

1. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) και  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$       β) Το τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  είναι ορθογώνιο.      γ)  $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$ .

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με γωνία  $A=120^\circ$  και  $AB=2A\Delta$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\Delta$  του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την  $AB$  στο  $E$ , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα  $AZ$  στη  $\Delta E$ . Να αποδείξετε ότι:

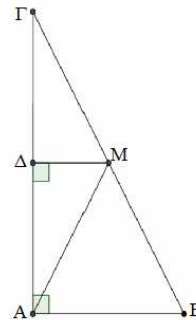
α)  $\widehat{A\Delta E}=30^\circ$

β)  $AZ = \frac{AB}{4}$ .

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) με  $B\Gamma=8\text{cm}$ . Έστω  $AM$  είναι διάμεσος του τριγώνου και  $M\Delta \perp A\Gamma$ . Αν η γωνία  $AM\Gamma$  είναι ίση με  $120^\circ$ , τότε:

α) Να δείξετε ότι  $AB=4\text{cm}$ .

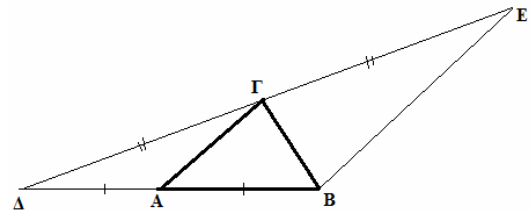
β) Να βρείτε το μήκος της  $M\Delta$ .



4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ). Στην προέκταση της  $BA$  (προς το μέρος της κορυφής  $A$ ) παίρνουμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AB=A\Delta$  και στην προέκταση της  $\Delta\Gamma$  (προς το μέρος της κορυφής  $\Gamma$ ) παίρνουμε σημείο  $E$  ώστε  $\Delta\Gamma=GE$ .

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta\Gamma B$  είναι ορθογώνιο.

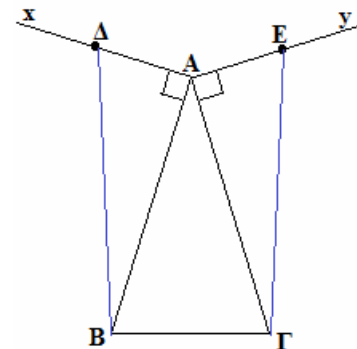
β) Να δείξετε ότι  $BE \parallel A\Gamma$  και  $A\Gamma = \frac{BE}{2}$ .



5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  τέτοιες ώστε  $Ax \perp AB$  και  $Ay \perp A\Gamma$ . Στις  $Ax$  και  $Ay$  θεωρούμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα, ώστε  $A\Delta=AE$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta=GE$ .

β) Αν  $M$  και  $N$  είναι τα μέσα των τμημάτων  $B\Delta$  και  $GE$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AMN$  είναι ισοσκελές.



6. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και γωνία  $\Gamma = 30^\circ$ . Θεωρούμε το ύψος  $A\Delta$  και το μέσο  $Z$  της πλευράς  $A\Gamma$ . Προεκτείνουμε το ύψος  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) κατά ίσο τμήμα  $\Delta E$ . Να αποδείξετε ότι:

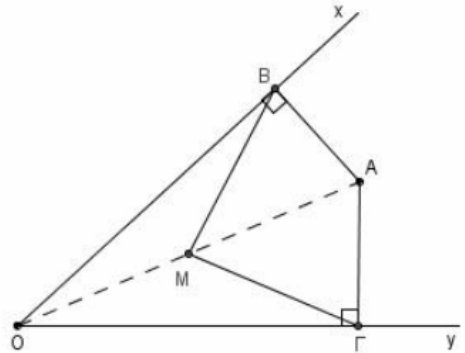
α)  $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$ .

β) Το τρίγωνο  $A\Gamma E$  είναι ισόπλευρο.

7. Δίνεται γωνία  $xOy$  και σημείο  $A$  στο εσωτερικό της. Από το  $A$  φέρνουμε τις κάθετες  $AB$ ,  $A\Gamma$  προς τις πλευρές  $Ox$ ,  $Oy$  της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε  $M$  το μέσο του  $OA$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $BM\Gamma$  είναι ισοσκελές.

β)  $\widehat{BM\Gamma} = 2 \cdot \widehat{xOy}$ .



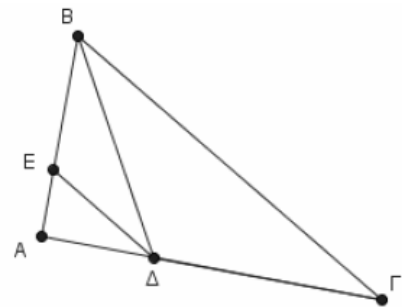
8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ ). Έστω  $\Delta$  σημείο της πλευράς  $A\Gamma$  τέτοιο ώστε, η διχοτόμος  $DE$  της γωνίας  $A\Delta B$  να είναι παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.

β) Αν  $A\Delta B = 60^\circ$ , τότε:

i. να υπολογίσετε τη γωνία  $\Gamma$ .

ii. να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 2AB$ .



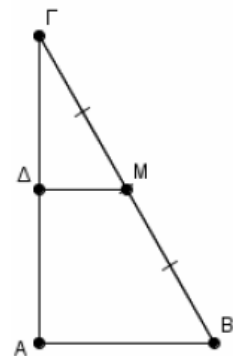
9. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ ) με  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ . Από το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην  $AB$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ .

α) Να υπολογίσετε:

i. τις γωνίες και του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

ii. τις γωνίες του τριγώνου  $AM\Gamma$ .

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $M\Delta$  είναι μεσοκάθετος του  $A\Gamma$ .

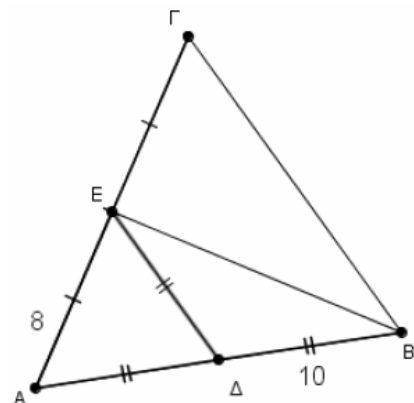


10. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν  $A\Delta = E\Delta = \Delta B$  με  $AE = 8$  και  $\Delta B = 10$ .

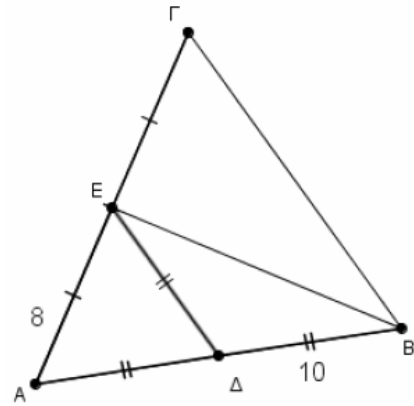
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AEB$  είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 20$ .

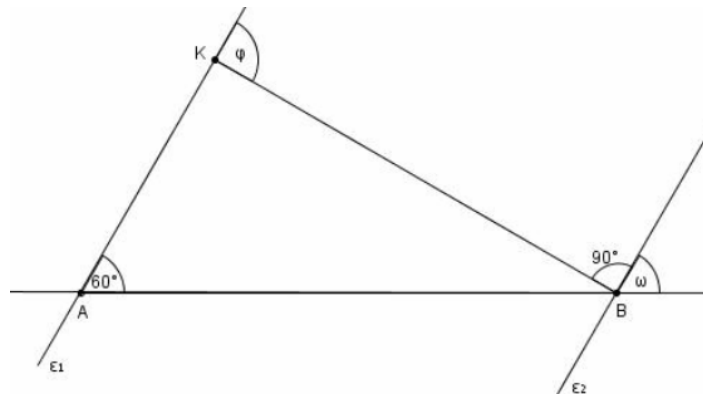
γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



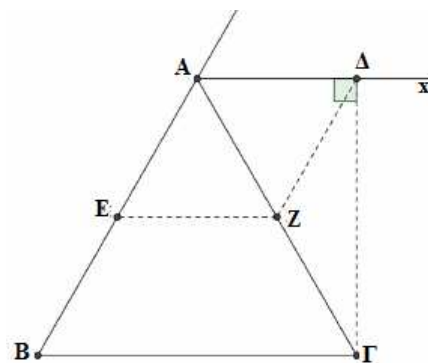
11. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν  $A\Delta = E\Delta = \Delta B$  με  $AE = 8$  και  $\Delta B = 10$ .
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AEB$  είναι ορθογώνιο.
  - Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.
  - Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



12. Στο παρακάτω σχήμα είναι  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$  και  $AB = 6$ .
- Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\varphi$  και  $\omega$ .
  - Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου  $ABK$  ως προς τις γωνίες του.
  - Να υπολογίσετε το μήκος της  $AK$ , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

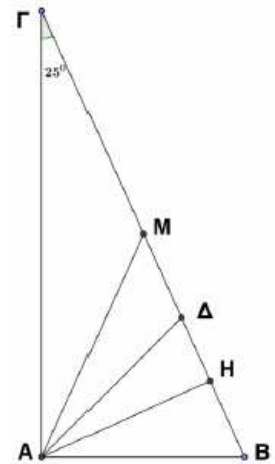


13. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο  $Ax$  της γωνίας  $A$  και από το σημείο  $\Gamma$  την κάθετο  $\Gamma\Delta$  στην  $Ax$ . Τα σημεία  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- το τρίγωνο  $AZ\Delta$  είναι ισόπλευρο.
  - το τετράπλευρο  $A\Delta ZE$  είναι ρόμβος.

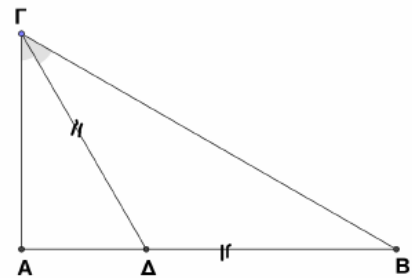


14. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$  και  $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$ .
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.
  - Αν η πλευρά  $B\Gamma = 2\text{cm}$  να βρείτε το μήκος της  $AB$ .

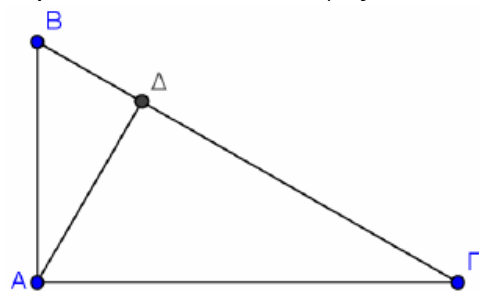
15. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$  και  $\hat{\Gamma}=25^\circ$ . Δίνονται επίσης η διάμεσος  $AM$ , το ύψος  $AH$  από την κορυφή  $A$  και η διχοτόμος  $AD$  της γωνίας  $A$ .
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{AMB}$ ,  $\widehat{HAB}$  και  $\widehat{ADB}$ .
- β) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{MAD} = \widehat{DAH} = 20^\circ$ .



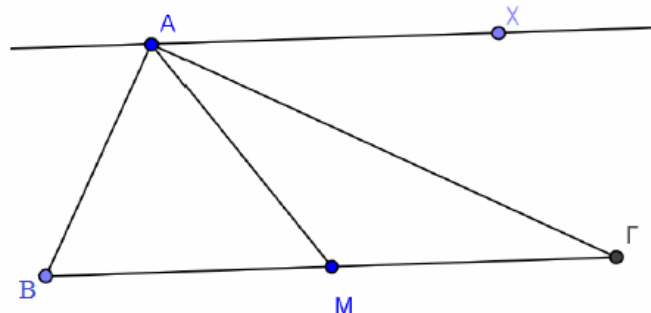
16. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  (με  $\hat{A}=90^\circ$ ) και η διχοτόμος της γωνίας  $\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ , τέτοιο ώστε  $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{cm}$ . Να αποδείξετε ότι:
- α)  $\hat{B} = 30^\circ$ .
- β)  $AB = 3\text{cm}$ .



17. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή,  $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$  και  $AD$  το ύψος του.
- α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- β) Να υπολογιστεί η γωνία  $\widehat{BA\Delta}$ .
- γ) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \frac{AB}{2}$ .



18. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Φέρουμε ημιευθεία  $Ax$  παράλληλη στη  $B\Gamma$  (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η  $AM$  με το σημείο  $\Gamma$ ). Να αποδείξετε ότι:
- α)  $\widehat{MAG} = \widehat{MGA}$
- β) η  $A\Gamma$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{MAx}$ .



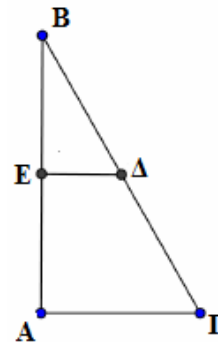
19. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$  και  $\hat{B}=30^\circ$ . Αν τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα με  $E\Delta=1$ , να υπολογίσετε τα τμήματα:

α)  $A\Gamma=\dots$

β)  $B\Gamma=\dots$

γ)  $A\Delta=\dots$

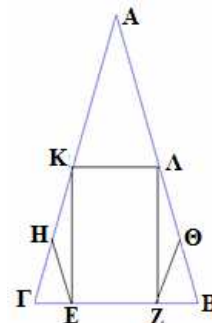
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



20. Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=A\Gamma$ . Από τα μέσα  $K$  και  $\Lambda$  των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $KE$  και  $\Lambda Z$  στην πλευρά  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $KE\Gamma$  και  $\Lambda ZB$  είναι ίσα.

β)  $EH=Z\Theta$ , όπου  $H$ ,  $\Theta$  τα μέσα των τμημάτων  $K\Gamma$ ,  $\Lambda B$  αντίστοιχα.



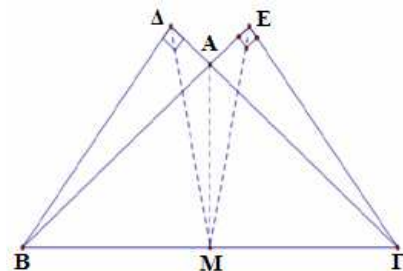
21. Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ). Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  προς το  $A$  φέρνουμε τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  κάθετα στις  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .

β) Αν  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$  τότε:

i. Να αποδείξετε ότι  $M\Delta = ME$ .

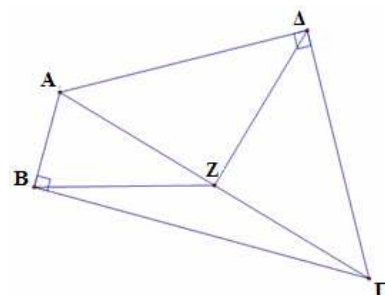
ii. Να αποδείξετε ότι η  $AM$  διχοτομεί τη γωνία  $\Delta ME$ .



22. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B}=90^\circ$  και  $Z$  το μέσο του  $A\Gamma$ . Με υποτείνουσα το  $A\Gamma$  κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  με  $\hat{\Delta}=90^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $BZ = \Delta Z$ .

β) Αν  $\widehat{A\Gamma B}=30^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες  $B\Delta\Delta$  και  $B\Gamma\Delta$ .



23. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$  και  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$  φέρουμε το ύψος του  $A\Delta$  και την διάμεσο  $AM$  στην πλευρά  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες  $B$  και  $\Gamma A\Delta$  είναι ίσες,

β)  $\widehat{AM\Delta} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$ .

24. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  τέτοιο, ώστε  $A\Gamma < AB$ . Στην πλευρά  $AB$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = A\Gamma$  και στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $AE = A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$ .

β) η γωνία  $EAG$  είναι διπλάσια της γωνίας  $A\Delta\Gamma$ .

25. Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{B} = 120^\circ$  και  $\Delta E \perp B\Gamma$ . Έστω  $EZ$  η διάμεσος του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $A$  και  $\Gamma$  του παραλληλογράμμου.

β) Αν  $K$  είναι το μέσο της πλευράς  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $EZ = AK$ .

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία  $EZ\Gamma$ .



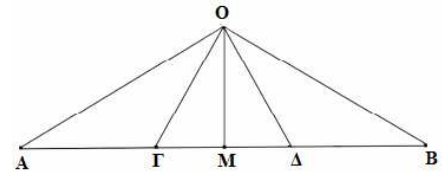
26. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία  $\Gamma, \Delta$  ώστε να ισχύει  $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$ . Επίσης θεωρούμε σημείο  $O$  εκτός του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  έτσι ώστε να ισχύουν  $O\Gamma = O\Delta$  και  $O\Delta = \Delta B$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η γωνία  $\Gamma O\Delta$  είναι  $60^\circ$

ii. οι γωνίες  $OAG, O\Delta B$  είναι ίσες και κάθε μια ίση με  $30^\circ$ .

β) Αν  $M$  το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $2OM = OA$ .



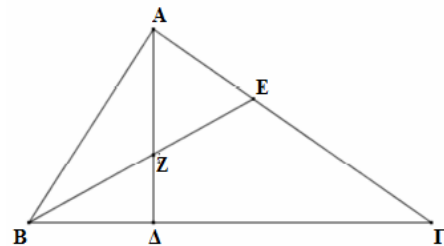
27. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$  και έστω  $A\Delta$  ύψος και  $BE$  διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο  $Z$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\hat{B} = 60^\circ$  και  $AZ = BZ$ .

ii.  $A\Delta = \frac{3}{2} BZ$ .

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



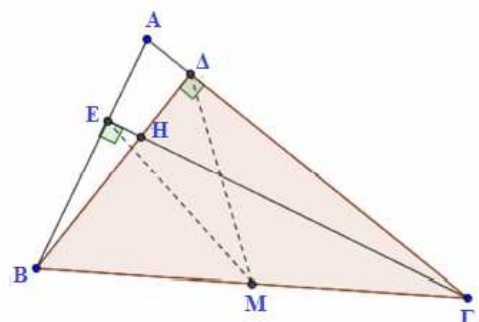
28. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , τα ύψη του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  που τέμνονται στο σημείο  $H$  και το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι

i.  $M\Delta = ME$

ii. Η ευθεία  $AH$  τέμνει κάθετα τη  $B\Gamma$  και ότι

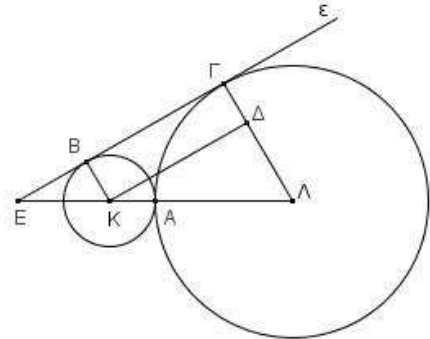
$\widehat{AH\Delta} = \hat{\Gamma}$ , όπου  $\Gamma$  η γωνία του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



γ) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH.

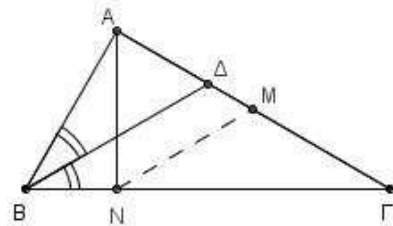
29. Οι κύκλοι  $(K, \rho)$  και  $(\Lambda, 3\rho)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A. Μία ευθεία  $\epsilon$  εφάπτεται εξωτερικά και στους δυο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην  $\epsilon$  που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.  
 β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΚΛ είναι  $30^\circ$ .  
 γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα  $ΕΛ=6\rho$ , όπου  $\rho$  η ακτίνα του κύκλου  $(K, \rho)$ .



30. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ , και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας Β. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.  
 β) Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές.  
 γ)  $AN \perp BG$ .



31. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $AB < AG$ . Έστω Ax η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας A.

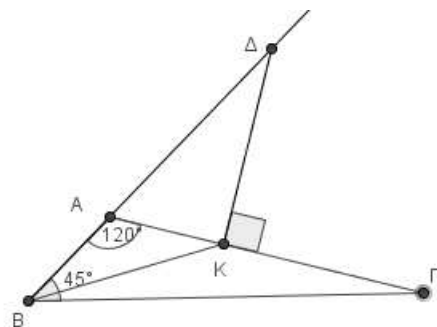
α) Να αποδείξετε ότι:

- i.  $\frac{\hat{A}_{εξ}}{2} + \hat{B}_{εξ} = 180^\circ + \frac{\hat{\Gamma} - \hat{B}}{2}$ , όπου  $\hat{A}_{εξ}$  και  $\hat{B}_{εξ}$  παριστάνουν τις εξωτερικές γωνίες των A και B αντίστοιχα.  
 ii. Η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την προέκταση της πλευράς ΓB (προς το μέρος του B) σε σημείο Z.

β) Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A και  $\widehat{AZB} = 15^\circ$ , να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 2AB$ .

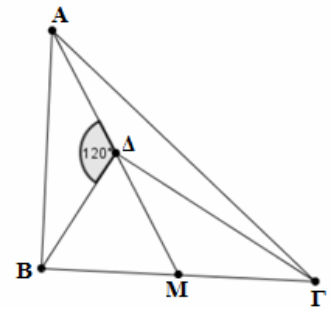
32. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με γωνία  $A=120^\circ$  και γωνία  $B=45^\circ$ . Στην προέκταση της ΒΑ προς το A, παίρνουμε τμήμα  $A\Delta=2AB$ . Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία ΑΔΚ είναι ίση με  $30^\circ$ .  
 β) Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.  
 γ) Αν Ζ το μέσο της ΔΑ, τότε  $\widehat{ZKB} = 90^\circ$ .  
 δ) Το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ.



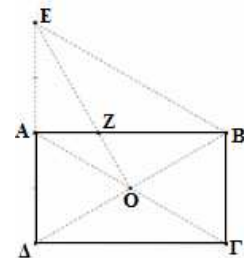
33. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσος του  $AM$ . Έστω ότι  $\Delta$  είναι το μέσο της  $AM$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$  και  $\widehat{A\Delta B} = 120^\circ$ .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta M$ .  
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο.  
 γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $\Delta M\Gamma$  είναι ίσα.  
 δ) Αν το σημείο  $K$  είναι η προβολή του  $\Delta$  στην  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $2MK = A\Delta$ .



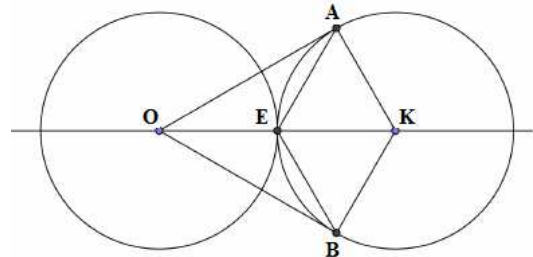
34. Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με κέντρο  $O$  και  $AB > B\Gamma$ ,  $A\Gamma = 2B\Gamma$ . Στην προέκταση της πλευράς  $\Delta A$  (προς το  $A$ ) παίρνουμε σημείο  $E$  ώστε  $\Delta A = AE$ .

- α) Να αποδείξετε ότι:  
 i. Το τετράπλευρο  $AEB\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.  
 ii. Το τρίγωνο  $E\Delta B$  είναι ισόπλευρο.  
 β) Αν η  $EO$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $\Delta Z \perp EB$ .



35. Δυο ίσοι κύκλοι  $(O, \rho)$  και  $(K, \rho)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $E$ . Αν  $OA$  και  $OB$  είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο  $O$  στον κύκλο  $(K, \rho)$  να αποδείξετε ότι:

- α)  $AE = BE$ .  
 β)  $\widehat{AOK} = 30^\circ$ .  
 γ) Το τετράπλευρο  $AKBE$  είναι ρόμβος.



36. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του  $AM$  και σε τυχαίο σημείο  $K$  αυτής φέρουμε κάθετη στην  $AM$  η οποία τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Αν  $H$  είναι το μέσο του  $\Delta E$  να αποδείξετε ότι:

- α)  $\widehat{B} = \widehat{BAM}$ .  
 β)  $\widehat{A\Delta H} = \widehat{\Delta A H}$ .  
 γ) Η ευθεία  $AH$  τέμνει κάθετα τη  $B\Gamma$ .

37. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\Delta, E$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Στην προέκταση της  $\Delta E$  (προς το  $E$ ) θεωρούμε σημείο  $\Lambda$  ώστε  $E\Lambda = AE$  και στην προέκταση της  $E\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) θεωρούμε σημείο  $K$  τέτοιο ώστε  $\Delta K = A\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $K\Delta = \Lambda E$ .  
 β) Τα τρίγωνα  $AKB$  και  $A\Lambda\Gamma$  είναι ορθογώνια.  
 γ) Τα τρίγωνα  $AKB$  και  $A\Lambda\Gamma$  είναι ίσα.

38. Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες  $(\epsilon)$  και  $(\zeta)$ , και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που

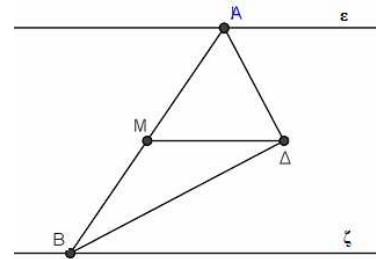


σηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΔΑ είναι ορθή.

β)  $\widehat{BM\Delta} = 2 \cdot \widehat{M\Delta A}$ .

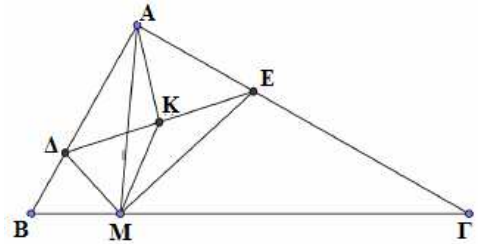
γ)  $M\Delta \parallel \epsilon$ .



39. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών ΒΜΑ και ΑΜΓ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, η γωνία ΔΜΕ είναι ορθή.

β) Αν Κ το μέσον του ΔΕ, να αποδείξετε ότι  $MK=KA$ .



40. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσος του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{NKM} = \widehat{NMK}$ .

β) Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ.

γ)  $AM=KN+LP$ .

41. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε  $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ . Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και

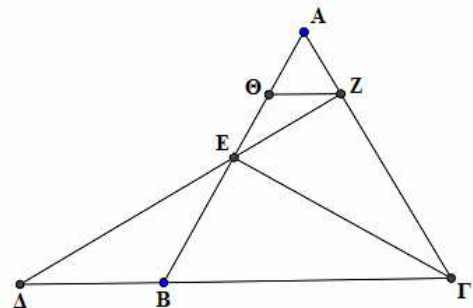
$Z\Theta \parallel B\Gamma$ :

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ.

γ) Να αποδείξετε ότι  $AE=2\Theta Z$ .

δ) Να αποδείξετε ότι  $3AB=4\Theta B$ .



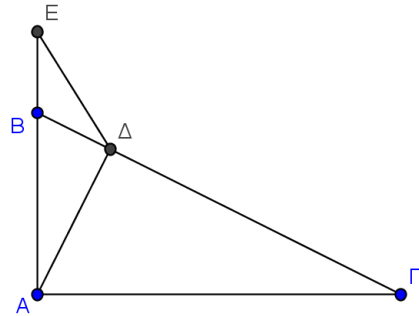
42. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$  και  $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ . Φέρουμε το ύψος του  $A\Delta$  και σημείο  $E$  στην προέκταση της  $AB$  τέτοιο ώστε  $BE=B\Delta$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta E$ .

β) Να αποδείξετε ότι:

i.  $BE = \frac{AB}{2}$ .

ii.  $AE = \Gamma\Delta$ .



43. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$  και  $\hat{\Gamma}=30^\circ$  με  $M$  και  $N$  τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς  $B\Gamma$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

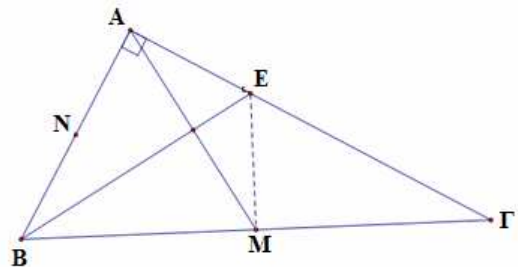
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η  $BE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $B$ .

ii.  $AE = \frac{\Gamma E}{2}$ .

iii. η  $BE$  είναι μεσοκάθετος της διαμέσου  $AM$ .

β) Αν  $A\Delta$  είναι το ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$  που τέμνει την  $BE$  στο  $H$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $M$ ,  $H$  και  $N$  είναι συνευθειακά.

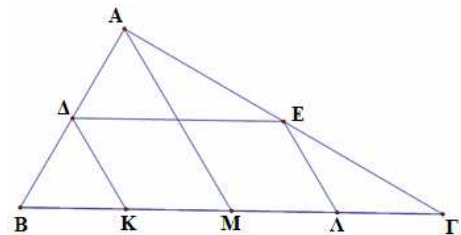


44. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$ . Στην πλευρά  $B\Gamma$  θεωρούμε τα σημεία  $K, M, \Lambda$  ώστε  $BK=KM=M\Lambda=\Lambda\Gamma$ . Αν τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $\Delta E\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο.

β) Η διάμεσος του τραπέζιου  $K\Delta AM$  ισούται με

$$\frac{3}{8} B\Gamma.$$



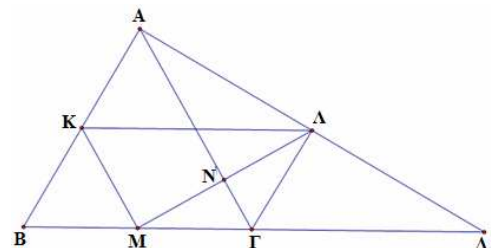
45. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε τμήμα  $\Gamma\Delta=B\Gamma$ . Αν  $M, K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma, AB$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $BA\Delta$ .

β) Να αποδείξετε ότι:

i) Το τετράπλευρο  $K\Lambda\Gamma M$  είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.

ii) Το τρίγωνο  $KM\Lambda$  είναι ορθογώνιο.

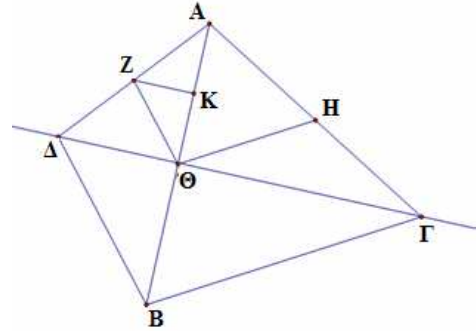


46. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Με βάση την  $AB$  κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο  $A\Delta B$ , εκτός του τριγώνου  $AB\Gamma$ , με γωνία  $\hat{\Delta}=120^\circ$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$  και  $H$  των πλευρών  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η  $\Delta\Gamma$  είναι μεσοκάθετος του  $AB$ .

β) Αν η  $\Delta\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $\Theta$ , να αποδείξετε ότι η γωνία  $Z\Theta H$  είναι ορθή.

γ) Αν  $ZK$  είναι η κάθετη στην  $AB$  από το σημείο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $ZK = \frac{A\Delta}{4}$ .



47. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$ . Φέρνουμε τμήμα  $A\Delta$  κάθετο στην  $AB$  και τμήμα  $AE$  κάθετο στην  $AG$  με  $A\Delta=AE$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$ ,  $H$  και  $M$  τα μέσα των  $\Delta B$ ,  $E\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $AE\Gamma$  είναι ίσα.

ii. Το τρίγωνο  $ZAH$  είναι ισοσκελές.

iii. Η  $AM$  είναι μεσοκάθετος του  $ZH$ .

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $AE\Gamma$  έγραψε τα εξής:

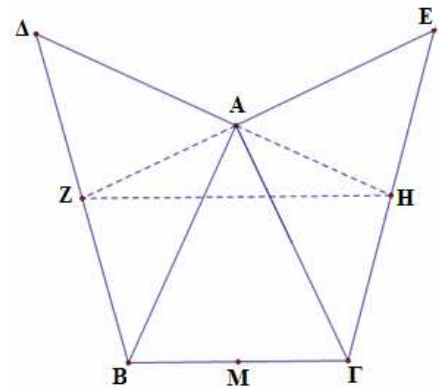
« 1.  $A\Delta=AE$  από υπόθεση

2.  $AB=AG$  πλευρές ισοσκελές τριγώνου

3.  $\widehat{\Delta AB} = \widehat{EAG}$  ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δυο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;



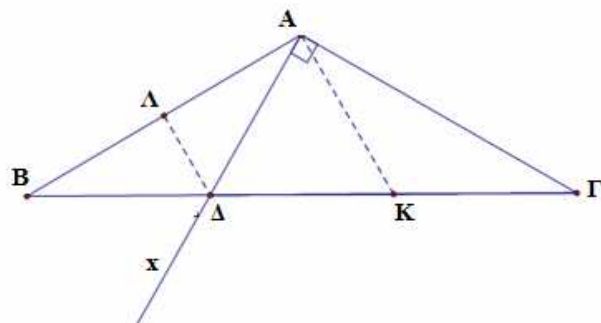
48. Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=120^\circ$ . Φέρουμε ημιευθεία  $Ax$  κάθετη στην  $AG$  στο  $A$ , η οποία τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ . Έστω  $\Lambda$  το μέσο του  $AB$  και  $K$  το μέσο του  $\Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $A\Delta B$  είναι ισοσκελές.

β)  $\Delta\Gamma=2B\Delta$ .

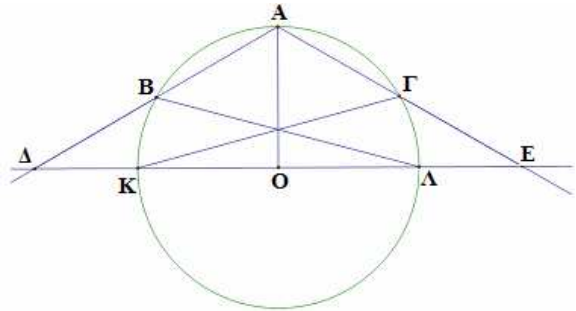
γ)  $\Lambda\Delta \parallel AK$ .

δ)  $AK=2\Lambda\Delta$ .



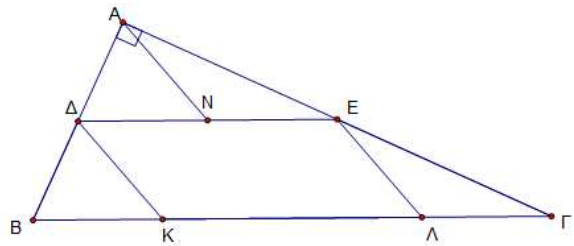
49. Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και διάμετρο  $ΚΛ$ . Έστω  $A$  σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα  $OA$  να είναι κάθετη στην  $ΚΛ$ . Φέρουμε τις χορδές  $AB=AG=r$ . Έστω  $\Delta$  και  $E$  τα σημεία τομής των προεκτάσεων των  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου  $ΚΛ$ .  
Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία  $ΒΑΓ$  είναι  $120^\circ$ .  
β) Τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  είναι μέσα των  $\Delta\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.  
γ)  $ΚΓ=ΛB$ .



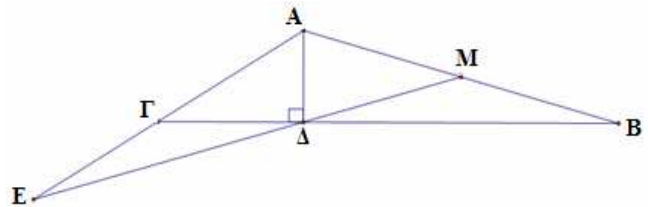
50. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$  και  $\Delta, E$  και  $N$  τα μέσα των  $AB, A\Gamma$  και  $\Delta E$  αντίστοιχα. Στο τμήμα  $B\Gamma$  θεωρούμε σημεία  $K$  και  $\Lambda$  ώστε  $\Delta K=KB$  και  $E\Lambda=A\Gamma$ .  
Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\widehat{\Delta K \Lambda} = 2\hat{B}$  και  $\widehat{E \Lambda K} = 2\hat{\Gamma}$ .  
β) Το τετράπλευρο  $\Delta E \Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο με  $\Delta E = 2\Delta K$ .  
γ)  $AN = \Delta K = \frac{B\Gamma}{4}$ .



51. Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB > A\Gamma$ ),  $A\Delta$  το ύψος του και  $M$  το μέσο του  $AB$ . Η προέκταση της  $M\Delta$  τέμνει την προέκταση της  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$  ώστε  $\Gamma\Delta = \Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\hat{B} = \hat{E}$ .  
β)  $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = \widehat{AM\Delta}$ .  
γ)  $\Gamma E < A\Gamma$ .



52. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ). Με διάμετρο την πλευρά του  $A\Gamma$  φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την  $AB$  στο  $M$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\widehat{\Gamma A \Delta} = \hat{B}$ .  
β) Το τρίγωνο  $\Delta M B$  είναι ισοσκελές.  
γ) Το  $M$  είναι το μέσο του  $AB$ .

