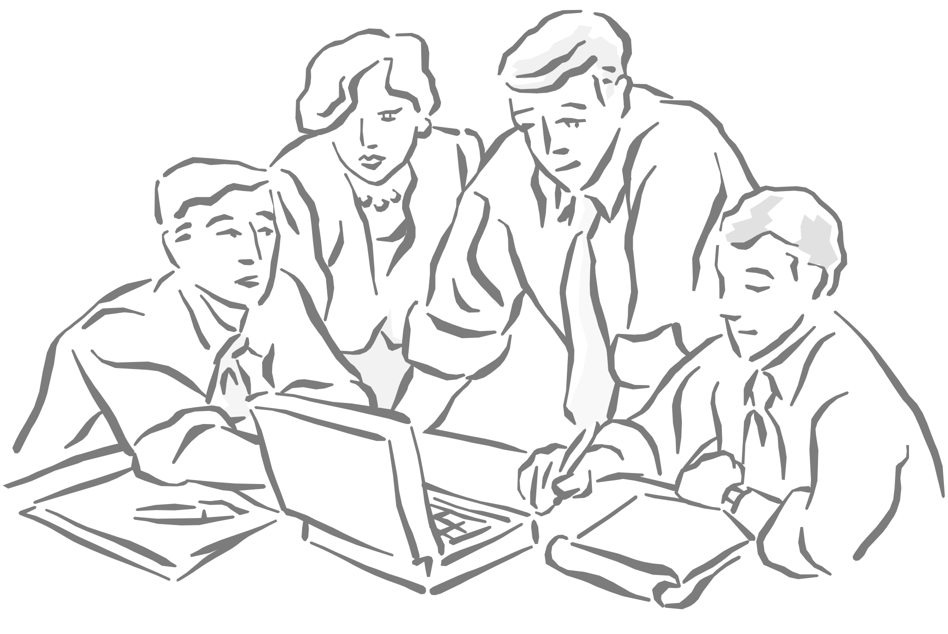
2002-2003



:

1.

1. , x+y=5, 2x-2y=2

( ) .

.

2. :

$$\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -x+y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x+y \\ y' = x+2y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x+2y \\ y' = 2x+4y, \end{cases}$$

(

xy, : →

(x, y) ′ (x′, y′)

$$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy, \end{cases}$$)

3. : : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(0,0) (3,4).

4. : : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

′ ′ ′ ′

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. 3 x 3 (= 0)

) : $a_{ij} = 0$ $i \neq j$.

) : $a_{ij} = a_{ji}$, i j.

) : $a_{ij} = 0$, $i > j$.

) : $a_{ij} = -a_{ji}$, i j.

:

6. :

$$x+\ \ y+\ \ w = 2$$
$$x+3y+3w = 0$$
$$x+3y+5w = 2$$

, .

7. , Modem,

, $_1$ $_2$.

( ).

. Modem . Modem

$$_1= \begin{pmatrix} 30 & 28 & 40 \\ 25 & 32 & 36 \end{pmatrix} \quad , \quad _2= \begin{pmatrix} 38 & 40 & 42 \\ 23 & 28 & 38 \end{pmatrix}$$

½ ($_1$+ $_2$) .

8. , :

) $= \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$, $= \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$) $= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

) $= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

9. :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 - 3 \quad = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. $= \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

:

11. ,

, 1, 2, 3 4,

.

.

1 2 3 4

$$= \begin{pmatrix} 200 & 180 & 140 & 160 \\ & & & \\ 80 & 40 & 120 & 120 \end{pmatrix}$$

) , 10%.

) 5

2 3

(1 = 30).

12. :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ . & 2 & 0 \\ 0 & . & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & 0 \\ 0 & . & . \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

13.

1 2.

.

$$= \begin{pmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,2 \\ 1 & 0,9 & 0,3 \\ 1,5 & 1,2 & 0,4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \quad = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

)

)

1 2.

:

14. $=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

« .

15. $=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, :.

i) $A^2 = I,\ B^2 = -I$ $\quad ^2 + \quad ^2 = 0$

ii) $+ \quad =$

iii) $(\ + \ )^2 \neq \quad ^2 + \quad ^2 + 2$

16. :

$(\ + \ )^2 = \ + \ ,\quad ^2 = \qquad ^2 =$

$=$ ( ).

17. $=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad ^2 + \quad = 3 \ - \ .$

18. $=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad ^2 - 5 \quad + 10 \quad = 0.$

19. $=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 2x - 11$ f( ).

:

20. $f(x) = x^2-4x+4$.

$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ f(x).

21. $= \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$:

$X^2 -5X+6 =$

22. : $2 \quad - 3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

23. : $3 \quad - 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

24. : $-3 \quad +2 \quad = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$2 \quad + \quad = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, X, .

25. x,y $(\ ) = \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix}$

i) $(\ _1) \quad (\ _2) = \quad (\ _1+\ _2)$

$\cos(\ _1+\ _2)$ $\sin(\ _1+\ _2)$.

ii) $(\ )$ $(-\ )$;

:

26. : f: $\Re \rightarrow$ $_3$ $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

:.

i) $f(x) . f(y) = f(x+y)$ ($x,y \in \Re$)

ii) $f(a) . f(-a) = f(0)=$

iii) $f(x) . f(y) = f(y) . f(x)$

iv) $f(3x) - 3f(2x) + 3f(x) = I$

27. : $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $f(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$

:.

iii) $A^2 = I$

iv) $f(x) = \cos x . \quad + \sin x . A$

v) $f(a) . f(b) = f(a+b)$

28. : f: $\Re \rightarrow$ $_2$ $f(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix}$

g: $\Re \rightarrow$ $_2$ $g(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, :.

i) $f(a) . f(b) = g(a-b)$ ($a,b \in \Re$)

ii) $[f(a)]^2 =$

iii) $[g(a)]^2 = g(2a)$

29. $= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, , ( ).

:

30. $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, , ( ).

31. $= \begin{pmatrix} 0 & \sin a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, , ( ).

32. $= \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$, , (>1).

33. $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, , ( ).

34. $= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, , ( ).

35. $= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, , ( ).

36. $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, , ( ).

37. $= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, , ( ).

:

38. $= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$, , ( ).

39. $= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, , ( ).

40. $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, , ( ).

41. $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin x \\ -1 & 0 & \cos x \\ -\sin x & \cos x & 0 \end{pmatrix}$, (≥ 3)

42. f(x) 26, [f(x)] , ( ).

43. f(x) 27, [f(x)] , ( ).

44. LU, :

$$\begin{aligned} x+y+w &= 2 \\ x+3y+3w &= 0 \\ x+3y+5w &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y+w &= 0 \\ x+y &= 0 \\ x+y+w &= 1 \end{aligned}$$

;

45. $= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

:

.

46. $= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $=$ $^{-1}$

47. $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, , , .

48. $= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, , , .

49. $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, , , .

50. $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, , , .

51. $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, , , .

52. $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, , , .

53.

1) +

2) +

3) + .

:

$^{-1}(+)^{-1} = {}^{-1} + {}^{-1}$

$^{-1} + {}^{-1}$ – .

54.) = LDU L U,

; (

) .

) y = b;

55. $= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

) , , .

) $^1/_8$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

) $^1/_8$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

56. $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

) $^2 - 6 \ + 11 \ =$.

) ( )

$^{-1}$.

57. 18,

$^{-1}$.

58. 20,

$^{-1}$.

59. 50, :

) $^3 - 3 \ ^2 - \ + 3 \ =$

:

) $^{-1}$.

60. f(x) 26:

) .

) $[f(x)]^{-1}$.

) $^{-1}$ $= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

61. f(x) 27:

) a b f(b) f(a).

) $[f(x)]^{-1}$.

) $^{-1}$ $= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & ½ \\ -½ & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

62. 3 x 3 ^{2}+2 = .

63. x + ^{2}- + ,
^{3}= .

64. = , o - .

65.) , ;

) , $^{-1}$;

) $= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

66. x + + ^{2}+ ^{3}+ ^{4} = , :

:

) $^{-1}=\ ^{4}$.

) $^{5}=$.

) $^{2000}+\ ^{2001}+\ ^{2002}+\ ^{2003}+\ ^{2004}=$

67. : f: (0,+∞)→ $_2$ $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & \ln x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

x,y ∈ (0,+∞) :

i) f(x) . f(y) = f(xy)

ii) f(x) + f(y) = f(x) . f(y)+ $_2$

iii) $[f(x)]^{-1} = f(1/x)$

iv) $f(x^2) . f(y^2) = 2f(xy)$

68. : $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

i) : $^{3}=$

ii) , □ 3

iii)

iv) - $(\ -\ )^{-1}$.

v) : = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -5 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

:

2.

69. $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

detA detB.

70. , detA

. $= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

71. , detA

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -5 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

72. ,

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

detA

73.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = +1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

:

74.)

$$\begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

) , 1 .

75. : $_4 =$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

.

$_2$ $_3$,

. $\det A_n$.

76.

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & _1 \\ 0 & & _2 & 0 \\ . & & & . \\ . & & & . \\ & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{(\ -1)/2}\ _1\ _2 \dots$$

77.

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

78. :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

:

79. D_n 1,1,-1 (n n)

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ & 1 & 1 & -1 & & \\ . & . & . & . & . & . \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$D_n =$ $D_{n-1}+D_{n-2}$.

Fibonacci 1,2,3,5,8,13,… .

80. $= \;^{-1}$, $\det A = \det B$; $\det A^{-1} = 1$.

81. $\det(A+\ ) = \det A + \det B$.

;

82.

$$= \begin{pmatrix} _1 & _1 & 0 & . & 0 & 0 \\ _1 & _2 & _2 & . & 0 & 0 \\ 0 & _2 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & _{-1} \\ 0 & 0 & 0 & . & _{-1} & \end{pmatrix}$$

$$\det \;=\; (\det \;_{-1}) - \;_{-1}\;_{-1} (\det \;_{-2}).$$