ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ, ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. **α**) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2+10x=12$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}$

2. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\lambda x+(\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1), $\lambda\in R$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

β) Να λύσετε την ανίσωση $S^2-P-2\geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1).

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$, με $\lambda\in R$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R$.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$

4. Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda-2=0$, με $\lambda\in R$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in R$.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει $x_1+x_2=-x_1\cdot x_2$.

5. **α**) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$.

β) Αν α, β με α< β είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+3=0$.

6. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x=x+\lambda^2-1$, με $\lambda\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$, $\lambda\in R$.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in R$ για τις οποίες $2x^2-3x+1<0$

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2-3x+1<0$.

8. **α**) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=3$.

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

9. Οι διαστάσεις (σε m) του πατώματος του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι x+1 και x, με x>0.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 m^2, να βρείτε τις διαστάσεις του.

10. Δίνεται η εξίσωση $x^2+2λx+4(λ-1)=0$ με $λ\in R$.
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.
β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε λR.
γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει $(x_1+x_2)^2+x_1\cdot x_2+5=0$.

11. Δίνεται η εξίσωση $(λ^2-9)x=λ^2-3λ$, με $λ\in R$ (1).
α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις.
β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $λ\in R$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.
γ) Να βρείτε την τιμή του $λ\in R$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

12. Δίνεται η εξίσωση $(λ^2-1)x=(λ+1)(λ+2)$, με $λ\in R$.
α) Να λύσετε την εξίσωση για $λ=1$ και για $λ=-1$.
β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή.

13. Δίνονται οι αριθμοί $A=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$ και $B=\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:
i) $A+B=\dfrac{1}{2}$.
ii) $A\cdot B=\dfrac{1}{20}$.
β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

14. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+λx-5$, όπου $λ\in R$.
α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0=1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ.
β) Για $λ=3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

15. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$.
α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2.
β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: x_1+x_2, $x_1\cdot x_2$ και $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.
γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{1}{x_1}$ και $\dfrac{1}{x_2}$.

16. Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}$.
α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $Δ=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$.
β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

17. **α**) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2-2x-1$.
β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση $A(x)=\dfrac{x-1}{3x^2-2x-1}$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $|A(x)|=1$.

18. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $α+β=2$ και $α^2β+αβ^2=-30$.
α) Να αποδείξετε ότι $α\cdot β=-15$.
β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

19. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in R$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1,να βρείτε το λ.

β) Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

20. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+\lambda-2=0$, με παράμετρο $\lambda\in R$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1, x_2, να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει $x_1\cdot x_2-2(x_1+x_2)=1$.

21. Δίνεται η παράσταση $A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι $A=4$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x+A|=1$.

22. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2-(\lambda-1)x-1=0$, με παράμετρο $\lambda\neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\neq 0$.

23. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$, με παράμετρο $\lambda\neq-2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

24. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha\cdot\beta=4$ και $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta=5$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β, και να τους βρείτε.

25. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha+\beta=-1$ και $\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-12$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

26. Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$, με παράμετρο $\alpha\in R$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha=1$.

ii) όταν $\alpha=-3$.

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

27. Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο Π=20cm και εμβαδό $E=24cm^2$.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου.

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

28. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α ,β, τέτοιοι ώστε $\alpha+\beta=12$ και $\alpha^2+\beta^2=272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=-64$.

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β.

29. Δίνονται οι αριθμοί: Α=$\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ και Β=$\frac{1}{3+\sqrt{7}}$.

α) Να δείξετε ότι: Α+ Β = 3 και Α·Β=$\frac{1}{2}$.

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς Α, Β.

30. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$, με παράμετρο $\lambda\neq-2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1\cdot x_2=-3$.

31. Δίνεται το τριώνυμο $x^2-\kappa x-2$, με $\kappa\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\geq0$ για κάθε $\kappa\in R$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x-2=0$ (1) τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών της (1).

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου $\rho_1=2x_1$ και $\rho_2=2x_2$.

32. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in R$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1,x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1,x_2)=\sqrt{24}$.

33. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\neq-2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta=12\lambda+25$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\neq-2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P=x_1\cdot x_2$.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση $(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0$.

34. Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in R$.

α) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση (1) να είναι 1ου βαθμού.

β) Αν η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια ρίζα διπλή, την οποία και να προσδιορίσετε.

γ) Αν η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή, να προσδιορίσετε τις τιμές του λ (αν υπάρχουν) ώστε το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)+1$ να είναι μη αρνητικό για κάθε x πραγματικό αριθμό.

35. Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $t_A<t_B$, $t_\Gamma=\frac{t_A+2t_B}{3}$ και $|t_A-t_\Delta|=|t_B-t_\Delta|$.

α) **i**) Να δείξετε ότι: $t_\Delta=\frac{t_A+t_B}{2}$.

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει: $t_A+t_B=6$ και $t_A\cdot t_B=8$.

i) Να γράψετε μία εξίσωση $2_{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B
ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

36. Δίνεται η εξίσωση $(λ^2–λ)x^2–(λ^2–1)x+λ–1=0$, (1) με παράμετρο $λ\in R$.
α) Να βρεθούν οι τιμές του $λ\in R$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.
β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $λ\in R$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή $λx^2 –(λ+1)x+1=0$
γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $λ\in R$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.
δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού.

37. Δίνεται η εξίσωση $λx^2+2(λ–1)x+λ–2=0$, (1) με παράμετρο $λ\in R$.
α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $λ=0$.
β) Έστω $λ\neq 0$.
i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.
ii. Αν $x_1=–1$ και $x_2=–1+\dfrac{2}{λ}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1−x_2|>1$.

38. Δίνεται το τριώνυμο $x^2–(α+1)x+4$, $α\in R$.
α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $Δ=(α–1)^2–16$.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
γ) Έστω ότι το τριώνυμο έχει δυο ρίζες, x_1 και x_2.
i) Να βρείτε το άθροισμα $S=x_1+x_2$, το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών του.
ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=4$.

39. Δίνεται η εξίσωση $x^2–2λx+λ^2–1=0$, με παράμετρο $λ\in R$.
α) Να δείξετε ότι για κάθε $λ\in R$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες.
β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $λ\in R$.
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(−2,4)$.

40. Δίνεται η εξίσωση $x^2−2λx+4λ+5=0$, με παράμετρο $λ\in R$.
α) Να αποδείξετε ότι αν $λ=5$ η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή.
β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.
γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες.
δ) Αν $|λ^2−4λ−5| = 4λ−λ^2+5$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

41. Δίνεται η εξίσωση $x^2–4x+2–λ^2=0$ (1) με παράμετρο $λ\in R$.
α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $λ\in R$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.
β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) τότε:
i) Να βρείτε το $S=x_1+x_2$.
ii) Να βρείτε το $P=x_1\cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .
γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:
i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,
ii) να βρείτε το λ.

42. α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-5x+6 για τις διάφορες τιμές του $x\in R$.

β) Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2+(2-\lambda)x+\lambda-2=0$. (1) με παράμετρο λ .

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

43. Δίνεται η εξίσωση $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$, με παράμετρο $\lambda\in R$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\frac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

44. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in R-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R-\{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda<0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1+x_2|\geq 2x_1\cdot x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

45. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, με $\lambda>0$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda>0$.

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 4$ για κάθε $\lambda>0$.

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

46. **α**) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4-7x^2+12=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους β, $\gamma\in R$.
Να δείξετε ότι Αν $\beta<0$, $\gamma>0$ και $\beta^2-4\gamma>0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

47. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-5x+\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha|\leq\frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha=2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$.

48. Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2=\lambda(4x-3)$, με παράμετρο $\lambda\in R$.

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τότε:

i) να υπολογίσετε τα $S=x_1+x_2$ και $P=x1\cdot x_2$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=(4x_1-3)(4x_2-3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

49. Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x-(\lambda^2+5)=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in R$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in R$.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1-2)(x_2-2)=-4$.

50. **α**) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-3x-4=0$ (1)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

51. Δίνεται η εξίσωση $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$, με παράμετρο $\lambda\in R$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0<d(x_1,x_2)<2$.

52. Δίνεται η εξίσωση $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$, με παράμετρο $\lambda\in R$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1,x_2)=\frac{1}{d(x_1,x_2)}$.

53. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in R-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R-\{0\}$.

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\neq 0$, ώστε $f(x)\leq 0$, για κάθε $x\in R$.

54. Δίνεται η εξίσωση $x^2-βx+γ=0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1+x_2|=4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β.

β) Να αποδείξετε ότι $γ<4$.

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2-|β|x+3=0$ (1). Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

55. Δίνεται η εξίσωση $x^2-λx+1=0$ (1) με παράμετρο $λ\in R$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{ρ}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

γ) Για $λ>2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1+4x_2 \geq 4$.

56. Δίνεται το τριώνυμο $αx^2+βx+γ$, $α\neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $γ=2α$ και $β=-3α$.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x\in(1, 2)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $α<0$.

ii) να λύσετε την ανίσωση $γx^2+βx+α<0$.

57. Δίνεται η εξίσωση $αβx^2-(α^2+β^2)x+αβ=0$ όπου α, β δύο **θετικοί** αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι $Δ=(α^2-β^2)^2$.

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β, ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β.

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1=\frac{α}{β}$ και $x_2=\frac{β}{α}$, τότε να αποδείξετε ότι $(1+x_1)(1+x2)\geq 4$.

58. Δίνεται η εξίσωση $λx^2+(2λ-1)x+λ-1=0$, με παράμετρο $λ\in R-\{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2.

59. Δίνεται το τριώνυμο $λx^2-(λ^2+1)x+λ$, $λ\in R-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $λ\in R-\{0\}$

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $λ\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P= x_1\cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $λ>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Για κάθε $λ>0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. να αποδείξετε ότι

$\sqrt{x_1\cdot x_2}\leq\frac{x_1+x_2}{2}$.

60. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in R-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R-\{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1+x_2}{2}$ και 1.

61. Δίνεται η εξίσωση $2x^2+\lambda x-36=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in R$.

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2-\lambda x-36=0$.

ii) Να δείξετε ότι:

• $\rho\neq 0$ και

• ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2+\lambda x+2=0$.

62. **α**) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4-8x^2-9=0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους $\beta,\gamma\in R$.

Να δείξετε ότι αν $\gamma<0$ τότε:

i) $\beta^2-4\gamma>0$

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

63. **α**) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο Π=34cm και διαγώνιο δ=13cm

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=60cm^2$.

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν $40cm^2$ και διαγώνιο 8cm.

64. Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-3x+2=0$ (1) και $x^4-3x^2+2=0$ (2) .

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x, να έχει θετική τιμή.

65. **α**) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4-9x^2+20=0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4+\beta x^2+\gamma=0$, η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

66. Στην Α’ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα: «Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x

β) Να αποδείξετε η Α' τάξη έχει 90 μαθητές.

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

67. Δίνεται η εξίσωση $x^2-5\lambda x-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in R$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in R$, για τις οποίες ισχύει $(x_1+x_2)^2-18-7(x_1\cdot x_2)^{24}=0$.

ii) Για $\lambda=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2-3x_1+4-3x_2+x_1\cdot x_2^2$.

68. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι Ε=1.

β) Αν $\alpha+\beta=10$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β

ii) Να βρείτε τα μήκη α, β.

69. Δίνεται το τριώνυμο $x^2-6x+\lambda-7$, όπου $\lambda\in R$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) **i**) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S=x_1+x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

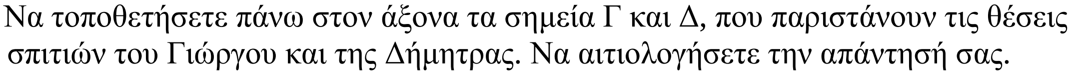
ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7<\lambda<16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) **i**) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2-6|x|+\lambda=7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda=3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

70. Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A, s_B, s_Γ, και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις: $s_A<s_B$, $s_\Gamma=\dfrac{s_A+3s_B}{4}$ και $|s_\Delta-s_A|=|s_\Delta-s_B|$.

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α, Β, παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε Km ικανοποιούν τις σχέσεις $s_A+s_B=1{,}4$ και $s_A\cdot s_B=0{,}45$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, s_Γ και s_Δ.

71. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x+λ=0$, με παράμετρο $λ<1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Να δείξετε ότι $x_1+x_2=2$.

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1-2|=|x_2+2|$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1-x_2=4$.

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ.

72. Δίνονται η εξίσωση $αx^2-(α^2-1)x-α=0$, με παράμετρο $α\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι $Δ=(α+1)^2$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $ρ_1=α$ και $ρ_2=-\dfrac{1}{α}$.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $|ρ_1-ρ_2|=2$.

73. **α**) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2-14x+8=0$ (1)και $8x^2-14x+3=0$ (2).

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής :$αx^2+βx+γ=0$ (3) και $γx^2+βx+α=0$ (4), με $α\cdot γ\neq 0$.
Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $α\cdot γ \neq 0$, τότε:

i) $ρ\neq 0$ και

ii) ο $\dfrac{1}{ρ}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

74. Δίνονται οι παραστάσεις $Α=\dfrac{1+x}{x-1}$ και $Β=\dfrac{2}{x^2-x}$, $x\in R$.

α) Να δείξετε ότι ορίζονται ταυτόχρονα για $x\neq 1$ και $x\neq 0$.

β) Να βρείτε το x ώστε Α=Β. (x=–2)

75. **α**) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $Π=\dfrac{2x^2-1}{x^2-x}+\dfrac{1}{1-x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση

$\dfrac{2x^2-1}{x^2-x}+\dfrac{1}{1-x}=0$.