ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ, ΠΡΟΟΔΟΙ

1. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος με $α_2=0$ και $α_4=4$.
α) Να δείξετε ότι $ω=2$ και $α_1=-2$.
β) Να δείξετε ότι $α_ν=2ν-4$ και να βρείτε ποιος όρος της είναι το 98. (51^{ος})

2. **α**) Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί x, 2x+1, 5x+4 με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρική προόδου. (1, −1)
β) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου όταν:
i) $x=1$ (3)
ii) $x=-1$. (1)

3. Θεωρούμε την ακολουθία (αν) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, …
α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (αν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της.
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

4. Σε γεωμετρική πρόοδο $(α_ν)$ με θετικό λόγο λ, ισχύει: $α_3=1$ και $α_5=4$.
α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.
β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι $α_ν=2^{ν-3}$.

5. **α**) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1,2,3,…ν
β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

6. **α**) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x+2$, $(x+1)^2$, $3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν:
i) $x=1$
ii) $x=-1$.

7. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.
α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.
β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;
γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

8. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (αν) για την οποία ισχύει ότι $α_1=19$ και $α_{10}-α_6=24$.
α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $ω=6$.
β) Να βρείτε τον $α_{20}$.
γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

9. Οι αριθμοί Α=1, Β=x+4 και Γ=x+8, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου $(α_ν)$.
α) Να βρείτε τη τιμή του x.
β) Αν x=1 και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου $(α_ν)$:
i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω.
ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

10. **α**) Αν οι αριθμοί 4–x, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

β) Αν οι αριθμοί 4–x, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί 4–x, x, 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

11. Δίνεται η εξίσωση $2x^2-5\beta x+2\beta^2=0$ (1), με $\beta>0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες: $x_1=2\beta$ και $x_2=\frac{\beta}{2}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

12. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\beta x+(\beta^2-4)=0$, (1) με $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

13. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει $\alpha_4-\alpha_2=10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω=5.

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

14. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1=1$ και $\alpha_3=9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu>30$.

15. Οι αριθμοί κ–2, 2κ και 7κ+4, $\kappa\in\mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι κ=4 και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

β) **i**) Να εκφράσετε το 2$^{\text{ο}}$ όρο, τον 5$^{\text{ο}}$ και τον 4$^{\text{ο}}$ όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1.

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2+\alpha_5=4(\alpha_1+\alpha_4)$.

16. **α**) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί x+4, 2–x, 6–x με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Αν x=5 και ο 6–x είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

17. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1=2$ και $\alpha_{25}=\alpha_{12}+39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω = 3.

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

18. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (αν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2$.

β) Αν $\alpha_{15}-\alpha_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

19. Σε αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ ισχύουν: $α_4-α_9=15$ και $α_1=41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $α_ν=ν$.

20. Σε αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ με διαφορά $ω=4$, ισχύει $α_6+α_{11}=40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο $α_1$ της προόδου.

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

21. Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $α_1$ και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $ω=4$.

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $α_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

22. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος $(α_ν)$, για την οποία ισχύει $\frac{α^5}{α^2}=27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $λ=3$.

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο $α_1$.

23. Σε αριθμητική πρόοδο (αν) είναι $α_1=2$ και $α_5=14$.

α) Να αποδείξετε ότι $ω=3$.

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77; (Δίνεται $\sqrt{1849}=43$).

24. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η $20^η$ κυψέλη;

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την $3^η$ κυψέλη;

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

25. Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^η$ μέχρι και την $14^η$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

26. Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

27. Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:
Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1^o μήνα 1€, το 2^o μήνα 2€, τον 3^o μήνα 4€ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.
Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1^o μήνα 100€, το 2^o μήνα 110€, τον 3ο μήνα 120€ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 € μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) **i**) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

β) **i**) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

28. Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους 1m, με τον ακόλουθο τρόπο. Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το 1^o λεπτό προχωράει 1cm, το 2^o λεπτό προχωράει 3cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2cm μεγαλύτερη από αυτήν που διάνυσε το προηγούμενο λεπτό.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο α_ν αυτής της προόδου.

β) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του.

γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.

δ) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο. Το 1^o λεπτό προχωράει 1cm, το 2^o λεπτό προχωράει 2cm, το 3^o λεπτό προχωράει 4cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διάνυσε το προηγούμενο λεπτό.

i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο β_ν αυτής της προόδου.

ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1cm.

29. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20}-\alpha_{10}=10\omega$.

β) Αν $\alpha_{20}-\alpha_{10}=30$ και $\alpha_1=1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu=3\nu-2$.

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30;

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60;

30. Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2=\kappa^2$ και $\alpha_3=(\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με **κ>1**.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1=2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι ω=7.

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

31. Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της $1^{ης}$ ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της $2^{ης}$ ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της $3^{ης}$ ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα.

β) Πόσες ημέρες μετά από την στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

γ) Στο τέλος της $8^{ης}$ ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ;

32. Δίνονται οι αριθμοί 2, x, 8 με x>0.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, … και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, … τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (αν).

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2(S_\nu+24)=\beta_7$.

33. Οι αριθμοί: x^2+5, x^2+x, $2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.

β) Αν x=3 και ο αριθμός x^2+5 είναι ο $4^{ος}$ όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου.

iii) Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}$.

34. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο $3^{ος}$ όρος είναι $\alpha_3=8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8=23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο $1^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1=2$ και η διαφορά ω=3.

β) Να υπολογίσετε τον $31^{ο}$ όρο της.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\ldots+(\alpha_{31}+31)$.

35. Δίνεται αριθμητική πρόοδος ($α_ν$) με $α_3=10$ και $α_{20}=61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου ($α_ν$), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$.

36. Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 6400, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με $β_ν$ το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($ν \le 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία ($β_ν$) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii) Να εκφράσετε το πλήθος βν των βακτηρίων συναρτήσει του ν.

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

37. Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.
Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

β) Αν, για κάθε $ν \le 51$ ο αριθμός αν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $α_1, α_2,…,α_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης.

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε διαθέτοντας τα εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο. (Δίνεται ότι $\sqrt{10021}=101$).

38. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος ($α_ν$) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $α_3=4$, $α_5=16$ και $λ>0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο $α_1$ και το λόγο λ της προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία ($β_ν$), με $(β_ν)=\frac{1}{α_ν}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της ($α_ν$).

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων ($α_ν$) και ($β_ν$) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $S'_{10}=\frac{1}{2^9}S_{10}$.

39. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος ($α_ν$), όπου $ν \in N^*$ που αποτελείται από ακέραιους αριθμούς για την οποία ισχύει ότι: $α_1=x$, $α_2=2x^2-3x-4$, $α_3=x^2-2$, $x \in R$.

α) Να αποδειχθεί ότι x=3.

β) Να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $S=α_1+α_3+α_5+...+α_{15}$.

40. Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η $1^η$ σειρά έχει 16 καθίσματα και η $7^η$ σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

δ) Αν στην $1^η$ σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη $2^η$ υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην $3^η$ υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη $2^η$ και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

41. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει **α** καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η $7^η$ σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά;