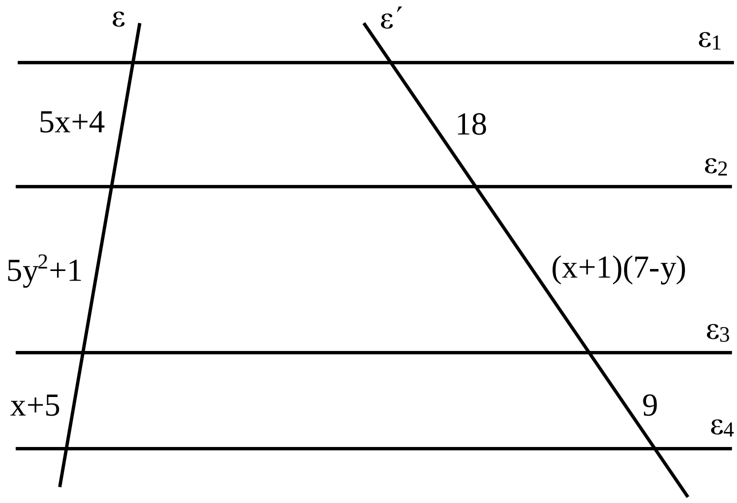
Άσκηση 1

Αν $\varepsilon_1//\varepsilon_2//\varepsilon_3//\varepsilon_4$, να υπολογίσετε τους αριθμούς x και y του διπλανού σχήματος. (Δίνεται $7^2+4\cdot15\cdot46=2809=53^2$)

(**Μονάδες 10**)



ΛΥΣΗ

Αφού $\varepsilon_1//\varepsilon_2//\varepsilon_3//\varepsilon_4 \overset{\text{θεώρημα}}{\underset{\text{Θαλή}}{\Leftrightarrow}} \dfrac{5x+4}{18}=\dfrac{5y^2+1}{(x+1)(7-y)}=\dfrac{x+5}{9}$ (1)

$$(1)\Rightarrow \frac{5x+4}{18}=\frac{x+5}{9}\Leftrightarrow 9(5x+4)=18(x+5)$$
$$\Leftrightarrow 45x+36=18x+90$$
$$\Leftrightarrow 45x-18x=90-36$$
$$\Leftrightarrow 27x=54$$
$$\Leftrightarrow \frac{27x}{27}=\frac{54}{27}$$
$$\Leftrightarrow x=2 \quad \text{δεκτή}$$

$$(1)\overset{x=2}{\Rightarrow}\frac{5y^2+1}{(2+1)(7-y)}=\frac{2+5}{9}\Leftrightarrow \frac{5y^2+1}{3(7-y)}=\frac{7}{9}$$
$$\Leftrightarrow 9\left(5y^2+1\right)=7\cdot3(7-y)$$
$$\Leftrightarrow 45y^2+9=21(7-y)$$
$$\Leftrightarrow 45y^2+9=147-21y$$
$$\Leftrightarrow 45y^2+21y+9-147=0$$
$$\Leftrightarrow 45y^2+21y-138=0$$
$$\Leftrightarrow 15y^2+7y-46=0$$

$\alpha=15,\ \beta=7,\ \gamma=-46$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=7^2-4\cdot15\cdot(-46)=7^2+4\cdot15\cdot46=2809$

$$y_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-7\pm\sqrt{2809}}{2\cdot15}=\frac{-7\pm53}{30}\left\langle\begin{array}{l} y_1=\dfrac{-7+53}{30}=\dfrac{46}{30}=\dfrac{23}{15}\quad \text{δεκτή}\\ y_2=\dfrac{-7-53}{30}=-\dfrac{60}{30}=-2\quad \text{δεκτή}\end{array}\right.$$

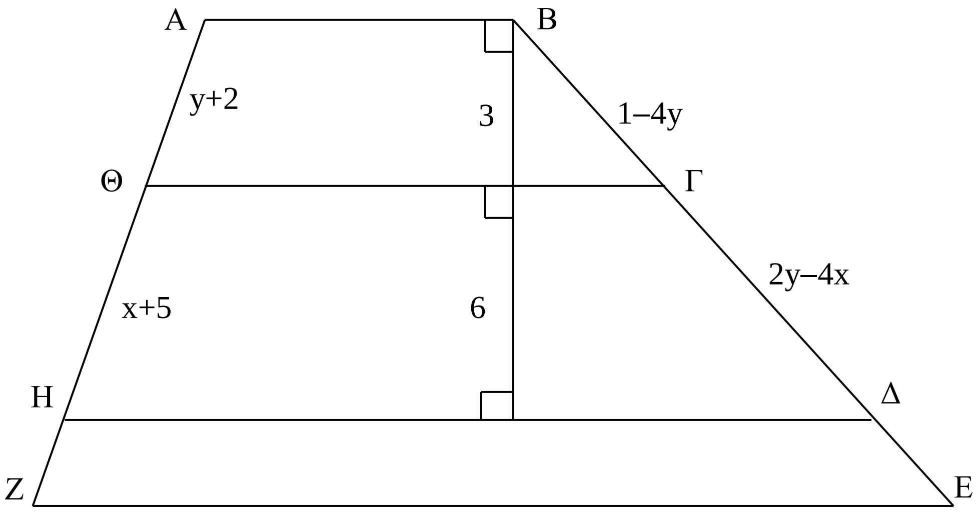
<u>Σημείωση</u>: Για τις τιμές των *x* και *y* που βρήκαμε θα πρέπει να κάνουμε επαλήθευση προκειμένου να διαπιστώσουμε ότι όλα τα μήκη του σχήματος είναι θετικά. Π.χ. για $x=2$ και $y=23/15$ είναι: $5x+4=14>0$, $5y^2+1=574/45>0$, $(x+1)(7-y)=82/5>0$ και $x+5=7>0$. Αν κάποια τιμή μας δίνει αρνητικό μήκος, απορρίπτεται. Εδώ είναι όλες δεκτές.

Άσκηση 2

Α) Βρείτε τους αριθμούς *x* και *y* που αναφέρονται στο διπλανό σχήμα.

(**Μονάδες 6**)

Β) Αν $\mathrm{HZ}=\frac{y-x}{4}$ και $\Delta\mathrm{E}=\frac{x}{y}-\frac{1}{2}$, δείξτε ότι ΗΔ//ΖΕ. (**Μονάδες 4**)



<u>**ΛΥΣΗ**</u>

Α) ΑΒ//ΘΓ//ΗΔ, ως κάθετα στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα. Από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\begin{cases}\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{x+5}{6}\\[2mm] \dfrac{1-4y}{3}=\dfrac{2y-4x}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6(y+2)=3(x+5)\\ 6(1-4y)=3(2y-4x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6(y+2)=3(x+5)\\ 6(1-4y)=3(2y-4x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6y+12=3x+15\\ 6-24y=6y-12x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+6y=15-12\\ 12x-24y-6y=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+6y=3\\ 12x-30y=-6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x+2y=1\\ 2x-5y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+4y=2\\ 2x-5y=-1\end{cases}\underset{\textit{κατά μέλη}}{\overset{\textit{προσθέτω}}{\Rightarrow}}-y=1\Rightarrow y=-1\ \textit{δεκτή}$$

και από $-x+2y=1\Rightarrow -x+2(-1)=1\Rightarrow -x-2=1\Rightarrow -x=1+2\Rightarrow -x=3\Rightarrow x=-3\ \textit{δεκτή}$

Β) Είναι $\Theta\mathrm{H}=x+5=-3+5=2$, $\Gamma\Delta=2y-4x=2(-1)-4(-3)=-2+12=10$,

$\mathrm{HZ}=\frac{y-x}{4}=\frac{-1+3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ και $\Delta\mathrm{E}=\frac{x}{y}-\frac{1}{2}=\frac{-3}{-1}-\frac{1}{2}=\frac{\overset{2}{3}}{1}-\frac{\overset{1}{1}}{2}=\frac{6-1}{2}=\frac{5}{2}$.

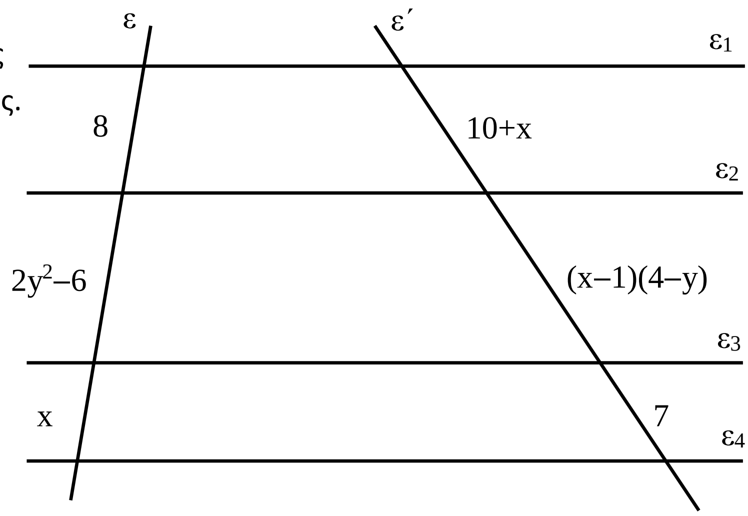
Επίσης

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\Theta\mathrm{H}}{\Gamma\Delta}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}\\[3mm] \dfrac{\mathrm{HZ}}{\Delta\mathrm{E}}=\dfrac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{5}{\cancel{2}}}=\dfrac{1}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\Theta\mathrm{H}}{\Gamma\Delta}=\frac{\mathrm{HZ}}{\Delta\mathrm{E}}\underset{\textit{του Θαλή}}{\overset{\textit{αντί στροφο θεώρημα}}{\Rightarrow}}$$ ΘΓ//ΗΔ//ΖΕ

<u>Σημείωση</u>: Ομοίως με την 1η άσκηση, για τις τιμές των *x* και *y* που βρήκαμε όλα τα μήκη του σχήματος είναι θετικά.

Άσκηση 3

Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 // \varepsilon_4$, να υπολογίσετε τους αριθμούς x και y του διπλανού σχήματος. (Δίνεται ότι $324 = 18^2$)



ΛΥΣΗ

Αφού $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 // \varepsilon_4 \overset{\theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha}{\underset{\Theta\alpha\lambda\acute{\eta}}{\Leftrightarrow}} \dfrac{8}{10+x} = \dfrac{2y^2-6}{(x-1)(4-y)} = \dfrac{x}{7}$ (1)

$$(1) \Rightarrow \frac{8}{10+x} = \frac{x}{7} \Leftrightarrow 7 \cdot 8 = x(10+x)$$

$$\Leftrightarrow 56 = 10x + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 56 = 0$$

$\alpha = 1,\ \beta = 10,\ \gamma = -56$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56) = 100 + 224 = 324$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-10 \pm \sqrt{324}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 18}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-10+18}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \quad \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \\ x_2 = \dfrac{-10-18}{2} = -\dfrac{28}{2} = -14 \quad \alpha\pi\text{ο}\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota \end{array} \right.$$

$$(1) \overset{x=4}{\Rightarrow} \frac{2y^2-6}{(4-1)(4-y)} = \frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{2y^2-6}{3(4-y)} = \frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow 7\left(2y^2-6\right) = 4 \cdot 3(4-y)$$

$$\Leftrightarrow 14y^2 - 42 = 12(4-y)$$

$$\Leftrightarrow 14y^2 - 42 = 48 - 12y$$

$$\Leftrightarrow 14y^2 + 12y - 42 - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow 14y^2 + 12y - 90 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7y^2 + 6y - 45 = 0$$

$\alpha = 7,\ \beta = 6,\ \gamma = -45$

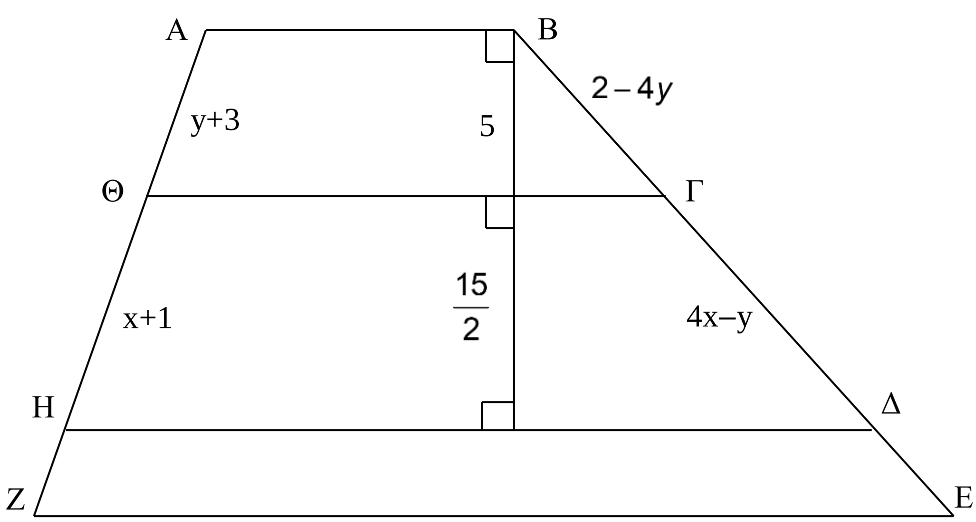
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-45) = 36 + 1260 = 1296$

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-6 \pm \sqrt{1296}}{2 \cdot 7} = \frac{-6 \pm 36}{14} \left\langle \begin{array}{l} y_1 = \dfrac{-6+36}{14} = \dfrac{30}{14} = \dfrac{15}{7} \quad \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \\ y_2 = \dfrac{-6-36}{14} = -\dfrac{42}{14} = -3 \quad \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \end{array} \right.$$

Άσκηση 4

Α) Βρείτε τους αριθμούς *x* και *y* που αναφέρονται στο διπλανό σχήμα.

Β) Αν $\mathrm{HZ}=\dfrac{x+y}{4}$ και $\Delta\mathrm{E}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}$, δείξτε ότι ΗΔ//ΖΕ.



ΛΥΣΗ

Α) ΑΒ//ΘΓ//ΗΔ, ως κάθετα στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα. Από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\begin{cases}\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{x+1}{15/2}\\[2mm]\dfrac{2-4y}{5}=\dfrac{4x-y}{15/2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15(y+3)=5\cdot 2(x+1)\\15(2-4y)=5\cdot 2(4x-y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(y+3)=2(x+1)\\3(2-4y)=2(4x-y)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3y+9=2x+2\\6-12y=8x-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3y=2-9\\8x-2y+12y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3y=-7\\8x+10y=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3y=-7\\4x+5y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4x+6y=-14\\4x+5y=3\end{cases}\overset{\text{προσθέτω}}{\underset{\text{κατά μέλη}}{\Rightarrow}}11y=-11\Rightarrow y=-1\ \textit{δεκτή}$$

και από $4x+5y=3\Rightarrow 4x+5(-1)=3\Rightarrow 4x-5=3\Rightarrow 4x=3+5\Rightarrow 4x=8\Rightarrow x=2\ \textit{δεκτή}$

Β) Είναι $\Theta\mathrm{H}=x+1=2+1=3$, $\Gamma\Delta=4x-y=4\cdot 2-(-1)=8+1=9$,

$$\mathrm{HZ}=\frac{x+y}{4}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}\ \text{και}\ \Delta\mathrm{E}=\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=\frac{2}{2}-\frac{1}{4}=\frac{\overset{4}{1}}{1}-\frac{\overset{1}{1}}{4}=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Επίσης

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\Theta\mathrm{H}}{\Gamma\Delta}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}\\[3mm]\dfrac{\mathrm{HZ}}{\Delta\mathrm{E}}=\dfrac{\frac{1}{\cancel{4}}}{\frac{3}{\cancel{4}}}=\dfrac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\Theta\mathrm{H}}{\Gamma\Delta}=\frac{\mathrm{HZ}}{\Delta\mathrm{E}}\ \overset{\substack{\text{αντίστροφο}\\\text{θεώρημα}}}{\underset{\text{του Θαλή}}{\Rightarrow}}$$ ΘΓ//ΗΔ//ΖΕ