

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ, ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
 - Αν $x=4$, να δείξετε ότι $A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5})$.
- Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
 - Αν $x=-3$, να δείξετε ότι $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$.
- Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt[3]{(x-2)^5}$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
 - Αν $x=4$, να δείξετε ότι $A^2 + 6A = A^4$.
- Δίνονται οι αριθμοί $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$.
 - Να δείξετε ότι $A - B = 4$.
 - Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$.
- Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση $|x+1| < 2$, τότε:
 - Να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$.
 - Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι ανεξάρτητη του x . (1)
- Δίνεται η παράσταση $A = |x-1| + |y-3|$, με $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.
Να δείξετε ότι:
 - $A = x - y + 2$.
 - $0 < A < 4$.
- Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \leq 2$.
 - Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$.
 - Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β .
 - Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.
 - Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.
- Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $|x-4| < 2$.
 - Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.
 - Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.
 - Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.
- Δίνεται η παράσταση $A = |3x-6| + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Να δείξετε ότι: **i)** Για $x \geq 2$ τότε $A = 3x - 4$ **ii)** Για $x < 2$ τότε $A = 8 - 3x$
 - Αν $x \geq 2$, να δείξετε ότι $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$.
- Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:
 - να αποδείξετε ότι $\alpha^3 < \alpha$.
 - να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 0 , α^3 , 1 , α , $\frac{1}{\alpha}$.

11. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:
 $(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$
 β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$.
12. α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$
 β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$
 γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.
13. α) Αν $a<0$, να αποδειχθεί ότι $a + \frac{1}{a} \leq -2$.
 β) Αν $a<0$, να αποδειχθεί ότι $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$.
14. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις: α) $x+y$ β) $2x-3y$ γ) $\frac{x}{y}$.
15. α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$. (1)
 β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
16. Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$
 α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .
17. α) Να δείξετε ότι $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.
 β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$.
18. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.
 α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
 β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι $A^2 + A - 6 = 0$.
19. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$.
 α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
 β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5})$.
20. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει $|y-3|<1$.
 β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.
21. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση $(\alpha-1)(1-\beta)>0$.
 α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β .
 β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = |\alpha-1| + |1-\beta|$.
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

22. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$.

23. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει $|y-3| < 1$.

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

24. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$.

α) Να αποδείξετε ότι $y = 2x$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$.

25. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$:

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$.

26. Δίνεται η παράσταση $A = |x-1| - |x-2|$.

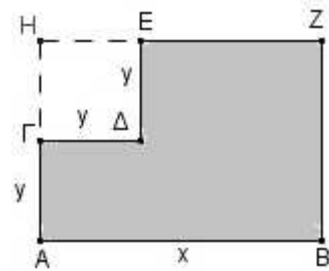
α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι $A = 2x - 3$.

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

27. Από το ορθογώνιο $ABZH$ αφαιρέθηκε το τετράγωνο $\Gamma\Delta E\text{H}$ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος $EZBA\Gamma\Delta$ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση $\Pi = 2x + 4y$.

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.



28. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν $|x-3| \leq 2$ και $|y-6| \leq 4$.

α) Να δείξετε ότι $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

29. Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} + \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

30. Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.
- Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.
 - Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$,
 - Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.
31. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις $A=(\sqrt{2})^6$, $B=(\sqrt[3]{3})^6$ και $\Gamma=(\sqrt[6]{6})^6$
- Να δείξετε ότι $A+B+\Gamma=23$.
 - Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
32. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:
- Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
 - Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
33. Δίνονται οι παραστάσεις $A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.
- Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$.
 - Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
34. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν: $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$.
Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:
- $\alpha-2\beta$.
 - $\alpha^2-2\alpha\beta$.
35. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει $\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta}$
- Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.
 - Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22}(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}(\alpha\beta)^{25}}$.
36. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $d(2x,3)=3-2x$.
- Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.
 - Αν $x \leq \frac{3}{2}$ να αποδείξετε ότι η παράσταση $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.
37. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-2| < 3$.
- Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 5$.
 - Να απλοποιήσετε την παράσταση $K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3}$.
38. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει $|y-2| < 1$.
- Να αποδείξετε ότι $y \in (1,3)$.
 - Να απλοποιήσετε την παράσταση $K = \frac{|y-1|+|y-3|}{2}$.

39. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

- α) $y-x$.
β) x^2+y^2 .

40. Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$

ii) $|x-7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος

$$|x+2|+|x-7|$$

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

41. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A=B$.

42. Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

43. Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$, $B=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=A^2+B^2$.

44. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1| < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 1 , x , x^2 . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

45. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α , β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$.

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

46. Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

47. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41 \quad \sqrt{3} \cong 1,73 \quad \sqrt{5} \cong 2,24 \quad \sqrt{7} \cong 2,64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς:

$$\sqrt{20}, \quad \sqrt{45}, \quad \sqrt{80}.$$

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να

υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;

48. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση $d(x,5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι $|x+4| + |x-14| = 18$.