δειχθεί ότι:

$$P(A) = \frac{5}{11}, \quad P(B) = \frac{7}{11}, \quad P(A \cap B) = \frac{3}{11}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες  $P(A - B)$  και  $P(A \cup B')$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Θεωρούμε δύο δείγματα  $A$  και  $B$  με παρατηρήσεις:

$$\text{Δείγμα } A: 12, 18, t_3, t_4, \dots, t_{25}$$

$$\text{Δείγμα } B: 16, 14, t_3, t_4, \dots, t_{25}.$$

Δίνεται ότι  $t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 345$ .

α. Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές  $\bar{x}_A$  και  $\bar{x}_B$  των δύο δειγμάτων  $A$  και  $B$  αντίστοιχα είναι  $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$ .

**Μονάδες 7**



- β. Αν  $s_A^2$  είναι η διακύμανση του δείγματος A και  $s_B^2$  είναι η διακύμανση του δείγματος B, να αποδείξετε ότι  $s_A^2 - s_B^2 = \frac{16}{25}$ .

Μονάδες 8

- γ. Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος A είναι ίσος με  $CV_A = \frac{1}{15}$ , να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής  $CV_B$  του δείγματος B.

Μονάδες 10

**ΟΔΗΓΙΕΣ**

(για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 29 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x)=x$  είναι  $f'(x)=1$ .

Μονάδες 8

- B. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ .

Μονάδες 4

- β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

i)  $P(\Omega)$     ii)  $P(\emptyset)$ .

Μονάδες 3

- Γ1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.

- α. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  και ότι  $f_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$ , είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών  $x_i$  μιας μεταβλητής. Αν  $a_i$  είναι το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε:

$$a_i = 360 \cdot f_i, \text{ για } i=1,2,\dots,k.$$

Μονάδες 2

β. Αν  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με  $g(x) \neq 0$ , τότε ισχύει 
$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

**Μονάδες 2**

γ. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

**Γ2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x) = e^x$  όπου  $x$  πραγματικός.

$f_2(x) = \frac{1}{x}$  όπου  $x \neq 0$ .

$f_3(x) = \eta\mu x$  όπου  $x$  πραγματικός.

$f_4(x) = c$  όπου  $x$  πραγματικός και  $c$  σταθερά.

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$ .

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x)$ .

**Μονάδες 5**

β. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

**Μονάδες 8**

γ. Να εξετασθεί η συνάρτηση  $f(x)$  ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της.

**Μονάδες 12**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Θεωρούμε τα ενδεχόμενα  $A, B$  του  $\Omega$  τα οποία ορίζονται ως εξής:

$A = \{x \in \Omega / 0 \leq \ln(x-1) < \ln 3\}$ ,

$B = \{x \in \Omega / (x^2 - 5x) \cdot (x-1) = -6 \cdot (x-1)\}$ .

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες  $P(A-B)$  και  $P(B \cup A')$ .

**Μονάδες 8**

β. Αν  $P(A) = \frac{1}{4}$ , να υπολογιστεί η πιθανότητα  $P(A' \cup B')$ .

**Μονάδες 7**

γ. Αν  $P(A) = \frac{1}{4}$  και  $P(B-A) = \frac{1}{8}$ , να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας  $P(X)$ , όπου  $X$  είναι ενδεχόμενο του  $\Omega$  τέτοιο ώστε  $A \cup X = B$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$  ένα δείγμα με παρατηρήσεις:

7, 5,  $\alpha$ , 2, 5,  $\beta$ , 8, 6,  $\gamma$ , 5, 3,

όπου  $\alpha, \beta, \gamma$  φυσικοί αριθμοί με  $\alpha < \beta < \gamma$ . Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι  $\bar{x} = 6$ ,  $\delta = 6$  και  $R = 8$  αντίστοιχα.

α. Να βρεθούν οι τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma$ , έτσι ώστε να ισχύει  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$ .

**Μονάδες 8**

β. Για τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma$ , που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, να δειχθεί ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι ίση με  $s_x = \sqrt{\frac{58}{11}}$  και να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 8**

- γ. Έστω  $y_1, y_2, \dots, y_{11}$  οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$  επί μια θετική σταθερά  $c_1$  και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά  $c_2$ . Αν  $\bar{y}=9$  και  $s_y=2s_x$ , να βρεθούν οι τιμές των σταθερών  $c_1$  και  $c_2$ .

Μονάδες 9

**ΟΔΗΓΙΕΣ** (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:00' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΔΕΥΤΕΡΑ 21 ΜΑΪΟΥ 2007**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A) Έστω  $f, g$  δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι  $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 10

- B) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη ( $\Sigma$ ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη ( $\Lambda$ ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

- a) Το εύρος  $R$  ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων δεν επηρεάζεται από τις δύο ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 3

- β) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 3

- γ) Σε ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1.

Μονάδες 3

δ) Έστω  $f, g$  δύο οποιεσδήποτε παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$ , τότε ισχύει:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 3**

ε) Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_1 \in A$ , όταν  $f(x) > f(x_1)$  για κάθε  $x$  σε μια περιοχή του  $x_1$ .

**Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^2 + 1$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε:

α) Το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης  $f$  ως προς  $x$ , όταν  $x = 2$ .

**Μονάδες 10**

β) Τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 10**

γ) Το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = 3$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Στον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες των τιμών σε Ευρώ ενός συγκεκριμένου προϊόντος σε 50 καταστήματα μιας πόλης:

Τιμή προϊόντος (σε Ευρώ) [ - )	Σχετική Συχνότητα $f_i$
8 - 10	0,2
10 - 12	$f_2$
12 - 14	0,3
14 - 16	$f_4$

α) Αν η μέση τιμή των τιμών του προϊόντος στα καταστήματα αυτά είναι  $\bar{x} = 11,60$  Ευρώ, να βρείτε τις σχετικές συχνότητες  $f_2$  και  $f_4$ .

**Μονάδες 10**

β) Αν  $f_2 = 0,4$  και  $f_4 = 0,1$  τότε,

i) να βρείτε σε πόσα καταστήματα η τιμή του προϊόντος είναι μεγαλύτερη ή ίση των 10 Ευρώ.

**Μονάδες 8**

ii) να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Σε ένα δείγμα  $n$  παρατηρήσεων  $x_1, x_2, \dots, x_n$  μιας μεταβλητής  $X$  είναι  $\bar{x} = 8$  και  $s_x^2 = 4$ .

α) Αν  $y_1, y_2, \dots, y_n$  είναι το δείγμα των παρατηρήσεων που προκύπτουν αντιστοίχως από τις  $x_1, x_2, \dots, x_n$  όταν κάθε μία αυξηθεί κατά 10% τότε:

i) Να εξετάσετε αν το δείγμα  $y_1, y_2, \dots, y_n$  είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 5**

ii) Να συγκριθούν μεταξύ τους τα δύο δείγματα ως προς την ομοιογένεια.

**Μονάδες 5**

β) Αν  $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$  για κάθε  $i=1,2,\dots,n$

i) να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{z}$  και την τυπική απόκλιση  $s_z$  των  $z_1, \dots, z_n$ .

**Μονάδες 10**

ii) να εξετάσετε αν ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής (CV) των  $z_1, \dots, z_n$ .

**Μονάδες 5**

### ΟΛΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 29 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

### **ΘΕΜΑ 1ο**

A. Αν  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$ ,  $k \leq n$  και  $f_1, f_2, \dots, f_k$  οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών της μεταβλητής, να αποδείξετε ότι:  $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$ .

**Μονάδες 8**

B. Να δώσετε τον ορισμό της μέσης τιμής ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων μιας μεταβλητής  $X$ .

**Μονάδες 5**

Γ. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη ( $\Sigma$ ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη ( $\Lambda$ ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Για  $x > 0$  ισχύει  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**Μονάδες 3**

β) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών, όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

**Μονάδες 3**

γ) Οι τιμές μιας ποιοτικής μεταβλητής είναι αριθμοί.

**Μονάδες 3**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

δ) Η διακύμανση των τιμών μιας μεταβλητής  $X$  είναι μέτρο θέσης.

**Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και την παράγωγό της.

**Μονάδες 10**

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 10**

γ) Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf'(x)}{f(x)}$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Οι βαθμοί των μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών μιας τάξης ενός Λυκείου ακολουθούν κανονική κατανομή. Το 50% των μαθητών έγραψε τουλάχιστο 13, ενώ το 34% από 13 έως 14:

α) Να βρείτε τη διάμεσο  $\delta$ , τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $s$  των βαθμών των μαθητών.

**Μονάδες 12**

β) Αν 95 μαθητές της τάξης έγραψαν από 11 έως 13:

i. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών της τάξης.

**Μονάδες 7**

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έγραψαν από 14 έως 15 στο διαγώνισμα αυτό.

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = x^3 - sx^2 + 2x + \bar{x}$ , όπου  $\bar{x}$  η μέση τιμή και  $s$  η τυπική απόκλιση ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων μιας μεταβλητής  $X$ . Αν στο σημείο  $M(1, 5)$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με τον άξονα  $x'x$ :

α) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $s$  του δείγματος.

**Μονάδες 15**

β) Αν  $\bar{x} = 4$  και  $s = 2$ , τότε:

i. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 4**

ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0 = 1$ .

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.**

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

**Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.**

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x)=c$  (όπου  $x$  πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή  $(c)'=0$ .

**Μονάδες 8**

**B.** Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής  $X$ , αν  $\bar{x} > 0$  και πώς, αν  $\bar{x} < 0$ ;

**Μονάδες 7**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ο τύπος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι ισοπίθανα.

**Μονάδες 2**

**β.** Η διάμεσος  $\delta$  ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων  $t_1, t_2, \dots, t_n$  είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

**Μονάδες 2**

γ. Αν  $x > 0$ , τότε  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**Μονάδες 2**

δ. Αν  $x_0$  είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta_{\mu x} = \eta_{\mu x_0}.$$

**Μονάδες 2**

ε. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$ .

**Μονάδες 7**

β. Να αποδείξετε ότι  $e^x f'(x) = 2 - x$ .

**Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x)$ .

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ 3ο

Για δύο τύπους μπαταριών A και B επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου A και μιας μπαταρίας τύπου B.

**Μονάδες 5**

β. Αν μια μπαταρία τύπου A στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου B στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

**Μονάδες 5**

γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις  $S_A$  και  $S_B$  της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

**Μονάδες 7**

δ. Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών A και B παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

Δίνεται ότι  $\sqrt{11} \approx 3,3$ .

**Μονάδες 8**



**ΘΕΜΑ 4ο**

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

- α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

**Μονάδες 7**

- β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}.$$

**Μονάδες 9**

- γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$$

όπου x πραγματικός αριθμός και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα.

**Μονάδες 9****ΟΔΗΓΙΕΣ**

(για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 1 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

**Μονάδες 9**

- B. α. Να δώσετε τον ορισμό της διακύμανσης των παρατηρήσεων  $t_1, t_2, \dots, t_n$  μιας μεταβλητής X.

**Μονάδες 3**

- β. Πότε δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα;

**Μονάδες 3**

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος δεν ξεπερνά το 10%.

**Μονάδες 2**

- β. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.

**Μονάδες 2**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

γ. Αν η συνάρτηση  $f$  έχει στο  $x_0$  όριο έναν πραγματικό αριθμό  $l_1$ , δηλαδή αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = l_1^v \quad (v \text{ θετικός ακέραιος}).$$

**Μονάδες 2**

δ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) < 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Η μέση βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα τεστ είναι 70. Χωρίζουμε τη βαθμολογία σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [ - )	Κεντρικές τιμές $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$
20 - 40			
40 - 60			
60 - 80			
80 - 100			
Σύνολα			

Δίνεται επιπλέον ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 20 έως 40 είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 40 έως 60, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα των δεδομένων, η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση από 80 έως 100 είναι  $108^\circ$ .

α. Να δείξετε ότι  $f_1 = f_2 = \frac{1}{10}$ ,  $f_3 = \frac{5}{10}$ ,  $f_4 = \frac{3}{10}$ .

**Μονάδες 10**

β. Αν ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι 50, τότε:

i. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα συχνοτήτων και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

**Μονάδες 5**

ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60.

**Μονάδες 5**

iii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70.

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω  $A$  και  $B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  και  $p$  ένας πραγματικός αριθμός με  $0 < p < 1$ . Δίνεται ότι οι πιθανότητες  $P(A)$ ,  $P(A \cup B)$  και  $P(A \cap B)$  είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου

$$\{p - 1, p, p + 1, p^2, p^3\}.$$

α. Να δείξετε ότι  $P(A) = p^2$ ,  $P(A \cup B) = p$  και  $P(A \cap B) = p^3$ .

**Μονάδες 9**

β. Να αποδείξετε ότι  $P(B) = p^3 - p^2 + p$ .

**Μονάδες 8**

γ. Να αποδείξετε ότι  $P(B - A) > P(A - B)$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1). Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.

Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι  $x$ .



Σχήμα 1

- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2.$$

**Μονάδες 6**

- β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m.

**Μονάδες 7**

- γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών  $f'(100)$ ,  $f'(101)$ ,  $f'(102)$ ,  $f'(103)$  και  $f'(104)$ .

**Μονάδες 5**

- δ. Έστω  $CV$  ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών  $f'(100)$ ,  $f'(101)$ ,  $f'(102)$ ,  $f'(103)$  και  $f'(104)$  και  $CV'$  ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά  $c$ , όπου  $c \neq 2$ . Να υπολογίσετε το  $c$ , έτσι ώστε να ισχύει  $CV' = 2CV$ .

**Μονάδες 7**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 21 ΜΑΪΟΥ 2008**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη, τότε να αποδείξετε ότι:  
 $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ , όπου  $c$  σταθερός πραγματικός αριθμός.

**Μονάδες 8**

- B) Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

- Γ) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη ( $\Sigma$ ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη ( $\Lambda$ ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

- α) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $(\sin x)' = \eta\mu x$ .

**Μονάδες 3**

- β) Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς μεταβλητές.

**Μονάδες 3**

- γ) Διάμεσος ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το  $n$  είναι άρτιος αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το  $n$  είναι περιττός αριθμός.

**Μονάδες 3**

δ) Το εύρος R ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

**Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + kx + 2$ , με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και  $k \in \mathbb{R}$ .

A) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο  $M(3,8)$ , να βρείτε τον k.

**Μονάδες 5**

B) Για  $k = -1$

α) Να αποδείξετε ότι:  $f'(x) + f''(x) + 2 = (x+1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 10**

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Στο παρακάτω δείγμα των 10 παρατηρήσεων:

1, 2, 4, 2, 6, 1, 3, 6, α, 6

όπου α πραγματικός αριθμός,

η μέση τιμή είναι  $\bar{x} = 4$ .

A) Να βρείτε την τιμή του α.

**Μονάδες 5**

B) Για  $\alpha = 9$

α) Να βρείτε τη διάμεσο.

**Μονάδες 7**

β) Να βρείτε τη διακύμανση.

**Μονάδες 8**

γ) Αν όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 2008, τότε ποια θα είναι η μέση τιμή των νέων παρατηρήσεων;

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται η βαθμολογία των 150 μαθητών ενός Λυκείου σε τέσσερις κατηγορίες: «Άριστα», «Λίαν καλώς», «Καλώς» και «Σχεδόν καλώς». Το 20% των μαθητών έχουν επίδοση «Λίαν καλώς». Η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση «Άριστα» είναι  $36^\circ$ . Οι μαθητές με βαθμό «Καλώς» είναι τετραπλάσιοι των μαθητών με «Άριστα».

α) Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

i	Χαρακτηρισμός βαθμολογίας	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Σχετική συχνότητα %	Γωνία κυκλ. τομέα σε μοίρες
	$x_i$	$n_i$	$f_i$	$f_i\%$	$\alpha_i$
1	Άριστα				
2	Λίαν καλώς				
3	Καλώς				
4	Σχεδόν καλώς				
	Σύνολο				

**Μονάδες 16**

β) Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων ( $f_i\%$ ).

**Μονάδες 9**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α) Δίνεται η συνάρτηση  $F(x)=f(x)+g(x)$ . Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι:  
 $F'(x)=f'(x)+g'(x)$ .

Μονάδες 8

β) Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$cf(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$  με  $g(x) \neq 0$ ,

όπου  $c$  πραγματική σταθερά.

Μονάδες 4,5

Β. α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β πρώτη παράγωγος
α. $x^2+3$	1. $1-\eta\mu x$
β. $x+\sigma\upsilon\nu x$	2. $3x^2-8x$

Συγκέντρωση Θεμάτων : Γιώργος Χρ. Μακρής

γ. $x\eta\mu x$	3. $2x+3$
δ. $x^3-4x^2$	4. $\eta\mu x-\chi\sigma\upsilon\nu x$
	5. $2x$
	6. $3x^2-4x$
	7. $\eta\mu x+\chi\sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 8

β) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{είναι:}$$

A:  $e^x$ , B:  $\frac{e^x - xe^x}{x^2}$ , Γ:  $\frac{e^x x + e^x}{x^2}$ ,

Δ:  $\frac{e^x x - e^x}{x^2}$ , E:  $\frac{xe^x - e^x}{x}$

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής  $X$  σωστά συμπληρωμένο.

Τιμές Μεταβλητής	Συχνό- τητα	Σχετικ ή Συχνό- τητα	Σχετική Συχνό- τητα	Αθροιστική Συχνότητα			
$x_i$	$v_i$	$f_i$	$f_i\%$	$N_i$	$x_i v_i$	$x_i^2$	$x_i^2 v_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
ΣΥΝΟΛΟ	$v=50$	1	100				

Μονάδες 16

B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 4

Γ. Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι  $s^2=0,49$ .

$$\text{Δίνεται ότι: } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\}$$

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 3ο**

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

A. να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;

Μονάδες 8

B. να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς;

Μονάδες 8

Γ. να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;

Μονάδες 9

**ΘΕΜΑ 4ο**

Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας [ - )	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0- 5	10
5-10	15
10-15	12
15-20	15
20-25	18
25-30	18
30-35	12

A. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

Μονάδες 5

B. Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

α) πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

- β) πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**