ΒΑΣΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Ορισμοί

- $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\nu-\text{παράγοντες}}$
- $\alpha^{0} = 1, \quad \alpha \neq 0$
- $\alpha^{1} = \alpha$
- $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}, \quad \alpha \neq 0$

Ιδιότητες

- $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$
- $\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha\beta)^{\nu}$
- $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$
- $\dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$
- $\dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

ΑΠΟΛΥΤΑ

Ορισμός

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Μερικές βασικές ιδιότητες

- $|\alpha|^{2} = \alpha^{2}$
- $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
- $\sqrt{\alpha^{2}} = |\alpha|$
- $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$
- $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta, \quad \theta > 0$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha,$
- $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta, \quad \theta > 0$
- $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \text{ ή } x > \theta, \quad \theta > 0$

ΡΙΖΕΣ

Αν $\alpha,\beta \geq 0$ τότε:

- $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha$
- $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$
- $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$
- $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$
- $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$
- $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$
- $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$
- $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Ορισμοί

- $\log_{\alpha}\theta = x \Leftrightarrow \alpha^{x} = \theta, \quad \alpha,\theta > 0,\ \alpha \neq 1$
- $\log\theta = x \Leftrightarrow 10^{x} = \theta$
- $\ln\theta = x \Leftrightarrow e^{x} = \theta$

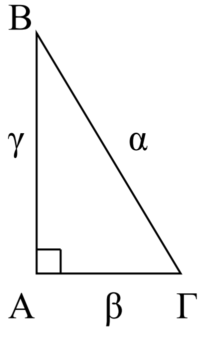
Συνέπειες του ορισμού

- $\log_{\alpha} 1 = 0$
- $\alpha^{\log_{\alpha}\theta} = \theta$
- $\log_{\alpha}\alpha = 1$
- $\log_{\alpha}\alpha^{x} = x$

Ιδιότητες

- $\log_{\alpha}(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha}\theta_1 + \log_{\alpha}\theta_2$
- $\log_{\alpha}\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_{\alpha}\theta_1 - \log_{\alpha}\theta_2$
- $\log_{\alpha}\theta^{\kappa} = \kappa \cdot \log_{\alpha}\theta, \quad \kappa \in \mathbb{R}$

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ



Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει:

$\alpha^{2} = \beta^{2} + \gamma^{2}$

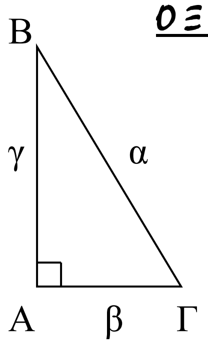
όπου:

α = ΒΓ: υποτείνουσα

β = ΑΓ: κάθετη πλευρά

γ = ΑΒ: κάθετη πλευρά

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ



Ημίτονο της γωνίας Β

$$\eta\mu B = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Συνημίτονο της γωνίας Β

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Εφαπτομένη της γωνίας Β

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\text{απέναντη κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{\beta}{\gamma}$$

Συνεφαπτομένη της γωνίας Β

$$\sigma\varphi B = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{\gamma}{\beta}$$

Ανάλογα έχουμε:

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha},\ \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha},\ \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\gamma}{\beta},$$

$$\sigma\varphi\Gamma = \frac{\beta}{\gamma}$$

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι:

- $\varepsilon\varphi B = \dfrac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}$
- $\eta\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 B = 1$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών (τόξων)

	ημ	συν	εφ	σφ
0^o (0rad)	0	1	0	—
30^o ($\frac{\pi}{6}$rad)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^o ($\frac{\pi}{4}$rad)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^o ($\frac{\pi}{3}$rad)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^o ($\frac{\pi}{2}$rad)	1	0	—	0

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Πρώτου βαθμού $(\alpha x + \beta = 0)$

1. Απαλείφουμε τους παρονομαστές
2. Απαλείφουμε τις παρενθέσεις
3. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
4. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων
5. Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου

Δεύτερου βαθμού $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma, \qquad x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

ν-οστού βαθμού

- $x^\nu = \alpha^\nu \Leftrightarrow x = \alpha$, όταν ν περιττός
- $x^\nu = \alpha^\nu \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$, όταν ν άρτιος

Τριγωνομετρικές

- $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi + (\pi - \theta) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi - \theta \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$
- $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟ $\mathbb{R}$

- Αν $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma$ τότε $\alpha \geq \gamma$
- $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$
- $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \geq \beta\gamma$, όταν $\gamma \geq 0$
- $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma$, όταν $\gamma \leq 0$
- Αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma \geq \delta$ τότε $\alpha+\gamma \geq \beta+\delta$
- Αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma \geq \delta$ τότε $\alpha\gamma \geq \beta\delta$, όταν $\alpha,\beta,\gamma,\delta \geq 0$
- $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu \geq \beta^\nu$, όταν $\alpha,\beta \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$
- $\dfrac{\alpha}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha\beta \geq 0 \ \text{ και } \ \beta \neq 0)$
- $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} \leq \dfrac{1}{\beta}$, όταν $\alpha\beta > 0$

ΔΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma \geq 0)$

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα Δ και:

- αν $\Delta > 0$ τότε x_1, x_2 ρίζες της f και:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		ομόσημο του α		ετερόσημο του α		ομόσημο του α	

- αν $\Delta = 0$ τότε x_1 διπλή ρίζα της f και:

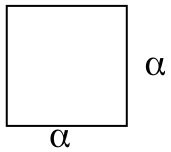
x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
f(x)		ομόσημο του α		ομόσημο του α	

- αν $\Delta < 0$ τότε η f δεν έχει ρίζες και:

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		ομόσημο του α	

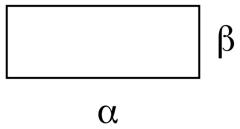
ΕΜΒΑΔΟ (Ε) ΚΑΙ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ (Π) ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Τετράγωνο



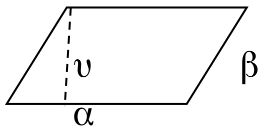
$E = \alpha^2$
$\Pi = 4\alpha$

Ορθογώνιο



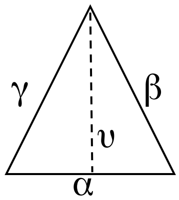
$E = \alpha\beta$
$\Pi = 2\alpha + 2\beta$

Πλάγιο παραλληλόγραμμο



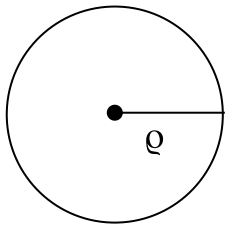
$E = \alpha\upsilon$
$\Pi = 2\alpha + 2\beta$

Τρίγωνο



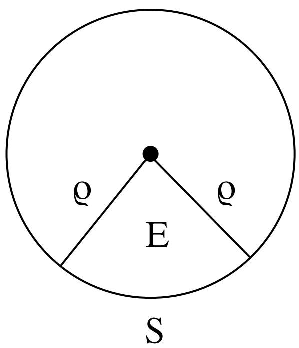
$E = \dfrac{\alpha \cdot \upsilon}{2}$
$\Pi = \alpha + \beta + \gamma$

Κύκλος



$E = \pi\rho^2$
$\Gamma = 2\pi\rho$
Γ: μήκος κύκλου

Κυκλικός τομέας



$E = \dfrac{\pi\rho^2\mu}{360} = \dfrac{1}{2}\alpha\rho^2$

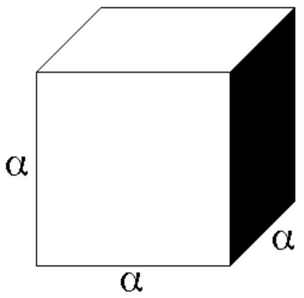
$S = \dfrac{\pi\rho\mu}{180} = \alpha\rho$

μ: γωνία σε μοίρες
α: γωνία σε rad

ΟΓΚΟΙ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

V = όγκος,
$E_{ολ}$ = Εμβαδόν ολικής επιφάνειας,
$E_{π}$ = Εμβαδόν παράπλευρης ή κυρτής επιφάνειας,
$E_{β}$ = Εμβαδό βάσης

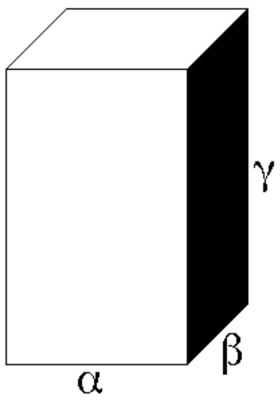
Κύβος



$V = α^3$

$E_{ολ} = 6α^2$

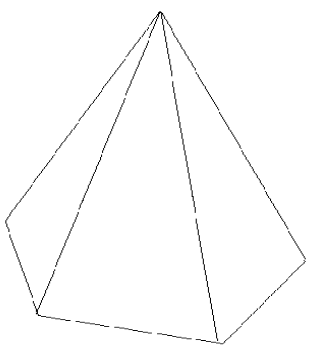
Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο



$V = αβγ$

$E_{ολ} = 2(αβ+αγ+βγ)$

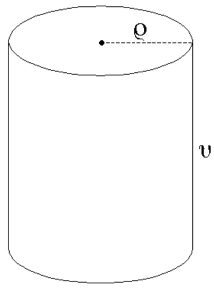
Πυραμίδα



$V = \frac{1}{3}E_{β}υ$

$E_{ολ} = E_{β} + E_{π}$

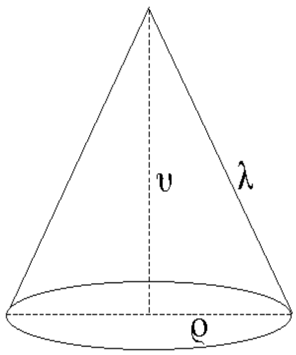
Κύλινδρος



$V = πρ^2υ$

$$E_{ολ} = 2E_{β} + E_{π} = 2πρ^2 + 2πρυ = 2πρ(ρ+υ)$$

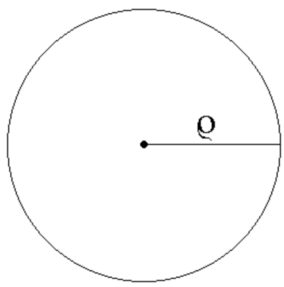
Κώνος



$$V = \frac{1}{3}E_{β}υ = \frac{1}{3}πρ^2υ$$

$$E_{ολ} = E_{β} + E_{π} = πρ^2 + πρλ = πρ(ρ+λ)$$

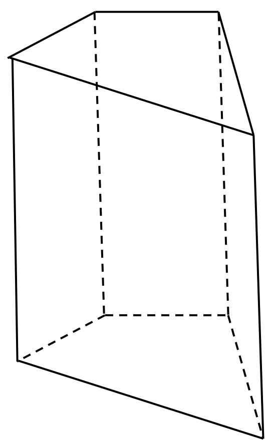
Σφαίρα



$V = \frac{4}{3}πρ^3$

$E = 4πρ^2$

Ορθό Πρίσμα



$V = E_{β}υ$

$E_{ολ} = 2E_{β} + E_{π}$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$
- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
- $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Κοινός παράγοντας

π.χ. $\alpha x+\alpha y-\alpha\omega=\alpha(x+y-\omega)$

Ομαδοποίηση

π.χ.

$$\begin{aligned}\alpha x+\alpha y+\beta x+\beta y &= \alpha(x+y)+\beta(x+y)\\ &=(x+y)(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

Διαφορά τετραγώνων

$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

Ανάπτυγμα τετραγώνου, κύβου ή διάφορες άλλες ταυτότητες

π.χ. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$

Τριώνυμο

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$, όπου x_1,x_2 ρίζες της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

Πολυώνυμο

$P(x)=(x-x_1)\cdot Q(x)$, όπου x_1 ρίζα του P(x). (Διαίρεση πολυωνύμων, σχήμα Horner, ...)

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$, πρέπει $h(x)\neq 0$
- $f(x)=\sqrt[\nu]{g(x)}$, πρέπει $g(x)\geq 0$
- $f(x)=\alpha^{g(x)}$, πρέπει $\alpha>0$
- $f(x)=\log_\alpha g(x)$, πρέπει $\alpha>0,\ \alpha\neq 1$ και $g(x)>0$
- f(x) = εφx, πρέπει συνx ≠ 0
- f(x) = σφx, πρέπει ημx ≠ 0

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΓΩΝΙΑΣ

Αν M(x,y) σημείο διαφορετικό του O(0.0) και $\omega=x\hat{O}M$ τότε:

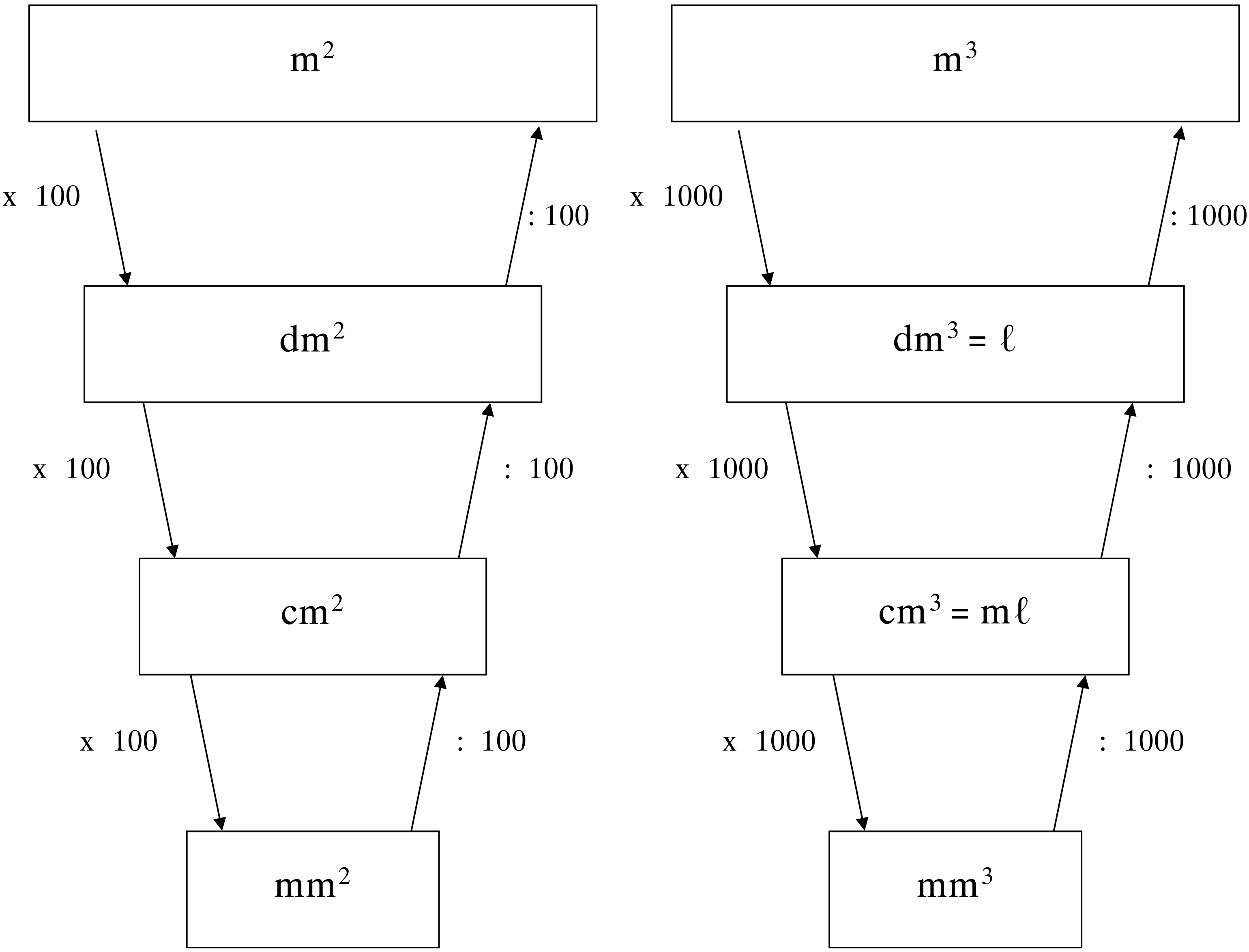
$\eta\mu\omega=\dfrac{y}{\rho}$, $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{x}{\rho}$, $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{y}{x}$ με $x\neq0$, $\sigma\varphi\omega=\dfrac{x}{y}$ με $y\neq0$, όπου $\rho=\sqrt{x^2+y^2}>0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ - ΑΝΑΓΩΓΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ημ(2κπ+ω) = ημω	συν(2κπ+ω) = συνω
εφ(κπ+ω) = εφω	σφ(κπ+ω) = σφω
ημ(–ω) = –ημω	συν(–ω) = συνω
εφ(–ω) = –εφω	σφ(–ω) = –σφω
ημ(π–ω) = ημω	συν(π–ω) = –συνω
εφ(π–ω) = –εφω	σφ(π–ω) = –σφω
ημ(π+ω) = –ημω	συν(π+ω) = –συνω
εφ(π+ω) = εφω	σφ(π+ω) = σφω
$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\omega$
$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\omega$	$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\omega$

ΣΧΕΣΗ ΜΟΙΡΩΝ-ΑΚΤΙΝΙΩΝ

$\dfrac{\alpha}{\pi}=\dfrac{\mu}{180}$, όπου μ η γωνία σε μοίρες και α η γωνία σε ακτίνια.


m²
x 100
: 100
dm²
x 100
: 100
cm²
x 100
: 100
mm²
m³
x 1000
: 1000
dm³ = ℓ
x 1000
: 1000
cm³ = mℓ
x 1000
: 1000
mm³