

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ, ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

ii) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + b$.

α) Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,6) και B(-1,4), να βρείτε τα α, β.

β) Για $a=1$ και $b=5$, να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x'x και y'y.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x'x και y'y.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

6. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & , x \leq 3 \\ x^2 & , 3 < x < 10 \end{cases}$.

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & , x < 0 \\ x-1 & , x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$.

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 0$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να δείξετε ότι $f(2) + f(4) = 0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

10. Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση $y = 35 + 0,8x$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά;

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ;

11. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

12. Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση $T = 15 + 25 \cdot x$, όταν $0 \leq x \leq 200$.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8 - x & , x < 0 \\ 2x + 5 & , x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + b$, με $a, b \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

α) Να δείξετε ότι $a = -2$ και $b = 5$.

β) Να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

17. α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A=x^3-x^2+3x-3$.

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$.

18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.

β) Αν A , O , B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι A , B είναι συμμετρικά ως προς το O .

19. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x)=\frac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$, για κάθε $x \in A$

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

20. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

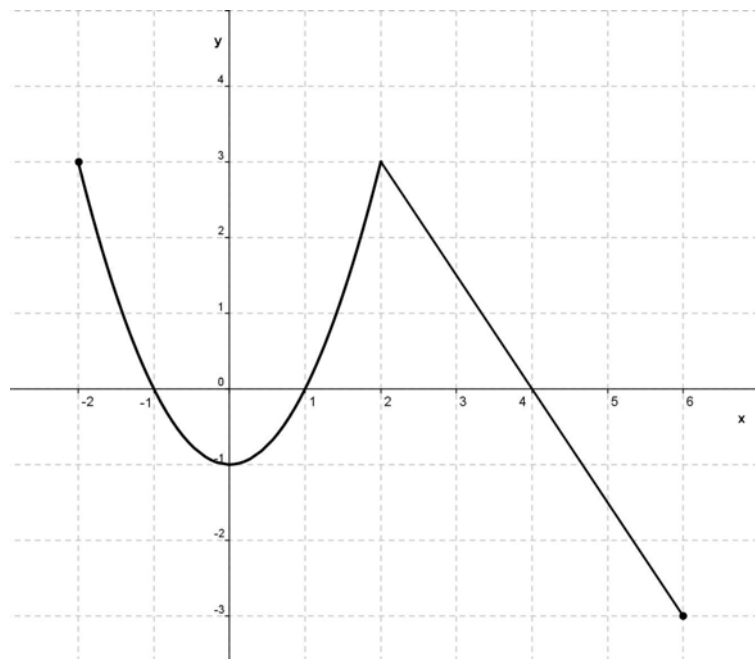
α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

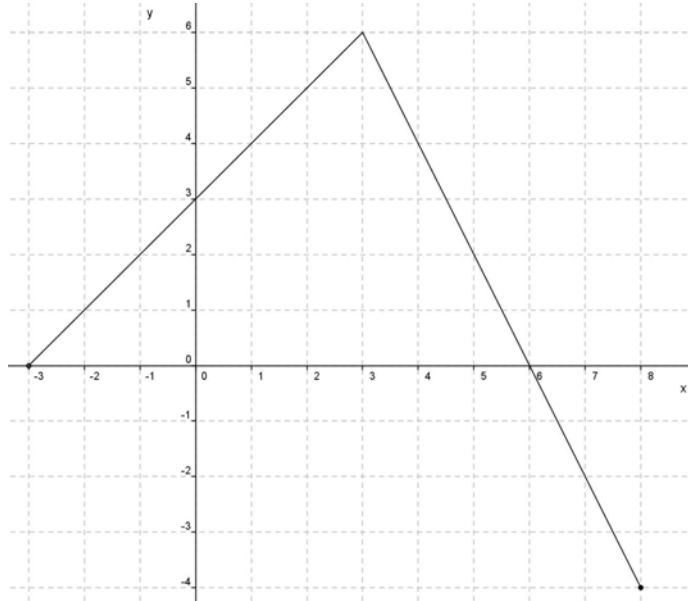
δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.



21. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .
- α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.
- δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.



22. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x + 1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g

διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$,

α) να δείξετε ότι $\mu = -6$.

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

γ) για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

23. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{9 - x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x' και y' αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B .

24. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

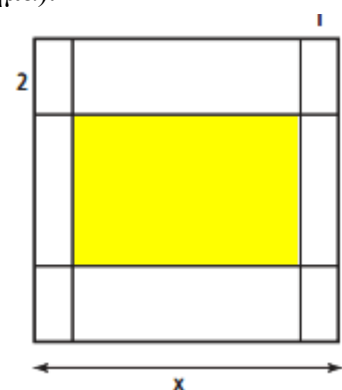
γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$.

25. Ένας αθλητής κολυπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

- i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.
- ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.
- γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.
- 26.** Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x)=15,5x$.
- α) Ποια είναι τα πάγια έξοδα της επιχείρησης;
- β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;
- γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση)
- δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- 27.** Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου A με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου B με πλευρά $(d+1)$ cm.
- α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου A και κάθε πλακάκι τύπου B.
- β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου A είτε με 128 τύπου B, να βρείτε:
- i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.
- ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.
- 28.** Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση $h(t)=-5t^2+10t+1,05$
- α) Να βρείτε τις τιμές $h(0)$, $h(1)$ και $h(2)$, και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.
- β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος.
- γ) Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο $h(t)=5[1,21-(t-1)^2]$
- δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05m.
- 29.** Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).
- α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση $E(x)=(x-2)(x-4)$.
- β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 .



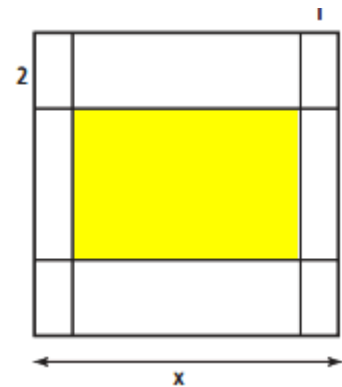
γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 .

30. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $x \text{ cm}$ ($5 \leq x \leq 10$), στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση $E(x) = x^2 - 6x + 8$.

β) Να βρεθεί το x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2 .

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ 35 cm^2 , να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου.



31. Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με $1,8$ και προσθέτουμε 32 .

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) το 273 .

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) είναι η $K = \frac{F - 32}{1,8} + 273$.

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$.

32. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = x - 9$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x' .

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3,0)$ και $(-3,0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του άξονα x' που η τετμημένη του να ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = g(x)$.

δ) Να βρείτε συνάρτηση h που η γραφική της παράσταση να είναι ευθεία και να τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του άξονα x' .

33. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax - a + 2$ και $g(x) = x^2 - a + 3$ με $a \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a .

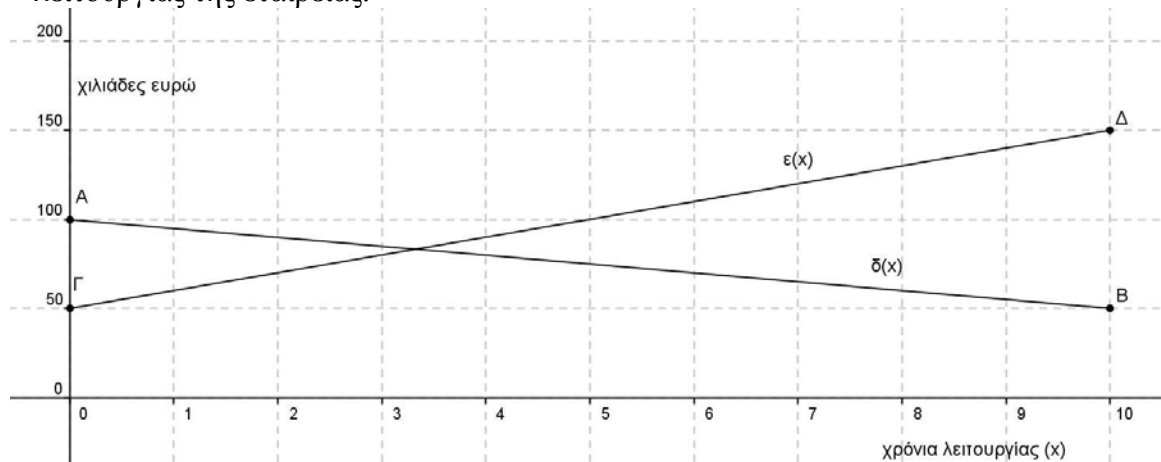
β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1 , τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του a .

ii) Για την τιμή του a που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

34. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα AB με A(0,100) και B(10,50) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με Γ(0,50) και Δ(10,150) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



- α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.
- β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.
ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων AB και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.
35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.
β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = |x| - 2$.
γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x)+2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.
36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x + a$ και $g(x) = ax - 5$, με $a \in \mathbb{R}$.
- α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του a .
β) Για $a = 1$:
i) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
ii) να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq g(x)$ και με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.
37. Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο A(0,2).
β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.
γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο B(2,0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x'x και σε άλλο σημείο.
δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x'x.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

γ) Έστω $M(x,y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

39. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x)=\begin{cases} -x+2 & , x < 0 \\ x+2 & , x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού a , η ευθεία $y=a$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Για τις τιμές του a που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=a$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

40. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=a$, $a < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{2}}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο \mathbb{R} .

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

42. Δίνεται η εξίσωση $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Να βρείτε το λ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

43. Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+kx+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των k και λ .

β) Για $k=1$ και $\lambda=-2$:

- i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g .
- ii) Να δείξετε ότι $g(\alpha+3) > g(\alpha)$, όταν $-1 < \alpha < 2$.

44. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;
- γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$.

- ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1).$$

45. Δίνεται συνάρτηση $g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + kx + \lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των k και λ .
- β) Για $k=1$ και $\lambda=-2$:
 - i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g .
 - ii) Να δείξετε ότι $g(\alpha) \cdot g(\beta) > 0$, όταν $-1 < \alpha < 2$ και $-1 < \beta < 2$.

46. Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση $\lambda = (2x+5)^2 - 8x$ (1)

- α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος;
- β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;
- γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:
 - i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 .
 - ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ .

47. Μια περιβαλλοντική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:

- α) Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτος από το 2000 και μετά.
- β) Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:
 - i) Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012.
 - ii) Να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%.
 - iii) Να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δε θα υπερβεί τα 2600 ελάφια.

48. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + kx - 4$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του k , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
- β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή

σας.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

49. Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση $h(t) = -5t^2 + 10t + 1,05$.

α) Να βρείτε τις τιμές $h(0)$, $h(1)$ και $h(2)$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.

β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος.

γ) Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο $h(t) = 5[1,21 - (t-1)^2]$

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05 m.

50. Αν ένας κάτοικος μιας πόλης A καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα

πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x & , 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6 & , x > 30 \end{cases}$.

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

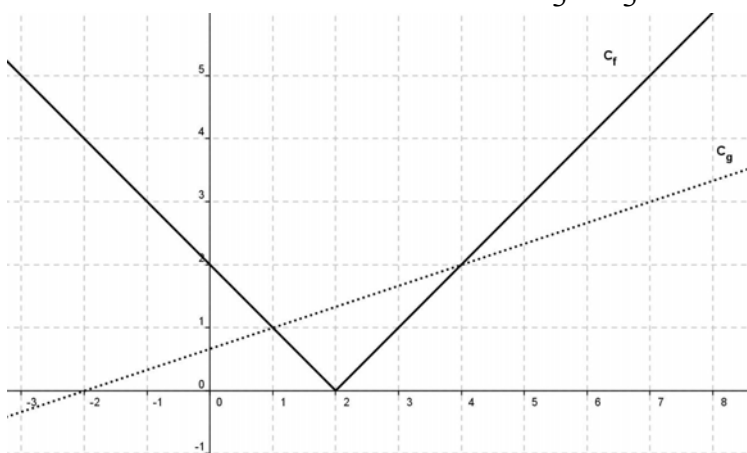
iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

β) Σε μια άλλη πόλη B το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο $g(x) = 12 + 0,6x$, για $x \geq 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη B, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

51. Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και

g αντίστοιχα, με $f(x) = |x-2|$ και $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g .

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα

πραγματικού αριθμού η παράσταση $K = \sqrt{3|2-x| - (x+2)}$.

52. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + a$, με $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$.

- Για $a = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
- Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία.
- Για $a > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

53. Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία A χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο $y = 60 + 0,20x$, όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

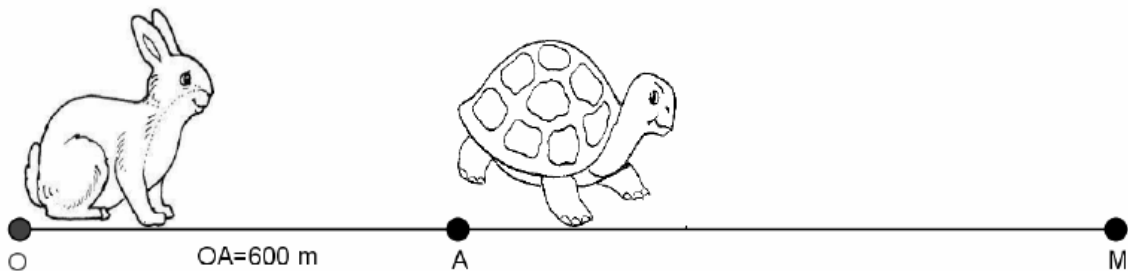
- Τι ποσό θα πληρώσει πελάτης της εταιρείας A , ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400Km ;
- Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ;
- Μία άλλη εταιρεία, η B , χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0,10x$, όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.
- Αν $f(x) = 60 + 0,20x$ και $g(x) = 80 + 0,10x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών A και B αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

54. Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο O .
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο M με $OM > 600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο A που βρίσκεται μεταξύ του O και του M , με $OA = 600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t \geq 0$, η απόσταση του λαγού από το O τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_\lambda(t) = 10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το O τη στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_\chi(t) = 600 + 40t$ μέτρα.

- Να βρείτε σε πόση απόσταση από το O θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα M , ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.
- Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος M από το O είναι $OM = 2250$ μέτρα. Να βρείτε:
 - Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα.
 - Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12$ min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση.
 - Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα.



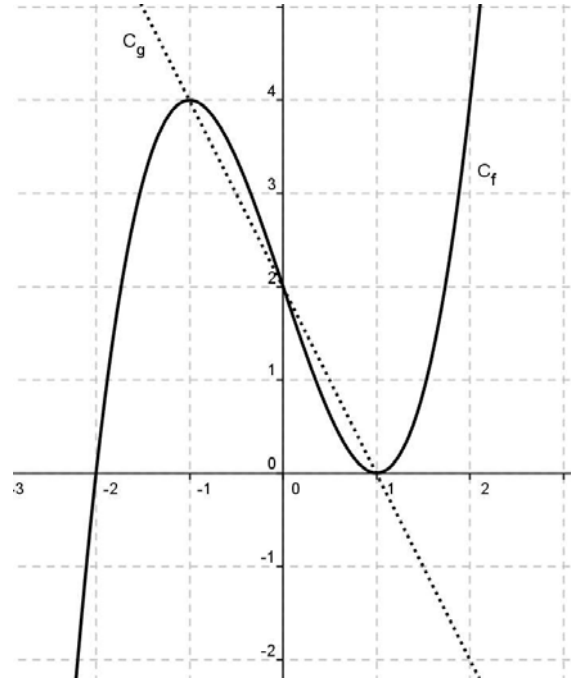
55. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)^2-4$ και $g(x)=|x-1|+2$, με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x ' x .
- β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x ' x .
- γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

56. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x)=-2x+2$.

Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

- α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$.
- β) Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.
- γ) Τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .
- δ) Τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.



57. Ο Στέφανος ζεσταίνει νερό, αρχικής θερμοκρασίας 25°C , και με χρήση ενός θερμομέτρου παρατηρεί ότι η θερμοκρασία του νερού αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 5°C ανά λεπτό.

- α) Είναι η αντιστοιχία χρόνος \rightarrow θερμοκρασία συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

Χρόνος (t) σε min		1	2	3		
Θερμοκρασία (θ) σε $^\circ\text{C}$	25				50	60

- γ) Να παραστήσετε γραφικά την αντιστοιχία χρόνος \rightarrow θερμοκρασία, τοποθετώντας το χρόνο (t) στον οριζόντιο άξονα.
- δ) Με χρήση της γραφικής παράστασης, να εκτιμήσετε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό (το νερό βράζει στους 100°C). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- ε) Να εκφράσετε αλγεβρικά τη σχέση που περιγράφει την αντιστοιχία χρόνος \rightarrow θερμοκρασία και να υπολογίσετε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό.

58. Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα 'RED' χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα 'YELLOW' χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

- α) i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'RED' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)			

ii) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'YELLOW' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

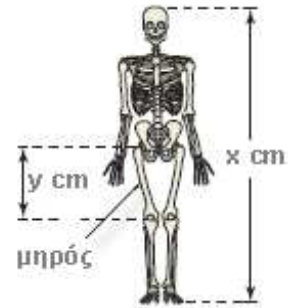
- β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g και τους τύπους τους $f(x)$, $g(x)$.
 γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας 'RED' είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
 δ) Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία 'RED' και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον B, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B.

59. Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :

Γυναίκα: $y=0,43x-26$.

Άνδρας: $y=0,45x-31$.

- α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.
 β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.



60. Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση $y=60t-5t^2$.

- α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;
 β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y=175$ m;
 γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

61. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.
 β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x+a$. Να δείξετε ότι:
 i) αν $a > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν δύο κοινά σημεία.
 ii) αν $a < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g δεν έχουν κοινά σημεία.

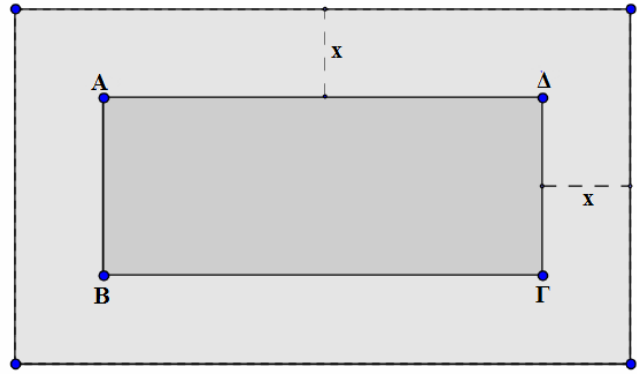
62. Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ABΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως

φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:
 $E(x)=4x^2+80x, x>0$.

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E=500 \text{ m}^2$.

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2 ;
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



63. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40\text{cm}$. Αν $x \text{ cm}$ είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $0<x<20$.

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x)=20-x^2$.

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x)\leq 100$, για κάθε $x\in(0,20)$.

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm .

64. Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει v τόνερ το μήνα.

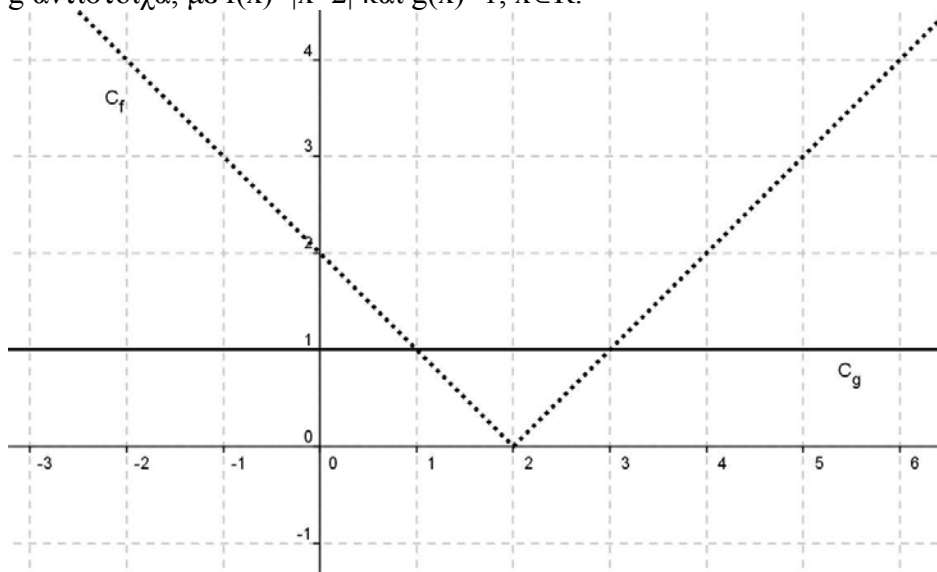
β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v αριθμού τόνερ το μήνα.

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i) να μην έχει ζημιά.

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

65. Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=1, x\in\mathbb{R}$.



- α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g .
 ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g .
 β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.
 γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$A = \sqrt{\frac{1-f(x)}{f(x)}}.$$

66. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3 & , x > 2 \\ -x + 3 & , x < 2 \end{cases}$.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της με τους άξονες x ' x και y ' y .

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

67. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της με τους άξονες x ' x και y ' y .

68. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

• $|1 - 3\alpha| < 2$.

• Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3} < \alpha < 1$.

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta - 3\alpha - 1| < 3$.

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4(\beta - 2)x + \beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

69. Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να

ερμηνεύσετε τη σημασία του.

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ).

