

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')  
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 6**

**A2.** Πότε η ευθεία  $x=x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών  $\alpha+\beta i$  και  $\gamma+\delta i$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β) Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ ,

$$\text{όπου } A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

δ)  $(\sin x)' = \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$

ε) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η εξίσωση  $z + \frac{2}{z} = 2$  όπου  $z \in \mathbb{C}$  με  $z \neq 0$

**B1.** Να βρείτε τις ρίζες  $z_1$  και  $z_2$  της εξίσωσης.

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο.

**Μονάδες 7**

**B4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  του ερωτήματος **B3**, να αποδείξετε ότι  $3 \leq |w| \leq 7$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[ \frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της  $f$  στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα  $\psi\psi$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 xf(x)dx$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x$$

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι σταθερή.

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

### **ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**