**ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ, ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ**

**1**. **α**) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5|\le 3$ και $2x^2-x-1\ge 0$.
**β**) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α).

**2**. Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$ .
**α**) Να βρείτε τις λύσεις τους.
**β**) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

**3**. **α**) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$
**β**) Να λύσετε την ανίσωση $-x^2+2x+3\le 0$.
**γ**) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

**4**. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$ .
**β**) Να λύσετε την ανίσωση $|x + 5|\ge 3$.
**γ**) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

**5**. **α**) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-4|=3|x-1|$.
**β**) Να λύσετε την ανίσωση $|3x-5|>1$.
**γ**) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**6**. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\ge 5$.
**β**) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.
**γ**) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

**7**. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<4$.
**β**) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$.

**8**. Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-6\le 0$ (2).
**α**) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).
**β**) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

**9**. **α**) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$.
**β**) Δίνεται η παράσταση $A=|x-3|+|x^2-10x+21|$
**i**) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι $A=-x^2+11x-24$.
**ii**) Να βρείτε τις τιμές του $x\in(3,7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$.

**10**. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $3x^2-4x+1\le 0$.
**β**) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

**11**. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\geq 3$

**β**) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A=||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

**12**. **α**) Να λυθεί η εξίσωση $x^2-x-2=0$

**β**) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2-x-2>0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**13**. **α**) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

**β**) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση $B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$.

**14**. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=3x^2+9x-12$, $x\in R$.

**α**) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

**β**) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**15**. Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha, \beta\in R$.

**α**) Να δείξετε ότι $K-\Lambda=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$

**β**) Να δείξετε ότι $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

**γ**) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**16**. **α**) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

**i**) $|2x-3|\leq 5$.

**ii**) $|2x-3|\geq 1$.

**β**) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

**17**. **α**) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2-x-6=0$ (1)

**β**) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|<2$ (2)

**γ**) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

**18**. **α**) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών: **i**) $|1-2x|<5$ και **ii**) $|1-2x|\geq 1$.

**β**) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

**19**. Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2|<3$ και $x^2-2x-8\leq 0$ .

**α**) Να βρείτε τις λύσεις τους.

**β**) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,4]$.

**γ**) Αν οι αριθμοί $\rho_1$ και $\rho_2$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

**20**. Δίνονται οι ανισώσεις: $2\leq|x|\leq 3$ και $x^2-4x<0$ .

**α**) Να βρείτε τις λύσεις τους.

**β**) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[2,3]$.

**γ**) Αν οι αριθμοί $\rho_1$ και $\rho_2$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

**21**. Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1|\le 2$ και $x^2-x-2>0$.

**α**) Να λύσετε τις ανισώσεις.

**β**) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[-3,-1)$.

**γ**) Αν οι αριθμοί $\rho_1$ και $\rho_2$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι $\rho_1-\rho_2\in(-2,2)$.

**22**. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $x^2<x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

**β**) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

**i**) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: 0, 1, α, $\alpha^2$ , $\sqrt{\alpha}$ .
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

**ii**) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha}$ .

**23**. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $x^2>x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

**β**) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha>1$.

**i**) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: 0, 1, α, $\alpha^2$, $\sqrt{\alpha}$ .
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

**ii**) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: α, $\alpha^2$, $\frac{\alpha+\alpha^2}{2}$ .

**24**. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $|x-3|\le 5$.

**β**) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-3|$.

**γ**) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-3|\le 5$

**δ**) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-3|\le 5$
Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

**25**. **α**) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in R$.

**i**) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

**ii**) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

**β**) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3$, $x\in R$.

**i**) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 2$, για κάθε $x\in R$.

**ii**) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\le 2$ .

**26**. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in R-\{0\}$

**α**) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R-\{0\}$.

**β**) Αν $x_1$, $x_2$ είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

**γ**) Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**δ**) Αν $0<\lambda\neq 1$και $x_1$, $x_2$ με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)$ , όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1<\kappa<x_2<\mu$.

**27**. Δίνεται το τριώνυμο $x^2+βx+β^2$, όπου $β\in R$.

**α**) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

**β**) **i**) Αν $β\neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

**ii**) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $β=0$;

**γ**) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $α^2+αβ+β^2>0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

**28**. Δίνεται το τριώνυμο $x^2–2x–8$.

**α**) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x

**β**) Αν $κ=-\dfrac{8889}{4444}$, η τιμή της παράστασης $κ^2–2κ–8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**γ**) Αν ισχύει $-4<μ<4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης $μ^2–2|μ|–8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**29**. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2–6x+λ–3$, με $λ\in R$.

**α**) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

**β**) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

**γ**) Αν $3<λ<12$, τότε:

**i**) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

**ii**) Αν $x_1$, $x_2$ με $x_1<x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $κ<0$ και $x_1<μ<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $κ\cdot f(κ)\cdot μ\cdot f(μ)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**30**. **α**) **i**) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2+9x+18$.

**ii**) Να λύσετε την εξίσωση $|x+3|+|x^2+9x+18|=0$.

**β**) **i**) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$, για τις διάφορες τιμές του x.

**ii**) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18$.

**31**. Οι πλευρές $x_1$, $x_2$ ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-4\left(λ+\frac{1}{λ}\right)x+16=0,\ λ\in(0,4).$$

**α**) Να βρείτε:

**i**) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

**ii**) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

**β**) Να αποδείξετε ότι $Π\geq 16$ , για κάθε $λ\in(0,4)$.

**γ**) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

**32**. Οι πλευρές $x_1$, $x_2$ ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2–2x+λ(2–λ) = 0$ με $λ\in(0,2)$.

**α**) Να βρείτε:

**i**) την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

**ii**) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

**β**) Να αποδείξετε ότι $Ε\leq 1$, για κάθε $λ\in(0,2)$

**γ**) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

**33**. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-5x-6<0$.

**β**) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\frac{46}{47}-6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

**γ**) Αν $α\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $Λ=α^2-5|α|-6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**34**. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90ο ) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε x+y=10.

**α**) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο $E(x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x)$, $x\in(0, 10)$.

**β**) Να αποδείξετε ότι $E(x)\leq\frac{25}{2}$ για κάθε $x\in(0,10)$ .

**γ**) Για ποια τιμή του $x\in(0,10)$ το εμβαδόν E(x) γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ;

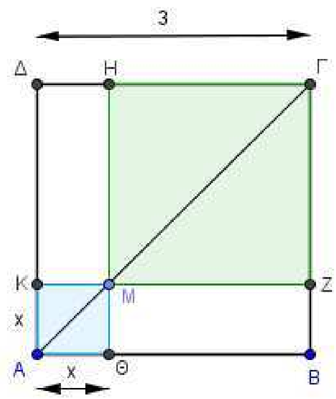
**35**. Στο επόμενο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ=3 και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.

**α**) Να αποδείξετε ότι $E=2x^2-6x+9$, $x\in(0,3)$.

**β**) Να αποδείξετε ότι $E\geq\frac{9}{2}$, για κάθε $x\in(0,3)$.

**γ**) Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.




**36**. Δίνεται η ανίσωση $|x+1|<4$ (1).

**α**) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

**β**) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

**γ**) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+βx+γ$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x\leq0$.

**37**. Δίνεται η ανίσωση $|x-1|<3$ (1).

**α**) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

**β**) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

**γ**) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+βx+γ$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x\geq0$.

**38**. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$.

**α**) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου f(x) για τις διάφορες τιμές του x.

**β**) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου $f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)$

**γ**) Αν $-3<α<3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-α^2+2|α|+3$.

**39**. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+1\geq\frac{5}{2}x$ (1).

**β**) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

**i**) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ.

**ii**) Να δείξετε ότι $|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$.

**40**. Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση $|\alpha-2|<1$.

**α**) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α.

**β**) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$.

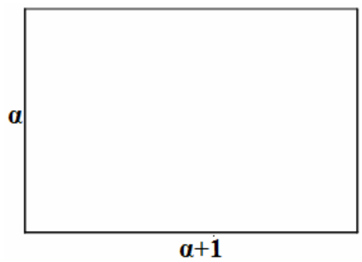
**i**) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

**ii**) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x\in R$, ισχύει $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$.

**41**. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-6<0$.

**β**) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$.

**γ**) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και α+1, όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$. Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει Ε<6, τότε:




**i**) Να δείξετε ότι $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

**ii**) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

**42**. **α**) Δίνεται το τριώνυμο $x^2-3x+2$, $x\in R$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

**β**) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με α<β για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

**43**. Δίνεται η παράσταση $K=\frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

**α**) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$.

**β**) Για ποιες τιμές του $x\in R$ ορίζεται η παράσταση Κ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**γ**) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ.

**44**. Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει $d(x,-2)<1$. Να δείξετε ότι:

**α**) $-3<x<-1$.

**β**) $x^2+4x+3<0$.